NAZIONALE
B. Prov.
BIBLIOTECA
VITT. EM. III
1581
NAPOLI

10. G. 6.

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XIV

Palchetto 5

Num.° d' ordine 15

Digitized by Google

B. Prov
III
1581

Digitized by Google

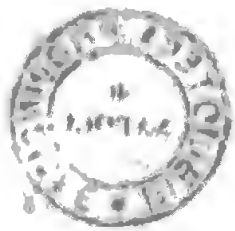
DIZIONARIO

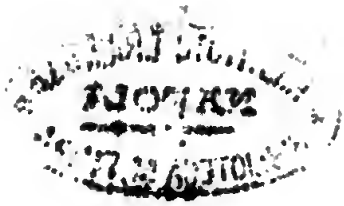
DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

VOLUME TERZO

Digitized by Google





Digitized by Google

613289 SBN

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

COMPILATO DA UNA SOCIETA'
DI ANTICHI ALLIEVI DELLA SCUOLA POLITECNICA DI PARIGI

SOTTO LA DIREZIONE

DI

A.-S. DE MONTFERRIER

MEMBRO DELL' ANTICA SOCIETÀ REALE ACCADEMICA DELLE SCIENZE
DI PARIGI, DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI MARSIGLIA,
DI QUELLA DI METZ EC. EC.

PRIMA VERSIONE ITALIANA

CON NUMEROSE AGGIUNTE E CORREZIONI

DEL D. GIUSEPPE GASBARRI

E

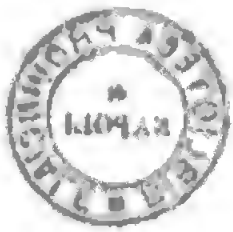
DI GIUSEPPE FRANÇOIS

BIBLIOTECA PROVINCIALE NAPOLI

VOLUME TERZO

R. ISTITUTO ORIENTALE NAPOLI BIBLIOTECA M. RIPA

FIRENZE
PER V. BATELLI E COMPAGNI
1841



Digitized by Google

DIZIONARIO

DELLE

SCIENZE MATEMATICHE

PURE ED APPLICATE

CON

CONCAVO (*Geom.* e *Ott.*). *Superficie concava*, si chiama così la superficie curva interna di un corpo vuoto. Quest'espressione applicasi particolarmente agli specchi e ai vetri d'ottica. *Vedi* LENTE e SPECCHIO.

CONCENTRICO (*Geom.*). Si chiama così ciò che ha un medesimo centro. Due circoli o due curve qualunque che hanno un medesimo centro (*vedi* questa parola), si chiamano *concentriche*. *Vedi* CIRCOLO, POLIGONO, CURVE.

CONCOIDE (*Geom.*) (da Κόγχη, ης, *conca*). Curva inventata dal geometra greco Nicomede, per risolvere i problemi della *duplicazione del cubo* e della *trisezione dell'angolo*. Ecco la sua costruzione.

Dal punto A (*Tav.* XXXV, *fig.* 4), preso al di fuori di una retta indefinita MN, avendo tirato le rette AB, A*a*, A*b*, A*c*, A*d*, ec. Se prendiamo le parti C*B*, *fa*, *gb*, *hc*, *id*, ec., tutte eguali fra loro; la curva B*abcde*, che passa per le estremità B, *a*, *e*, *d*, *e*, ec., è la *concoide*. Siccome possiamo effettuare questa costruzione tanto al di sotto quanto al di sopra della retta MN, così abbiamo due specie di *concoidi*. La prima EB*e* si chiama *concoide ulteriore*, e la seconda RFO, *concoide citeriore*. La retta MN è un asintoto ad ambedue le concoidi.

Queste due curve possono facilmente descriversi per mezzo di un moto continuo, facendo girare AB intorno del punto A, in maniera che CD o CS siano sempre della medesima grandezza, allora il punto B traccerà la concoide ulteriore, e il punto F la concoide citeriore.

Per trovare l'equazione della concoide, prendiamo AB per asse delle ascisse, e facciamo

$$AC = a,\ AD = x,\ ED = y,\ CB = QE = b,\ e$$
$$CD = AD - AC = x - a.$$

Il triangolo rettangolo AED dà

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{ED}^2$$

ossia

$$AE = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ma i triangoli AQC, AED sono simili: si ha perciò

$$AE : QE :: AD : CD,$$

vale a dire,

$$\sqrt{x^2+y^2} : b :: x : (x-a)$$

e elevando al quadrato

$$(x^2+y^2) : b^2 :: x^2 : (x-a)^2.$$

Da quest' ultima proporzione si ricava

$$(x^2+y^2)-x^2 : x^2 :: b^2-(x-a)^2 : (x-a)^2.$$

Donde

$$y^2=\frac{x^2[b^2-(x-a)^2]}{(x-a)^2}$$

equazione che conviene egualmente alla concoide citeriore, prendendo $CF=BC=b$. Quest' ultima può avere delle forme differenti, secondo il rapporto di CF ad AC, F essendo il punto che descrive la curva, come lo vedremo altrove. *Vedi* Nodo, Punto coniugato.

L' equazione *polare* della concoide è molto più semplice dell' equazione a *coordinate rettangolari*, si ottiene direttamente considerando solamente il triangolo rettangolo variabile ACQ; poichè indicando con φ l'angolo variabile BAE, e con z la retta variabile AE o AR, avremo

$$AQ=\frac{AC}{\cos\varphi}=\frac{a}{\cos\varphi}.$$

Ma $AE=AQ+CB$ e $AR=AQ-CF$; così abbiamo

$$z=\frac{a}{\cos\varphi}\pm b.$$

Il segno + servendo per la *concoide ulteriore*, e il segno — per la *concoide citeriore*. Vedremo alle parole Duplicazione e Trisezione l' uso che gli antichi facevano di queste curve, delle quali alcuni geometri dell' ultimo secolo si sono ancora occupati. Vedi *Memorie dell' Accademia delle Scienze* di Parigi 1708, 1733, 1734 e 1735. Newton, *Aritmetica universale*.

CONCORRENTI (*Mec.*) Si chiamano *potenze concorrenti* quelle le di cui direzioni non sono paralelle, o concorrono a produrre un effetto. Si distinguono così delle potenze opposte le quali tendono a produrre effetti contrarii, e che si chiamano *potenze cospiranti*. *Vedi* Forze.

CONCORRERE (*Geom.*). Due linee o due piani *concorrono* allorquando si tagliano, o che, senza tagliarsi, sono tali che essendo sufficientemente prolungati possono incontrarsi.

CONCORSO (*Geom.*). Il punto di concorso di diverse linee è quello ove esse effettivamente si tagliano, ovvero quello ove esse si taglierebbero tutte, se fossero sufficientemente prolungate. Il centro di un circolo è il *punto di concorso* di tutti i suoi raggi.

CONCRETO (*Arit.*). Si chiama numero *concreto* quello che si considera come rappresentante una collezione di oggetti determinati. Così 5 metri, 8 litri, 60 gradi, ec., sono numeri concreti, perchè 5, 8 e 60 non esprimono in questo caso unità astratte, ma oggetti convenzionali; cioè *metri*, *litri* e *gradi*. *Vedi* Aritmetica, 6.

CONDAMINE (Carlo-Maria La), membro dell'Accademia delle Scienze, dell' Accademia francese, della Società Reale di Londra, e delle Accademie di Berlino, di Pietroburgo e di Cortona, nacque a Parigi il 28 Gennajo 1701. Sebbene non possa citarsi nè come un dotto nè come un letterato, La Condamine ha avuto nella società i più brillanti successi, ed ha goduto di tutta la gloria che può meritare la scienza ed il genio. Si diceva di lui che all' Accademia francese era considerato come un dotto, e all' Accademia delle Scienze come un letterato. La verità è che La Condamine, dotato di uno spirito vivo e penetrante, e soprattutto inspirato da un irresistibile sentimento di curiosità, era naturalmente disposto ad occuparsi di tutto ciò che può eccitare l'emulazione del sapere e l' ardire dell' intelligenza. Da giovine si fece militare, come in seguito si fece dotto, per sola curiosità. Poco mancò che all'assedio di Roses non si facesse uccidere per l' imprudenza cagionata da questa sua passione dominante. Era salito sopra un' altura per esaminare la fortezza più da vicino, e stava osservando con un canocchiale il servizio di una batteria di cui le palle gli cadevano d' intorno senza che se ne scorgesse. Convenne ordinargli di scendere ed avvertirlo che il mantello di scarlatto cui portava l' aveva reso il punto di mira degli assediati. Fattasi la pace, La Condamine non potendo sperare nella carriera militare che un lento avanzamento ed una vita monotona, entrò nell'Accademia delle Scienze in qualità di chimico aggiunto.

Incapace di una occupazione seria e prolungata, la sua curiosità, che a tutto si estendeva e tutto risvegliava, gli teneva luogo di un più nobile ardore per lo studio. Così, sebbene potesse dirsi ch' ei non avesse cognizioni profonde nelle scienze, era pur vero che tutte erangli pressochè famigliari: s' ei non contribuì direttamente al loro avanzamento, servì a renderle più diffuse. Poco dopo il suo ricevimento nell'Accademia, s'imbarcò sulla squadra di Dugnay-Trouin e percorse, nel Mediterraneo, le coste dell'Asia e dell'Affrica. Al suo ritorno in Francia, trovò l' Accademia occupata di un progetto di viaggio all' equatore per determinare la grandezza e la figura della terra. Egli propose tosto di unirsi alla spedizione, ed è noto che fu in gran parte per la sua influenza presso Maurepas, che questo ministro approvò tale viaggio scientifico e somministrò i mezzi per eseguirlo. Partì con Bouguer e Godin, altri due membri dell' Accademia. Le pene, le fatiche e le calamità che ebbero a sopportare non saprebbero concepirsi. Si sa che tale spedizione durò dieci anni, e dobbiamo dire che se La Condamine era inferiore ai suoi colleghi nel rapporto della scienza, gli ajutò potentemente con altri mezzi secondarj, senza i quali la loro operazione non avrebbe potuto aver luogo. La Condamine, abituato alla gran società e a tutti i godimenti del mondo, non solo sopportò con un coraggio e con una rassegnazione degna di elogi i pericoli e le fatiche di quell' utile impresa, ma seppe ancora cattivarsi l' animo degli abitanti, farsi ascoltare dalle autorità, sormontare gli ostacoli ognora riuscenti, cui un popolo ignorante e superstizioso oppone sempre agli stranieri, farsi rispettare ed imporre ai malevoli, a forza di coraggio e di perseveranza. Tante cure, tante pratiche, tante inquietudini avrebbero stancato l' attività di qualunque altro; ma egli, quando poteva sottrarvisi, andava tosto ad assistere nei lavori astronomici i suoi colleghi, ai quali colla sua inesauribile ilarità fece spesso dimenticare i dispiaceri di un lungo esilio, e le privazioni che dovettero soffrire in un paese in cui anche oggigiorno la civiltà ha fatto sì poco progresso.

Al suo ritorno in Europa, La Condamine pubblicò la relazione del suo viaggio, che dal pubblico venne accolta con straordinario favore. Bouguer, credendosi privato di una gloria sì laboriosamente acquistata, attaccò con calore e con asprezza il suo compagno, che rispose scherzando; e il pubblico, incapace di giudicare della sostanza della questione, diede ragione a chi lo divertiva. Appena

fu sbarazzato da tal disputa, La Condamine si applicò ad un progetto che lungo tempo l'aveva tenuto occupato, cioè l'istituzione di una misura universale: a tale oggetto proponeva di scegliere per unità la lunghezza del pendolo che batteva i secondi sotto l'equatore. Scrisse con successo in favore della pratica allora nascente dell'innoculazione del vajuolo, ed ebbe il piacere di vedere che egli aveva contribuito efficacemente a propagarla. Viaggiò in seguito in Italia e in Inghilterra. Sembrava che la sua curiosità ridotta al solo senso della vista, mentre nel suo viaggio al Perù era divenuto sordo, non fosse divenuta che più attiva. La sua morte fu cagionata appunto da un'imprudenza commessa per questa sua passione. Poco tempo dopo il suo ritorno dall'Inghilterra, era stato assalito da una paralisia quasi totale a da diverse altre gravi infermità. Siccome non poteva più andare all'Accademia, si faceva portare i registri delle tornate e ragguagliare delle memorie di maggiore importanza. Apprese in tal modo che un giovine chirurgo aveva allora proposta un'operazione molto ardita e nuova per una delle malattie da cui era attaccato. Lo fa tosto chiamare e gli propone di ripetere sopra di lui la sua esperienza. »Ma se ho la disgrazia di non riuscirvi? — Che importa? disse; non ne risulterà nessuno inconveniente per voi. Io sono vecchio » ed ammalato: si dirà che la natura vi ha mal secondato. Al contrario, se mi » guarirete, io stesso renderò esatto conto del vostro modo di operare all'Accademia, e ciò vi frutterà un grandissimo onore ». Il giovine acconsente, e dà principio all'operazione: ma il curioso ammalato non contentavasi di soffrire, voleva vedere ancora come si eseguiva l'operazione. » Andate dunque pian piano, » vi prego, lasciatemi vedere... Ma, se non osservo il vostro modo di operare, » non potrò mai renderne conto all'Accademia ». La Condamine non potè resistere alle conseguenze di questa operazione, e morì ai 4 Febbrajo 1774, conservando fino all'ultimo momento la sua ilarità, il suo coraggio e la sua filosofia. Le sue opere scientifiche di maggior rilievo sono: I *The distance of the tropicks*, 1738, in-8; II *Estrato de observaciones en el viage del Rio de Amazonas*, 1745, in-12; III *Relation abrégée d'un voyage fait dans l'intérieur de l'Amérique méridionale*, Parigi, 1745, in-8: tradotto in inglese e in olandese; IV *La figure de la terre, determinée par les observations de MM. La Condamine et Bouguer*, Parigi, 1749, in-4; V *Mesure des trois premiers degrés du méridien dans l'hémisphère austral*, Parigi, 1751, in-4; VI *Journal du voyage fait par ordre du Roi à l'équateur*, Parigi, 1751, in-4; questo giornale fa parte ancora delle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze. Nel 1752, La Condamine vi unì un *Supplimento*, nel quale trovasi la sua risposta a Bouguer. Si hanno inoltre di La Condamine parecchie lettere e memorie sopra varj soggetti scientifici nelle *Memorie* dell'Accademia delle Scienze e nel *Mercurio di Francia*.

CONDIZIONE (*Equazione di*). Le equazioni di condizione sono un metodo che viene adoperato in fisica e specialmente in astronomia per correggere gli errori che si commettono nella determinazione, per mezzo dell'osservazione, delle costanti che entrano in un'equazione che appartiene ad un fenomeno fisico.

Questo metodo riposa sopra il seguente principio generale che si usa in Astronomia. *Allorche più cause di variazioni piccolissime influiscono sopra un risultamento, basta di calcolare i loro effetti isolatamente, e la somma di questi effetti parziali comporrà l'effetto totale.*

Premesso ciò, supponiamo che $F(x, y \ldots o, b \ldots) = o$ sia l'equazione dedotta dalla legge che regola un fenomeno fisico, nella quale le costanti $o, b, c \ldots$ sono incognite, e $x, y, z \ldots$ sono grandezze variabili secondo le circostanze del fenomeno. Per determinare $o, b, c \ldots$ si ricorra all'esperienza calcolando de' valori simultanei di $x, y, z \ldots$, e sostituendoli nell'equazione $F = o$; ripetendo quindi l'esperienza si osservano altri valori per $x, y, z \ldots$, dai quali

ricavasi altre *equazioni di condizione* fra le costanti incognite a, b, c ...., ec. col mezzo dell'eliminazione si arriva inseguito a conoscere queste costanti.

Ma i valori che si ricavano dall'osservazione non essendo mai esatti, i numeri a', b' c' ...., che si ottengono con questo metodo per a, b, c ...., debbono riguardarsi come approssimati solamente: si deve perciò porre nell'equazione $F=o$, $a=a'+A$, $b=b'+B$, $c=c'+C$ ...., e determinare gli errori A, B, C..., dai quali le costanti a, b, c .... sono affette; siccome però A, B, C, ... sono piccolissime quantità, siamo perciò in diritto di trascurare le potenze superiori alla prima: così l'equazione $F=o$ non contiene le incognite A, B, C .... che al primo grado.

Si supplisce allora all'imperfezione delle misure di x, y, z .... col numero delle osservazioni. Ripetendo le osservazioni si formano tante equazioni di condizione, nelle quali x, y, z.... sono cognite; quindi si combinano successivamente in maniera da ricavarne altre che siano le più favorevoli, che sia possibile, alla determinazione di ciascuna costante, vale a dire, che si aggiungono insieme, o che si sottraggono le une dalle altre, in modo da dedurne altre equazioni, nelle quali il coefficente numerico dell'errore dovuto a questa costante sia il più grande possibile, nel mentre che quelli dell'altre costanti sono i meno considerabili. Si sente infatti, che l'errore cercato essendo eguale alla somma degli altri termini dell'equazione, divisi pel coefficiente numerico che lo moltiplica, più questo denominatore sarà grande rapporto agli altri termini, più gli errori di questo saranno di poca importanza. Fatta questa osservazione il processo analitico, che bisogna impiegare per ottenere direttamente l'equazione più favorevole a ciascuna costante, si presenta da se medesimo. Si dispongono tutte le equazioni in guisa che il coefficiente dell'errore dovuto a questa costante sia positivo in tutte. Questo è sempre possibile cangiando convenientemente i segni di tutti i termini che lo compongono; quindi si fa la somma di tutte le equazioni così preparate. In questa somma l'errore della costante che si è favorito ha il massimo coefficiente possibile, poichè esso è moltiplicato dalla somma di tutti i coefficienti particolari che lo affettano, invece che i coefficienti degli altri errori si sono in parte aggiunti, e in parte sottratti, secondo la disposizione casuale de' loro segni. Quando abbiamo formato tante di queste equazioni speciali quanti errori abbiamo da determinare, si determina ciascuno di questi col processo ordinario dell' eliminazione. È facile di vedere, che in questa operazione, ciascuna delle incognite conserva nella sua equazione il vantaggio che il suo gran coefficiente gli dà. Mentre se prendiamo il valore di una di queste incognite, di A, per esempio, nell'equazione ov' essa è favorita, i coefficienti numerici di questo valore saranno tutte frazioni minori dell'unità. Per conseguenza, se si sostituiscono in tutte le altre equazioni, essi indeboliranno il coefficiente che A aveva in ciascuna di loro: e così i termini che risulteranno non potranno distruggere la superiorità, che aveva in ciascuna equazione il coefficiente di una dell'altre incognite.

Si deve arrivare con questo processo a conoscere con la più grande esattezza le correzioni simultanee delle costanti. Queste correzioni essendo conosciute, si applicano alle costanti precedentemente adottate, e si hanno così i loro valori definitivi.

Siccome questo metodo è importantissimo in astronomia, applichiamolo ad un esempio, onde rendere più chiara la teoria.

Supponiamo che si abbiano un gran numero di osservazioni del sole che possiamo riguardare come esattissime. Se ne dedurranno le longitudini del sole, e paragonandole a quelle che danno le tavole, le differenze saranno gli errori di queste tavole. Errori che rappresenterò con C, C', C''.

Siccome le perturbazioni possono supporsi esattamente conosciute dalla teoria, e che abbiamo dovuto tenerne conto nei calcoli, gli errori restanti debbono risultare da tutti quelli che abbiamo potuto fare sopra gli elementi ellittici; è necessario quindi di separarvi ciò che appartiene a ciascuno di essi.

Consideriamo prima di tutto il luogo del perigeo. Si calcolerà l'effetto che un minuto di cangiamento nella sua posizione produrrebbe sopra la longitudine. Per far ciò bisogna avere delle tavole del sole. Prendiamo quelle di Delambre, che sono calcolate in misure sessagesimali.

In queste tavole si è dato al perigeo una data posizione, secondo la quale si sono calcolate le anomalie, sottraendo la longitudine del perigeo dalla longitudine del sole. Per conseguenza un minuto di cangiamento sopra il luogo del perigeo, cangia di un minuto l'anomalia corrispondente a ciascuna longitudine. Supponiamo dunque che la longitudine che ha dato l'errore C risponda, per esempio, a 198° sessagesimali d'anomalia, contata dal perigeo. Questo sarà sei segni e diciotto gradi, o 6^s, 18°, secondo la maniera di contare degli astronomi; ciascun segno essendo valutato 30° sessagesimali. Si troverà nella tavola dell'equazione del centro che a questo punto dell'orbita, 10 minuti di aumentazione sopra l'anomalia, producono un accrescimento di 18″, 8 sopra l'equazione dal centro, donde ne segue che un minuto produce 1″, 88; e siccome a questo punto, l'equazione del centro S'T*s*' (*Tav.* LXXX, *fig.* 3) è sottrattiva, la longitudine ETS' si trova diminuita della medesima quantità. Ora aumentare l'anomalia o l'angolo ottuso ET*s*' di un minuto, è lo stesso che di mandare indietro il perigeo di altrettanto, poichè la longitudine ETS' deve restare la medesima. Per conseguenza la diminuzione di un minuto sopra la longitudine del perigeo, produce a questo grado d'anomalia 1″, 88 di diminuzione sopra la longitudine vera del sole.

Si calcolerà egualmente l'effetto di un cangiamento arbitrario nel valore della più grande equazione del centro. Per facilitare questa ricerca, conviene di scegliere la diminuzione secolare 17″, 18 (0°, 0053) l'influenza della quale si trova tutta calcolata nella medesima tavola per ciascun grado d'anomalia. Si supporrà dunque che la più grande equazione sia aumenta di 17″, 18.

Ne risulterà a 198° d'anomalia, un'aumentazione di 5″, 10 sopra l'equazione del centro ciò che darà 5″, 10 di diminuzione sopra la longitudine.

Finalmente potrà ancora esservi qualche errore sopra la longitudine media del sole indicata dalle tavole per un istante dato, per esempio pel primo gennaio a mezza notte. Questa longitudine media, che gli astronomi chiamano l'*epoca*, è ancora uno degli elementi che s'impiegano per i calcoli delle osservazioni relative ad un altro istante dato; poichè si parte da ciò per calcolare quale sarà, per questo nuovo istante, la longitudine media del sole, e a questo effetto, si aggiunge all'*epoca* il medio moto del sole, dal primo gennaio a mezza notte, fino all'istante dell'operazione che si calcola. Non può esservi errore in questa riduzione, perchè il medio moto è perfettamente conosciuto; ed è perciò sopra la longitudine media che serve d'origine, vale a dire, sopra l'*epoca*, che il sospetto di errore deve portarsi; supponiamo che essa abbia bisogno di essere aumentata di un numero z di secondi, dimodochè il suo errore, espresso in secondi, sia $+z$.

Indichiamo ancora per $+x$ l'aumentazione che bisogna fare alla longitudine del perigeo, e per $+y$ quella che bisogna fare alla più grande equazione del centro; queste correzioni essendo ancora espresse in secondi come la prima; e calcoliamo l'effetto che va a risultare sopra le longitudini dedotte dalle tavole.

Poichè un accrescimento di un minuto sopra la longitudine del perigeo ne produce uno di 1″,88 sopra la longitudine, x secondi daranno $\frac{x \,.\, 1''88}{60}$ o $x \times 0,3133$

poichè questi cangiamenti essendo piccolissimi, possono senza errore sensibile, supporsi proporzionali fra loro.

Egualmente, l'aumentazione y della più grande equazione darà, nell'espressione della longitudine, la correzione,

$$\frac{-y \,.\, 5'',10}{17'',18} \text{ o } -y \,.\, 0{,}2969$$

E siccome le tavole, se fossero perfettamente corrette, dovrebbero soddisfare alle osservazioni, avremo

Longitudine osservata = longitudine calcolata $+x \,.\, 0{,}3133 - y \,.\, 0{,}2969 + z$.

Ors, abbiamo trovato

Longitudine osservata — longitudine calcolata = C.

Si avrà perciò l'equazione

$$C = z + x \,.\, 0{,}3133 - y \,.\, 0{,}2969,$$

che sarà un'*equazione di condizione*, fra le tre correzioni x, y, z.

Se C fosse conosciuto con un rigore geometrico, tre equazioni simili basterebbero per determinare queste tre incognite. Ma gli errori inevitabili delle osservazioni esigono che se ne impieghi un maggior numero. Si combinano queste come l'abbiamo insegnato di sopra, in modo da ricavarne tre equazioni ove i coefficienti di x, y, e z siano successivamente tanto grandi, quanto è possibile comparativamente a quelli dell'altre incognite. Queste tre equazioni risultanti danno le tre incognite con un'esattezza tanto più grande, quanto più grande è il numero delle osservazioni impiegate. Si riportano i loro valori al mezzo dell'intervallo che le osservazioni comprendono, il che suppone che esse non siano troppo lontane le une dall'altre, e che il moto medio sia abbastanza esattamente conosciuto. Mentre questa conoscenza è indispensabile per trasportare le longitudini medie, dall'istante che serve d'*epoca* alle tavole, fino a quello delle differenti osservazioni. Nello stato attuale dell'astronomia, queste supposizioni sono più che permesse; ma se si trattasse di un nuovo pianeta ove si temerebbe ad ammetterle, s'introdurrebbe, invece di z, una quantità variabile.

$$a + nt$$

n essendo la correzione del moto annuale, e t il numero d'anni passati da un'epoca fissa, ma arbitraria che si prenderebbe per origine.

Determinando i valori di x, y, z per due epoche lontane, per esempio, verso il 1756, con le osservazioni di Bradley, e verso il 1800 con quelle di Maskeline, si vedrà se i medii movimenti del sole, il dislocamento dell'apogeo e le variazioni della più grande equazione, supposte nelle tavole, si accordano coll'esperienza.

Combinando le equazioni di condizione, come abbiamo detto, si presenta alcune volte un caso in cui si potrebbe essere imbarazzati. Egli è quello ove due delle incognite avessero in tutte le equazioni de' coefficienti con segni eguali proporzionali fra loro. Allora infatti non si potrebbe favorire una di queste incognite senza favorire ancora l'altra. In questo caso, non vi è che da considerare la riunione di questi due termini come una sola incognita, che procureremo di eliminare; poi quando le altre incognite saranno determinate, metteremo i loro valori nelle prime equazioni di condizione, allora tutto sarà conosciuto in queste, eccettuato la somma dei due termini che abbiamo riunitiin un solo. Ciò fatto divideremo la somma delle equazioni di condizione in due gruppi, ap-

presso a poco egualmente, avremo così due equazioni per determinare ciascun termine in particolare.

Il metodo che abbiamo spiegato fu immaginato dal celebre astronomo Tobia Mayer, che fu il primo ad usarlo per la formazione delle sue tavole della luna. Esso è stato quindi impiegato in tutte le determinazioni astronomiche col quale abbiamo ottenuto una grande esattezza, e bisogna convenire che esso solo può dar loro l'ultima perfezione. Questo metodo servirebbe egualmente alle ricerche della fisica e della chimica; in generale esso può servire tutte le volte che trattasi di rappresentare un gran numero di osservazioni per mezzo di formule analitiche di cui la forma è data.

Le equazioni di condizione possono ancora combinarsi per mezzo di un'altro principio che per la prima volta fu usato dal Legendre, e che egli ha chiamato il principio dei *minimi quadrati*. (*Vedi* Minimi Quadrati).

CONDORCET (Maria-Giovanni-Antonio-Niccolò Caritat, Marchese di) membro celebre dell'Accademia delle Scienze e dell'Accademia francese, nacque nel 1743 a Ribemont presso Saint-Quentin, in Piccardia. Fece i suoi studj nel collegio di Navarra, ove era stato collocato dal vescovo di Lizieux, suo zio. I suoi genitori credettero di riconoscere in lui un'attitudine particolare per le matematiche e diressero in conseguenza i suoi studj verso questa scienza, intorno alla quale sostenne, in età di sedici anni, una tesi che riscosse gli applausi di d'Alembert, di Clairaut, e di Fontaine, in presenza dei quali fu sostenuta. Un tal successo decise della sua sorte, e fin d'allora prese la risoluzione di darsi allo studio di una scienza, nella quale l'approvazione di dotti così distinti doveva veramente sembrargli di un favorevole augurio. Ma sventuratamente Condorcet non si limitò al effettuare questa risoluzione: invidiò una gloria forse più brillante ma meno durevole, e si gettò con ardore in una carriera nella quale dovè soccombere, vittima dei falsi principj che egli stesso aveva potentemente contribuito a far trionfare.

Uscendo dal collegio, Condorcet venne a fermare stanza a Parigi, ove la protezione del duca di La Rochefoucault gli procurò i mezzi di prodursi onorevolmente nella società. Strinse allora amicizia coi più celebri geometri di quel tempo e particolarmente con Fontaine, di cui si propose di estendere le idee nel suo *Saggio sul calcolo integrale*, cui pubblicò nel 1765. Questa memoria, presentata all'Accademia delle Scienze fino dall'anno precedente, fu giudicata degna di entrare nella raccolta dei lavori de' dotti stranieri, non che quella che scrisse nel 1767 sul *Problema de' tre corpi*: e questi primi saggi gli aprirono l'adito a quella dotta Società, nella quale fu ricevuto nel 1769. Fu allora che Condorcet si legò più intimamente coi membri principali della setta enciclopedica, della quale divenne in breve uno degli adetti più appassionati. Egli era abbastanza giovane per poter raccogliere l'eredità de' suoi maestri, che, più felici di lui, non videro le procelle che la popolarità della loro sciagurata filosofia suscitò in Francia. Condorcet fu infatti l'ultimo scrittore di qualche vaglia intellettuale, che l'empirismo filosofico del XVIII secolo conservasse nell'Accademia delle Scienze. Senza dubbio il suo spirito non vi è morto con lui; esso vi ha ancora numerosi partigiani: ma la loro collera impotente male vi protegge, contro i progressi crescenti della ragione, una filosofia desolatrice, la cui funesta missione è fortunatamente terminata. Sulle rovine intorno ad essa ammassate, lo spirito umano getta oggi le basi di un monumento più durevole. La sua impresa sarà forse lunga e penosa, e quelli che apportano a questo gran lavoro la porzione del loro talento e della loro generosa convinzione debbono anticipatamente conoscere le difficoltà dell'opera alla quale si sono dedicati. Infatti, la filosofia del XVIII secolo, che, pretendendo di esercitare l'autorità de' suoi precetti soltanto contro

l'ignoranza e contro i pregiudizj, ha vilipeso le credenze più rispettabili, confuso i principj di tutte le cose, e gettata l'umanità in un falso sentiero, non ha oggi altro refugio che nell'ignoranza e nei pregiudizj.

I lavori scientifici di Condorcet non sono di primo ordine: ha scritto parecchie memorie su varie parti di analisi, le quali dimostrano un ingegno perspicace, ma trascurò sempre di dar loro applicazioni utili, contentandosi di presentar belle formule, senza particolarizzarle; così è stato detto non senza ragione da uno de' suoi contemporanei, che le sue vedute hanno potuto esser nuove senza aver prodotto alcuna scoperta; poichè egli si è limitato quasi interamente a considerazioni generali, che hanno avuto anch'esse bisogno di essere sviluppate. Il soggetto di cui si è maggiormente occupato è il calcolo differenziale e integrale, nel quale ha cercato di sostituire varie considerazioni di un genere affatto nuovo all'ipotesi degl'infinitamente piccoli. Nelle memorie dell'Accademia di Parigi, di Berlino, di Pietroburgo, di Torino e dell'Istituto di Bologna si leggono parecchi suoi scritti sull'applicazione delle serie alla risoluzione di ogni specie di equazioni differenziali, sull'integrazione delle equazioni a differenze e differenziali, sulla resistenza dei fluidi, sui metodi di approssimazione, e sulle condizioni d'integrabilità. Nel 1777 riportò il premio dell'Accademia di Berlino sulla teoria delle comete. Ma Condorcet si è acquistata una maggior celebrità per gli elogi degli accademici che egli ha composto, e per altri lavori di letteratura e di economia politica di cui non ci è permesso di occuparci.

È noto che Condorcet si avvelenò nel 28 Marzo 1794 per sottrarsi alla scure rivoluzionaria. I suoi errori furono troppo crudelmente espiati coi suoi infortuni per potergli ricusare una lacrima di pietà. Dotato di uno spirito vivace e penetrante, di una istruzione profonda, di una facilità straordinaria al lavoro, era chiamato dalle più felici disposizioni ad occupare tra i geometri un seggio più distinto di quello nel quale è collocato. I suoi principali scritti scientifici sono: I *Essai d'analyse*, Parigi, 1768, in 4: questa raccolta comprende il suo *Traité du calcul intégral*, e la sua memoria *Sur le problème des trois corps*, scritti che erano stati già pubblicati separatamente; II *Essai sur l'application de l'analyse aux probabilités des décisions rendues à la pluralité des voix*, Parigi, 1785, in-4; questo scritto è stato rifuso interamente e pubblicato di nuovo col seguente titolo: *Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard, à la loterie et au jugement des hommes, avec un discours sur les avantages des mathématiques sociales, et une notice sur M. de Condorcet*, Parigi, 1804, in-8; III *Moyen d'apprendre à compter sûrement et avec facilité*, Parigi, anno VII (1799), in-12: opera nuova, profonda, e di eccellente logica. L'autore vedendo quanto una nomenclatura metodica aveva facilitato i progressi della chimica moderna, volle procurare il medesimo vantaggio all'aritmetica; ma le sue innovazioni non furono adottate, e si continuò ad usare le parole *vingt*, *quatre-vingts* e *quatre-vingt-dix*, invece di *duonte*, *octante* e *nonante*, cui voleva sostituirvi. Si trovano di lui ancora molti articoli nell'*Enciclopedia*, nel *Giornale d'Istruzione pubblica*, nel *Magazzino enciclopedico* e in altre raccolte. Si rinverranno altre notizie intorno alla sua vita ed ai suoi scritti nella *Biografia universale* e nella *Francia letteraria* di Quérard.

CONFIGURAZIONE (*Astron.*). Situazione dei pianeti gli uni rapporto agli altri. *Vedi* Aspetto.

Questa parola si applica principalmente ai satelliti di Giove, che non potrebbero distinguersi gli uni dagli altri senza il soccorso di una figura in cui fossero indicate le loro posizioni respettive. L'almanacco intitolato: *La Connaissance des temps* contiene le configurazioni dei satelliti di Giove per ogni giorno dell'anno.

Una volta si faceva uso di uno strumento chiamato *Giovilabio* (Si veda nel

Dizionario questa parola), per trovare queste *configurazioni*; ma Delambre ha dato nella *Connaissance des temps* per l'anno 1808 delle tavole che somministrano il mezzo di far di meno di questo strumento.

Lalande ha immaginato uno strumento simile al giovilabio, per trovare le configurazioni dei satelliti di Saturno: si trova esso descritto ed inciso nel suo *Trattato di Astronomia.*

CONGIUNTA. Regola congiunta (*Aritm.*). Operazione il di cui oggetto è quello di determinare il rapporto di due numeri, i di cui rapporti con altri numeri sono conosciuti.

La regola congiunta è ancora un'applicazione delle proprietà dei rapporti geometrici, e il seguente esempio ci farà comprendere il suo metodo e la sua esecuzione.

ESEMPIO

Si domanda 36 tese inglesi a quanti metri sono equivalenti. Si sa che 59 tese francesi eguivalgono a 115 metri, e che 76 tese francesi sono equivalenti a 81 tese inglesi.

Per risolvere questa questione, vediamo che basta di cercare il rapporto della tesa inglese al metro, poichè conosciuto una volta questo rapporto, moltiplicandolo per 36 avremo il valore di 36 tese espresse in metri.

Ora, 76 tese francesi valgono 81 tese inglesi; il rapporto della tesa francese alla tesa inglese è perciò eguale a 76 : 81, o, ciò che è la medesima cosa.

$$\text{una tesa francese vale } \frac{81}{76} \text{ tese inglesi.}$$

D'altra parte, il rapporto della tesa inglese al metro essendo quello di 59:115, ancora

$$1 \text{ tesa francese vale } \frac{115}{59} \text{ metri.}$$

Ma i valori della tesa francese dovendo essere equivalenti fra loro, si ha

$$\frac{81}{76} \text{ tese inglesi sono equivalenti a } \frac{115}{59} \text{ metri.}$$

Dunque il rapporto della tesa inglese al metro è quello dei numeri $\frac{81}{76}$, $\frac{115}{59}$;

ovvero, ciò che significa la medesima cosa, una tesa inglese vale $\frac{76 \times 115}{59 \times 81}$ metri.

Bisogna dunque moltiplicare 36 per $\frac{76 \times 115}{59 \times 81}$ per avere il valore di 36 tese inglesi in metri.

Per il consueto, si dispongono i rapporti come segue, x essendo il numero cercato.

x metri : 36 tese inglesi,
81 tese inglesi : 76 tese francesi,
59 tese francesi : 115 metri.

Vale a dire che ciascuno *antecedente* deve essere della medesima specie del

conseguente del rapporto precedente. Ora il prodotto degli antecedenti à eguale a quello dei conseguenti, perchè questi rapporti danno le proporzioni

1 metro	:	1 tesa inglese	: :	x :	36
1 tesa inglese	:	1 tesa francese	: :	81 :	76
1 tesa francese	:	1 metro	: :	59 :	115

il prodotto delle quali dà

$$1 : 1 :: x \times 81 \times 59 : 36 \times 76 \times 115.$$

Si ha dunque

$$x \times 81 \times 59 = 36 \times 76 \times 115.$$

Donde si conclude

$$x = \frac{36 \times 76 \times 115}{81 \times 59}$$

ed eseguendo i calcoli $x = 66$ metri, con piccola differenza.

La regola consiste perciò a disporre i rapporti in modo che dopo avere scritto subito quello che vogliamo trovare, ciascuno antecedente del rapporto seguente sia della medesima specie dell'ultimo conseguente; ciò fatto, si forma il prodotto di tutti gli antecedenti e quello di tutti i conseguenti, quindi si divide l'ultimo prodotto pel primo: il quoziente dalla divisione è il numero domandato, o il primo antecedente della serie dei rapporti.

I negozianti usano frequentemente la regola congiunta nelle operazioni di cambio; e quantunque possano presentarsi una moltitudine di casi differenti, un esempio basterà per indicare il metodo sempre uniforme di questi calcoli.

ESEMPIO

Un negoziante di Colonia vuole rimettere 1000 franchi a Parigi, e non trovando a Colonia della Lettera sopra a Parigi ad un conveniente interesse, vuole comprarla a Francfort. Il cambio di Francfort sopra a Parigi è a 76; e la Lettera sopra Francfort perde a Colonia $\frac{1}{2}$ per cento. Si sa di più che il *rixdaler* di Francfort è diviso in 90 *kreutzers*, e che 138 *kreutzers* vagliono 115 *stuvers* di Colonia, che in quest'ultima città, 60 *stuvers* vagliono un *rixdaler*; e che infine 80 franchi sono equivalenti a 81 Lire tornesi. Si domanda quanti rixdalers il negoziante deve rimettere a Francfort per pagare 1000 franchi.

Dopo avere osservato che il cambio di Francfort per Parigi è a 76, ciò significa che 100 scudi tornesi o 300 lire tornesi equivalgono a 76 rixdalers, e che dopo la perdita del $\frac{1}{2}$ per cento della Lettera di Francfort sopra Colonia, 100 rixdalers di Francfort non ne vagliono che 99 $\frac{1}{2}$ a Colonia; quindi disporremo i nostri rapporti come segue per la regola data di sopra.

x rixdalers di Colonia	=	1000 franchi.
80 franchi	=	81 lire tornesi.
300 lire tornesi	=	76 rixdalers di Francfort.
100 rixdalers di Francfort	=	99,5 a Colonia.
1 rixdaler di Francfort	=	90 kreutzers.
138 kreutzers	=	115 stuvers.
60 stuvers	=	1 rixdaler di Colonia.

Eseguendo le moltiplicazioni, e dividendo il prodotto degli antecedenti per quello dei conseguenti, avremo

$$x = \frac{1000 \times 81 \times 76 \times 99,5 \times 90 \times 115 \times 1}{80 \times 300 \times 100 \times 1 \times 138 \times 60}.$$

Donde $x = 319$ rixdalers e 1 ½ stuvers: tale è dunque la somma con la quale il negoziante avrà a Francfort 1000 franchi sopra Parigi. Questi calcoli che sono quasi sempre di un'eccessiva lunghezza, si ridurrebbero a semplici addizioni, se si volesse impiegare i logaritmi, ma l'uso del commercio è più forte della ragione.

CONGIUNZIONE (*Astron.*). Incontro di due astri o di due pianeti in uno stesso punto dell'ecclittica.

La *congiunzione* può essere o *vera* o *apparente*. È *vera*, quando i due astri hanno una stessa latitudine ed una stessa longitudine: è *apparente*, quando, avendo la stessa longitudine, le loro latitudini sono differenti. Si dividono pure le congiunzioni in *eliocentriche* e in *geocentriche*. Le prime sono quelle che si osserverebbero se fossimo nel sole; le seconde sono le congiunzioni vedute dalla terra.

Le congiunzioni geocentriche dei pianeti sono *inferiori* o *superiori*; le prime avvengono quando i pianeti sono tra la terra e il sole, le seconde quando il sole è tra la terra e i pianeti. È evidente che i soli pianeti Mercurio e Venere, essendo più vicini al sole di quello che lo è la terra, possono avere delle congiunzioni *superiori* e delle congiunzioni *inferiori*; mentre che gli altri pianeti non hanno che congiunzioni *superiori*.

Le *grandi congiunzioni* sono quelle in cui più pianeti sono veduti, se non nel medesimo punto dello zodiaco, almeno molto vicini l'uno all'altro. Tale, per esempio, fu quella che ebbe luogo nel Febbrajo 1524: Venere, Marte, Giove e Saturno erano vicinissimi l'uno all'altro, e Mercurio non era distante da questo gruppo che di 16°. Il 17 Marzo 1725, Mercurio, Venere, Marte, e Giove erano tanto prossimi che potevano scorgersi insieme collo stesso telescopio.

La congiunzione è il primo *aspetto* (Si veda nel Dizionario questa parola), come l'opposizione è l'ultimo.

Le osservazioni delle congiunzioni di Mercurio e di Venere col sole sono importantissime per l'astronomia. Se ne è fatto uso vantaggiosamente per determinare con esattezza la parallasse del sole e per conseguenza la sua distanza dalla terra. *Vedi* Passaggi sul Sole.

La luna si trova tutti i mesi in congiunzione col Sole, ed a questa congiunzione si dà il nome di *novilunio* o *luna nuova*. Quando la congiunzione è perfetta, vale a dire quando essa ha luogo nei nodi dell'ecclittica, o in vicinanza di questi nodi, vi è ecclisse di sole, perchè la terra, la luna e il sole si trovano in una stessa linea retta. Per la stessa ragione, se, nel momento dell'opposizione, vale a dire nel tempo del *plenilunio* o della *luna piena*, essa si trova in vicinanza dei nodi, vi è ecclisse di luna (*Vedi* Ecclisse). Le congiunzioni e le opposizioni della luna prendono il nome comune di *Sizigie*.

I Chinesi hanno nei loro annali un racconto di una congiunzione di cinque pianeti avvenuta, secondo essi, 2514 anni avanti l'era cristiana. Essi danno questo fatto come una prova della remota antichità del loro impero e della loro scienza astronomica. I calcoli di Cassini avevano collocato questa congiunzione nel numero delle favole: ma altri calcoli fatti in seguito da Muller, Desvignoles, Kirch, ec. sono più favorevoli alla pretensione chinese; ne risulta che circa 2459 anni prima di Gesù Cristo, la Luna, Giove, Saturno, Marte, e Mercurio

si trovavano l'uno in vicinanza dell'altro nella costellazione de' Pesci. Più recentemente si è trovato, facendo uso di tavole più corrette, che questa congiunzione ha dovuto aver luogo effettivamente il dì 8 Febbrajo 2461 avanti G. Cristo. È dunque certo che il fatto riferito dai Chinesi è realmente accaduto presso a poco nell'epoca in cui viene da essi fissato. Ma non è egli molto più probabile il credere che l'inserzione che essi ne hanno fatto nei loro annali dipenda piuttosto da un calcolo che da un'osservazione? E nota l'importanza che questo popolo annette alla sua pretesa antichità, e se la congiunzione fosse stata veramente osservata non potrebbe trovarsi una differenza di 53 anni tra l'epoca che essi assegnano e l'epoca reale.

CONGRUENZA (*Alg.*). Nome dato da Gauss alla relazione di due numeri ineguali, la di cui differenza è multipla di un numero intero. I numeri paragonati si chiamano *congrui*, e il numero intero che divide esattamente la loro differenza si chiama il *modulo*.

Così, 11 e 21 sono *congrui*, rapporto al modulo 5, perchè la differenza 21—11, o 10, è un multiplo di 5. Essi sono al contrario *incongrui* rapporto ad un altro modulo 7.

Ciascuno dei numeri paragonati prende il nome di *residuo* rapporto all'altro, allorchè questi numeri sono congrui, e di *non-residuo* nel caso contrario: per esempio, 11 è *residuo* di 21 rapporto al modulo 5; ed esso è *non-residuo* rapporto al modulo 7.

Il segno della congruenza si compone di tre lineette orizzontali $\equiv$; così

$$A \equiv B$$

significa che A è congruente con B, o che la differenza di questi numeri A—B, è multipla di un modulo sottinteso che indicheremo con M. Se dunque questa differenza è nM, n essendo un numero intero qualunque, la congruenza precedente equivale all'eguaglianza

$$A - B = nM;$$

aggiungendo però la condizione espressa che i quattro numeri A, B, n, M sono numeri interi, condizione che il segno $\equiv$ contiene.

I numeri paragonati, sempre interi, possono essere positivi o negativi; ma il modulo deve prendersi in una maniera assoluta, vale a dire senza segno.

Allorquando è necessario, si scrive fra due parentesi il modulo accanto alla congruenza, in questa maniera

$$A \equiv B \ (mod.\ M).$$

Esponiamo attualmente i principii fondamentali delle congruenze; principii sopra i quali riposa tutta la *Teoria dei numeri*. *Vedi* questa parola.

1. Due numeri differenti e congruenti nel medesimo tempo ad un terzo numero, sono congrui fra loro, il modulo essendo sempre il medesimo.

Infatti le due congruenze

$$A \equiv C, \ B \equiv C$$

sono la medesima cosa che le eguaglianze

$$A - C = nM, \ B - C = mM,$$

n ed m essendo numeri interi; ma sottraendo la seconda dalla prima, abbiamo

$$A - B = (n - m)M$$

e per conseguenza

$$A \equiv B,$$

poichè $n-m$ è necessariamente un numero intero.

2. Il modulo supponendosi il medesimo, se si hanno più congruenze

$$A \equiv B, \quad C \equiv D, \quad E \equiv F, \text{ ec.}$$

la loro somma sarà egualmente una congruenza; vale a dire che avremo

$$A+C+E+\text{ ec.} \equiv B+D+F+\text{ ec.}$$

verità che si dimostra facilmente.

Si avrà egualmente

$$A-C \equiv B-D$$

$$A-C-E-\text{ ec.} \equiv B-D-F-\text{ ec.}$$

3. Allorchè si moltiplicano i due termini di una congruenza per un medesimo numero intero, i prodotti sono ancora congrui. Così, p essendo un numero intero qualunque, la congruenza

$$A \equiv B$$

dà un' altra congruenza

$$pA \equiv pB,$$

seguendo il medesimo modulo

4. Se si moltiplicano più congruenze termine a termine i prodotti saranno congrui. Siano

$$A \equiv B, \quad C \equiv D,$$

avremo

$$A \times C \equiv B \times D.$$

Infatti, indicando con m ed n i fattori che danno

$$A-B = mM, \quad C-D = nM,$$

si ha

$$A = B+mM, \quad C = D+nM$$

e moltiplicando

$$A \times C = (B+mM)(D+nM),$$

ovvero

$$A \times C = B \times D + BnM + DmM + mnMM.$$

Quest' ultima eguaglianza dà

$$A \times C - B \times D = (Bn+Dm+mnM)M.$$

Ora, la quantità racchiusa fra le parentesi essendo necessariamente un numero intero, si ha definitivamente

$$A \times C \equiv B \times D.$$

5. Seguirebbe lo stesso per un numero qualunque di congruenze, vale a dire, che avendo

$$A \equiv B, \quad C \equiv D, \quad E \equiv F, \quad G \equiv H, \text{ ec.}$$

si ha ancora

$$A \times C \times E \times G, \text{ ec.}, \equiv B \times D \times F \times H \text{ ec.}$$

6. Prendendo tutti i numeri A, C, E, G, ec., eguali fra loro, come pure tutti i numeri B, D, F, H, ec. Si ha

$$A^i \equiv B^i$$

i essendo il numero intero che esprime la quantità dei fattori uguali. Così, quando due numeri sono congrui, tutte le potenze di questi numeri lo sono egualmente.

7. Indicando per a, b, c, d, ec., dei numeri interi positivi, e per X una funzione qualunque della variabile x, di cui la forma sia

$$Ax^a+Bx^b+Cx^c+Dx^d+\text{ec.}$$

A, B, C, D, ec., essendo numeri interi qualunque positivi o negativi, se in luogo di x si mettono successivamente dei numeri interi congrui fra di loro secondo lo stesso modulo, i valori che ne risulteranno per X saranno congruenti fra loro.

Poichè dopo ciò che precede (n.^{i} 3 e 6) p e q essendo numeri congrui, si ha

$$Ap^a \equiv Aq^a, \quad Bp^b \equiv Bq^b, \quad Cp^c \equiv Cq^c, \text{ ec.}$$

e, (n.° 2),

$$Ap^a+Bp^b+Cp^c+\text{ec}\ldots \equiv Aq^a+Bq^b+Cq^c+\text{ec.}$$

8. In ogni congruenza possiamo aggiungere o togliere, tanto dai due termini nel medesimo tempo; quanto solamente da uno di loro, dei multipli qualunque del modulo, vale a dire avendo la congruenza

$$A \equiv B$$

e p e q essendo dei numeri interi, i numeri compresi sotto le forme $A+pM$, $A-pM$, da una parte, e $B+qM$, $B-qM$, dall'altra, sono tutti congruenti fra loro.

9. Le congruenze si classano come le equazioni, secondo il più alto grado delle indeterminate che entrano nella loro composizione: così y essendo un numero intero indeterminato,

$$Ay \equiv B,$$

è la forma generale delle congruenze del primo grado.

Risolvere una congruenza, significa trovare il valore o i valori dell'indeterminata che possono soddisfarla, così M essendo il modulo, e x un numero intero, siccome questa congruenza equivale all'equazione

$$Ay-B=xM,$$

donde si deduce

$$\frac{Ay-B}{M}=x,$$

così tutti i numeri interi, che messi in luogo di y, daranno per x un numero egualmente intero, risolveranno la congruenza. Dunque trovare la radice della congruenza

$$Ay \equiv B,$$

e risolvere l'equazione indeterminata

$$Ay-B=xM,$$

sono una medesima cosa, allorchè non consideriamo che numeri interi positivi o negativi i quali soddisfanno all'equazione.

10. L'equazione indeterminata precedente che equivale a

$$Ay = xM + B,$$

non è generalmente risolubile in numeri interi, che allorquando i fattori A ed M sono primi fra loro. Se questi fattori avessero un divisore comune, l'equazione non ammetterebbe più una soluzione generale, se non che nel caso in cui il termine assoluto B fosse questo medesimo divisore: allora dividendo tutti i termini dell'equazione per B, si riporterebbe al caso in cui i fattori delle indeterminate sono primi fra loro.

Infatti, se A e M non sono primi fra loro, sia D il massimo comune divisore di questi due numeri, avremo

$$A = pD, \text{ e } M = qD.$$

p e q essendo numeri primi fra di loro; l'equazione diverrà dunque

$$pDy = qDx + B$$

ovvero

$$py = qx + \frac{B}{D},$$

ed è evidente che x ed y non potranno essere numeri interi, quando non lo sia ancora $\frac{B}{D}$, vale a dire quando B non sia divisibile per D. In quest'ultimo caso, sia $\frac{B}{D} = r$, l'equazione sarà riportata a

$$py = qx + r,$$

caso del quale diamo la soluzione.

11. Sia l'equazione generale

$$Ny = Mx + O$$

nella quale N ed M sono numeri primi fra loro e tali che $N < M$; trasformiamo $\frac{M}{N}$ in frazione continua (*Vedi* Continuo), avremo

$$\frac{M}{N} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \text{ec.} \ddots + \cfrac{1}{a_i}}}}}$$

Costruiamo con le quantità a_1, a_2, a_3, ec. . . . . a_i i due sistemi delle quantità

$P_1 = a_1$	$Q_1 = 1$
$P_2 = a_2 P_1 + 1$	$Q_2 = a_2$
$P_3 = a_3 P_2 + P_1$	$Q_3 = a_3 Q_2 + Q_1$
$P_4 = a_4 P_3 + P_2$	$Q_4 = a_4 Q_3 + Q_2$
ec. = ec.	ec. = ec.
$P_i = a_i P_{i-1} + P_{i-2}$	$Q_i = a_i Q_{i-1} + Q_{i-2}$

I valori delle indeterminate x ed y saranno

$$x = zQ_i + Q_{i-1}O(-1)^{i+1}$$
$$y = zP_i + P_{i-1}O(-1)^{i+1}$$

z essendo un numero intero arbitrario.

La deduzione di questi valori è troppo lunga per poter trovar luogo qui; ma si verificano in una maniera generale e senza alcuna difficoltà, poichè, moltiplicando la prima per P_i e la seconda per Q_i, si ottiene

$$P_i x = P_i Q_i z + P_i \cdot Q_{i-1}O(-1)^{i+1}$$
$$Q_i y = P_i Q_i z + P_{i-1}Q_i O(-1)^{i+1}$$

e sottraendo la seconda egualianza dalla prima,

$$P_i x - Q_i y = [P_i Q_{i-1} - P_{i-1}Q_i]O(-1)^{i+1}.$$

Ora dalle proprietà delle frazioni continue, si ha

$$P_i = M, \quad Q_i = N$$

e

$$P_i Q_{i-1} - P_{i-1}Q_i = (-1)^i.$$

Sostituendo questi valori nell' ultima eguaglianza, essa diventa

$$Mx - Ny = O(-1)^{2i+1},$$

ma qualunque sia i, $2i+1$ è un numero impari, e perciò $(-1)^{2i+1} = -1$.

Così i valori generali, dati per x ed y, riportano all' equazione

$$Ny = Mx + O,$$

e conseguentemente la risolvono in tutta la sua generalità.

12. Per far conoscere l' applicazione di queste formule, proponiamo le seguenti questioni.

Problema I. *Trovare un numero tale che dividendolo per* 39, *si abbia* 16 *per resto*, e *che dividendolo per* 56 *si abbia* 27.

Indicando con x ed y i quozienti interi del numero domandato diviso successivamente per 39 e per 56, avremo, questo numero essendo indicato con X.

$$X = 39y + 16, \quad e \quad X = 56x + 27 \quad . \; . \; . \; (a)$$

e per conseguenza,

$$39y + 16 = 56x + 27.$$

Sottraendo 16 dai due membri di questa equazione, per riportarla alla forma generale del numero precedente, essa diventerà

$$39y = 56x + 11$$

ed avremo

$$N = 39, \; M = 56, \; O = 11.$$

trasformando $\frac{M}{N}$ o $\frac{56}{39}$, in frazione continua, troveremo

$$\frac{56}{39} = 1, \text{ resto } 17; \text{ donde } a_1 = 1$$

$$\frac{39}{17} = 2, \text{ resto } 5; \text{ donde } a_2 = 2$$

$$\frac{17}{5}=3, \text{ resto } 2; \text{ donde } a_3=3$$

$$\frac{5}{2}=2, \text{ resto } 1; \text{ donde } a_4=2$$

$$\frac{2}{1}=2, \text{ resto } 0; \text{ donde } a_5=2$$

da ciò otterremo

$$\begin{array}{ll} P_1=1 & Q_1=1 \\ P_2=3 & Q_2=2 \\ P_3=10 & Q_3=7 \\ P_4=23 & Q_4=16 \\ P_5=56 & Q_5=39 \end{array}$$

e infine

$$x=39z+176$$
$$y=56z+253$$

Ma x ed y sono in questo caso delle incognite ausiliari, e per avere il vero numero domandato, bisogna sostituire nell'equazioni (a), per x ed y i loro valori. Avremo; servendoci solamente della seconda

$$X=56(39z+176)+27$$

e riducendo

$$X=2184z+9883.$$

z essendo un numero intero qualunque, possiamo dargli tutti i valori positivi da 1 fino all'infinito, ed otterremo per X dei numeri interi i quali soddisfaranno all'enunciato del problema; ma se diamo a z dei valori negativi, non potremo superare -4; poichè facendo $z=-5$, il valore di X sarebbe negativo. Ora facendo $z=-4$, si ha

$$X=1147$$

dunque 1147 è il più piccolo de' numeri che risolvono il problema.

Problema II. Risolvere la congruenza

$$52y \equiv -32 \text{ (mod. } 60).$$

Questa congruenza è la medesima cosa dell'equazione indeterminata

$$52y+32=60x$$

ovvero

$$52y=60x-32$$

riportandola alla forma generale.

I fattori di x e di y non essendo primi fra loro, cerchiamo il loro massimo comun divisore (*Vedi* questa parola); questo divisore è 4, che divide egualmente il numero assoluto 32: così l'equazione è solubile in numeri interi. Dividendo tutti i termini per 4, essa diventa

$$13y=15x-8$$

operando sopra $\frac{15}{13}$, troveremo $a_1=1, a_2=6, a_3=2$, e quindi

$$\begin{array}{ll} P_1=1 & Q_1=1 \\ P_2=7 & Q_2=6 \\ P_3=15 & Q_3=13 \end{array}$$

Abbiamo dunque, a motivo di $O = -8$ e di $(-1)^4 = +1$,

$$x = 13z - 48$$
$$y = 15z - 56.$$

Se non vogliamo avere per x ed y che numeri interi e positivi, non bisogna prendere per z che numeri positivi maggiori di 3, facendo dunque successivamente $z = 4$, $z = 5$, $z = 6$, ec., avremo la serie dei valori

$$x = 4, \quad y = 4$$
$$x = 17, \quad y = 19$$
$$x = 30, \quad y = 34$$
$$x = 43, \quad y = 49$$
$$\text{ec.} \ldots\ldots \text{ec.}$$

dei quali ciascuna coppia soddisfà all'equazione $52y = 60x - 32$.

È facile accorgersi che i valori successivi di x ed y formano delle progressioni aritmetiche, e che basta conoscere due di questi valori per avere la differenza della progressione, e continuarla all'infinito con semplici addizioni.

13 Le congruenze del primo grado possono, come le equazioni, contenere più incognite, e per risolverle, bisogna allora avere tante congruenze indipendenti quante incognite. Ma questa risoluzione, che forma la parte più importante dell'*analisi indeterminata* (*Vedi* Indeterminato), non può entrare nel piano di questo Dizionario. Manderemo perciò alla *Teoria dei numeri* di Legendre, e soprattutto alle *Ricerche aritmetiche* di Gauss. Dobbiamo a quest'ultimo geometra l'introduzione nella scienza della notazione e dell'idea delle congruenze; egli è ancora il primo, che abbia dato una forma sistematica a questa branca importante dell'algebra, chiamata *Teoria dei numeri* (*Vedi* questa parola), nella quale egli ha fatto numerose e importanti scoperte.

CONICO (*Geom.*). Si chiama così tutto quello che ha rapporto al cono: *superficie conica*, *sezione conica*, ec.

Sezioni coniche. Linee curve che danno le sezioni di un cono per mezzo di un piano. La scoperta delle sezioni coniche attribuita per molto tempo a Platone sembra, secondo il professor Libri *histoire des sciences mathématiques en Italie* Parigi 1838, debba piuttosto esser divisa fra Eudosso di Cnyde e Archita. Vi sono quattro specie differenti di sezioni coniche, sono il *circolo*, l'*ellisse*, la *parabola* e l'*iperbola*.

Si chiama *cono retto* la superficie generata da una retta indefinita, che gira intorno di una retta fissa, senza cessare di passare per un medesimo punto di questa linea, e di fare con essa il medesimo angolo. La retta mobile si chiama la *generatrice* del cono, la retta fissa ne è l'*asse*, e il punto pel quale passa costantemente la generatrice ne è il *vertice*. Siccome la generatrice è illimitata da ciascun lato, ne segue che la superficie conica è composta di due parti o *nappe* perfettamente simili, situate da una parte e dall'altra del vertice.

Dalla generazione del cono risulta che ogni piano perpendicolare all'asse taglia questa superficie seguendo un circolo, e che ogni piano condotto per l'asse la taglia seguendo due generatrici, che fanno fra loro un angolo doppio dell'angolo costante formato dalla generatrice coll'asse.

Lasciando da parte tutti i casi particolari, cioè quando si ottiene un triangolo, il che ha luogo tutte le volte che il piano secante passa pel vertice, e un punto, il che si ottiene quando il piano secante passa pel solo vertice, proponiamoci di ricercare le differenti curve che si ottengono tagliando un cono retto per mezzo di un piano, e le quali si chiamano *sezioni coniche*.

Sia MAN (*Tav.* LXXX, *fig.* 4) la curva della quale si tratta: per l'asse VV' conduciamo un piano perpendicolare a quello di questa curva; esso taglierà il cono seguendo due generatrici opposte RSR', TST', e il piano di MAN seguendo una retta Ax che prenderò per la linea delle ascisse. Da un punto qualunque della curva abbasso l'ordinata rettangolare MP: indico AP per x, MP per y, si tratta di trovare una relazione fra x ed y.

Vi sono tre casi da considerare, secondo che Ax incontra la generatrice TT' sopra la medesima nappa di RR', o che l'incontra sopra la nappa opposta, o che gli è paralella.

1.° Caso. Per i punti A e B, ove Ax incontra le due generatrici SR, ST, si conduca AC, BD, perpendicolari all'asse SV, e si faccia AB$=2a$, BD$=2c$, AC$=2d$. Pel punto P conduco ancora EF. Questo piano sarà perpendicolare all'asse, e taglierà per conseguenza il cono seguendo un circolo EMF, che avrà EF per diametro.

L'ordinata MP essendo perpendicolare ad Ax, e situata nel piano MAN perpendicolare al piano ASB, dev'essere essa medesima perpendicolare a quest'ultimo piano; dunque essa fa un angolo retto col diametro EF; si ha perciò

$$y^2 = \mathrm{EP} \times \mathrm{PF}.$$

Ma i triangoli simili AEP, ADB, danno

$$\mathrm{EP} : x :: 2c : 2a,$$

donde

$$\mathrm{EP} = \frac{cx}{a};$$

e i triangoli simili BFP BCA, danno

$$\mathrm{PF} : 2a - x :: 2d : 2a$$

donde

$$\mathrm{PF} = \frac{d(2a-x)}{a}.$$

Per conseguenza l'equazione della sezione conica, sarà

$$y^2 = \frac{cd}{a^2}(2ax - x^2);$$

dunque *questa sezione conica è un'ellisse* (*Vedi* Ellissa).

Osservazioni. I. Indicando il grand'asse di un'ellisse per 2A, e il piccolo asse per 2B, se si riporta quest'ellisse al suo grand'asse e ad una perpendicolare elevata da uno de' vertici, l'equazione di questa curva è (*Vedi* Ellissa).

$$y^2 = \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}(2\mathrm{A}x - x^2).$$

Paragonandola alla precedente, vediamo che il grand'asse della sezione conica è eguale $2a$, che il piccolo asse è eguale a $2\sqrt{cd}$, e che per conseguenza la distanza dei due fuochi è $2\sqrt{a^2-cd}$.

Si abbassi AG perpendicolare sopra BD; si avrà BG$=c+d$, e il triangolo ABD darà

$$\overline{\mathrm{AD}}^2 = 4a^2 + 4c^2 - 4c(c+d) = 4a^2 - 4cd;$$

dunque AD$=2\sqrt{a^2-cd}$, distanza eguale a quella dei fuochi.

Così, conviene osservare *che, nell' ellisse risultante dalla sezione del cono, il grand' asse è eguale* AB, *che il piccolo asse è medio proporzionale fra* AC *e* BD, *e che l' eccentricità è eguale ad* AD

II. S' inseriva un circolo nel triangolo ASB, e sieno H, I, e K, i punti di contatto con i tre lati. È facile vedere che si ha

$$AH = AI, \quad BH = BK, \quad SI = SK.$$

Quindi si ha $CK = AI = AH$. Ora $BK - CK = BC$; dunque $BH - AH = BC$; dunque ancora, prendendo $BH' = AH$, si avrà $BH - BH' = HH' = BC$. Siccome abbiamo veduto che la distanza de' due fuochi dell' ellisse è eguale a BC o AD; perciò *i punti* H *e* H' *sono i due fuochi.*

Del rimanente, il fuoco H' è ancora determinato dal circolo descritto al di sotto di AB tangenzialmente alle tre medesime linee AB, AR, BT. Infatti se supponiamo che H', I', K', sieno i punti di contatto, si ha $BH' = BK' = DI'$. Per conseguenza $AH' - BH' = AI' - DI' = AD$; dunque H' è l'altro fuoco.

Se si conduce IL paralella ad AC, il triangolo AIL sarà simile ad ABD, ed avremo

$$AL : AB :: AI : AD.$$

Sia O il mezzo di AB: si ha $AB = 2OA$, $AD = 2OH$, $AI = AH$; dunque, invece della precedente proporzione, possiamo scrivere

$$AL : OA :: AH : OH,$$

ovvero, *componendo*

$$OL : OA :: OA : OH,$$

donde

$$OL \times OH = \overline{OA}^2.$$

Similmente, se si conduce K'L' paralella a BD, si trova $OL' \times OH' = \overline{OA}^2$.

Allora, confrontando questi risultamenti con quelli ottenuti nell' ellisse (*Vedi* Ellissa), *si conclude che i punti* L *e* L' *sono i piedi delle due direttrici*

III. Se il piano secante si muove paralellamente a se medesimo, i triangoli ADB, ACB, conserveranno i medesimi angoli; dunque il rapporto $\sqrt{\frac{cd}{a}}$, che è quello degli assi dell' ellisse rimarrà costante. Ed è in questo che consistono le ellissi *simili.*

IV. Quando il cono e l' ellisse sono dati separatamente, si conoscono i lati AB ed AD del triangolo ABD, come pure l' angolo D. Infatti, AB è il grand' asse dell' ellisse, AD è la distanza dei fuochi, e l' angolo D è il complemento dell' angolo formato dalla generatrice del cono con l' asse. Possiamo dunque costruire il triangolo ABD, e aver quindi il punto S elevando sul mezzo di BD la perpendicolare SV. Allora è evidente che il cono retto generato dalla rivoluzione di SR intorno di SV è eguale al cono dato, e che il piano condotto per AB, perpendicolarmente al piano RSV, taglia questo cono secondo l'ellisse data; dunque *qualunque ellisse può essere situata sopra un cono dato.*

Per la natura dell' ellisse, AD è $<$ AB; d'altra parte, l' angolo ADB è acuto; dunque il triangolo ADB è sempre possibile, e la precedente conclusione non è soggetta ad alcuna eccezione.

2.° Caso. (*Tav.* LXXX, *fig.* 5). Facendo la medesima costruzione che nel primo caso, e conservando le medesime denominazioni, abbiamo sempre

$$y^2 = \overline{MP}^2 = EP \times PF.$$

Dal paragone de' triangoli simili AEP, ADB, e da quella dei triangoli BFP, BCA, che sono ancora simili, si trova

$$EP=\frac{cx}{a},\ PF=\frac{d(2a+x)}{a},$$

e quindi, viene

$$y^2=\frac{cd}{a^2}(2ax+x^2):$$

dunque *la sezione conica è un' iperbola* (*Vedi* Iperbola).

Osservazioni. I. Ponendo l' origine al vertice, l' equazione dell' iperbola è (*Vedi* Iperbola).

$$y^2=\frac{B^2}{A^2}(2Ax+x^2).$$

Da ciò si vede, che nell' iperbola situata sul cono, il primo asse è eguale a $2a$, che il secondo è eguale a $2\sqrt{cd}$, e che l' eccentricità è $2\sqrt{a^2+cd}$.

Conducendo AG perpendicolare sopra BD si trova facilmente.

$$\overline{AD}^2=4a^2+4c^2-4c(c-d)=4a^2+4cd;$$

dunque $AD=2\sqrt{a^2+cd}$, ciò prova che la distanza AD è eguale all' eccentricità.

II. Siano H, I, K, e H', I', K', i punti di contatto delle linee $x'x$, RR', TT', con i due circoli tangenti a queste linee, e compresi fra le generatrici RR' e TT', avremo $AH=AI=CK$, e quindi $BH+AH=BK+CK=BC$. Ora la linea AD o BC è eguale alla distanza de' fuochi della curva; dunque *il punto H è un fuoco*. Si ha ancora $BH'=BK'=DI'$, e quindi $AH'+BH'=AI'+DI'=AD$; dunque *il punto H' è l' altro fuoco*.

Tiriamo IL e K'L' paralelle a BD. I triangoli simili AIL, ADB, danno

$$AL : AB :: AI \text{ o } AH : AD \text{ o } HH'.$$

Sia O il mezzo della distanza AB: questa proporzione equivarrà alla seguente:

$$AL : OA :: AH : OH.$$

Per conseguenza si ha, *dividendo*,

$$OL : OA :: OA : OH,$$

donde

$$OL\times OH=\overline{OA}^2.$$

Similmente, si troverebbe $OL'\times OH'=\overline{OA}^2$; dunque (*Vedi* Iperbola) *i punti L ed L' sono i piedi delle due direttrici.*

III. Per le sezioni paralelle il rapporto de' due assi $\frac{\sqrt{cd}}{a}$ rimane costante, ed è per questo che le iperbole si dicono *simili*.

Dal rimanere costante questo rapporto, ne segue che le iperbole risultanti da queste sezioni hanno i loro asintoti paralelli. È facile riconoscere ancora che la sezione paralella, fatta pel vertice del cono, dà due generatrici paralelle a questi asintoti.

IV. Se vogliamo situare un'iperbola sopra un cono dato, si costruisce il triangolo ADB, nel quale si conosce l'angolo acuto D, il lato AD eguale alla distanza de' fuochi dell'iperbola, e il lato AB eguale all'asse traverso; si eleva quindi la perpendicolare SV sul mezzo di BD. Il cono retto che ha SV per asse e SA per generatrice è eguale al cono dato, e il piano condotto per AB, perpendicolarmente al piano ASV, taglia questo cono seguendo l'iperbola data.

Ma il lato AB essendo più piccolo di AD, il triangolo ADB non è possibile che nel caso in cui AB non sia minore della perpendicolare AG. Ora il triangolo ADG dà

$$AG = AD \text{ sen } ADG = AD \cos ASV;$$

dunque bisogna avere

$$AD \times \cos ASV < AB,$$

donde

$$\cos ASV < \frac{AB}{AD},$$

il segno $<$ non escludendo l'eguaglianza. Ma nell'iperbola data, il rapporto $\frac{AB}{AD}$ è eguale al coseno dell'angolo formato dall'asintoto col primo asse (*Vedi* Iperbola); indicando quest'angolo con p, si ha

$$\cos ASV < \cos p,$$

donde

$$ASV > p \text{ e } 2ASV > 2p.$$

Dunque *un'iperbola può situarsi sopra un cono dato, purchè l'angolo delle due generatrici opposte non sia minore di quello degli asintoti dell'iperbola.*

3.° Caso (*Tav.* LXXX, *fig.* 6). Servendosi sempre delle medesime costruzioni si ha ancora $y^2 = EP \times PF$.

Ax essendo paralella ad ST, si ha $PF = AC = 2d$; e i triangoli AEP, SAC, essendo simili, si ha, facendo $AS = f$,

$$EP : x :: 2d : f,$$

donde

$$EP = \frac{2dx}{f}:$$

quindi, l'equazione della curva è

$$y^2 = \frac{4d^2}{f} x.$$

Dunque *la sezione conica è una parabola* (*Vedi* Parabola).

Osservazioni I. Il parametro di questa parabola è eguale a $\frac{4d^2}{f}$. Ora, se dal mezzo di AC, si conduce GH perpendicolare sopra Ax, il triangolo AGH sarà simile ad AGS, ed avremo

$$AH : d :: d : f,$$

donde

$$AH = \frac{d^2}{f}:$$

AH è perciò il quarto del parametro, e per conseguenza *il punto* H *è il fuoco della parobola.*

II. Da ciò si deduce che *questo fuoco è precisamente il punto di contatto della linea* x'x *col circolo descritto fra le generatrici* RR' *e* TT', *tangenzialmente a queste due generatrici ad alla retta* x'x.

Di più, è facile di rilevare che se, pel punto di contatto di RR' col medesimo circolo, si conduce IL paralella ad AC, avremo AL = AH; dunque *la direttrice passa pel punto* L.

III. Non è necessario osservare che le parabole date da piani paralelli sono simili, per la ragione che *tutte le parabole devono essere considerate come simili.* Ciò si fonda sopra la seguente verità che, in due parabole qualunque, le rette condotte dai vertici, ed egualmente inclinate sopra gli assi, sono sempre proporzionali. La dimostrazione è troppo facile perchè sia necessario darla.

IV. Una parabola essendo data, per metterla sopra un cono dato, si costruirà il triangolo rettangolo GAH, di cui si conosce il lato AH e l'angolo GAH; quindi eleveremo GS perpendicolare sopra AG, e si farà l'angolo GAS = GAH. La superficie descritta dalla rivoluzione di SA intorno di SG sarà quella del cono dato, e il piano condotto da AH perpendicolarmente al piano ASG taglierà questo cono secondo la parabola data. Dunque *tutte le parabole possono essere situate sopra un cono dato.*

Quello che siamo principalmente in diritto di concludere da tutto quello che precede, si è *che le sezioni coniche sono curve del second'ordine*; e reciprocamente, *che le curve del second' ordine sono sezioni coniche.*

Possiamo ancora cercare le sezioni coniche con un altro metodo, che farà trovare le tre curve in una sola equazione.

Avendo fatto le medesime costruzioni che in principio, scegliamo i dati che convengono egualmente a tutte le posizioni della linea Ax (*Tav.* LXXX, *fig.* 7); e prendiamo

$$SA = d, \quad SAx = \alpha, \quad RSV = \varphi.$$

Ciò premesso; il circolo EMF dà $y^2 = EP \times PF$.

Nel triangolo APE, si ha

$$EP : x :: \text{sen } PAE : \text{sen } PEA.$$

Ora, sen PAE = sen α, sen PEA = cos φ; dunque

$$EP = \frac{x \text{ sen } \alpha}{\cos \varphi}.$$

Conduciamo AC paralella ad EF, e PH paralella a SF: il triangolo APH dà

$$AH : x :: \text{sen } APH : \text{sen } AHP.$$

Ora, sen APH = sen $(\alpha + 2\varphi)$ e sen AHP = cos φ; dunque

$$AH = \frac{x \text{ sen } (\alpha + 2\varphi)}{\cos \varphi}.$$

Il triangolo SAG dà $2AG = AC = 2d \text{ sen } \varphi$; e sottraendo AH da AC viene

$$PF = 2d \text{ sen } \varphi - \frac{x \text{ sen } (\alpha + 2\varphi)}{\cos \varphi}$$

Finalmente, sostituendo invece di EP e PF i valori trovati, si ha

$$y^2 = \frac{2d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} x - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha + 2\varphi)}{\cos^2 \varphi} x^2 \ldots (1).$$

Dunque *le sezioni coniche sono curve del second' ordine.*

Per dimostrare la proposizione reciproca, bisogna osservare in primo luogo che prendendo delle coordinate rettangolari e ponendone l'origine ad un vertice, le tre curve del second' ordine sono contenute nell' equazione

$$y^2 = 2px + nx^2 \ldots (2)$$

$2p$, indicando il parametro della curva, ed n il quadrato del rapporto del secondo asse al primo (astrazione fatta dal segno). Allora la questione riducesi a dimostrare che le quantità p, n, φ, essendo date, si può determinare per le incognite d ed α de' valori reali che rendano le equazioni (1) e (2) identiche. Eguagliando respettivamente i coefficienti di x e di x^2 nelle due equazioni, viene

$$\frac{d \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} = p \ldots\ldots (3),$$

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha + 2\varphi)}{\cos^2 \varphi} = -n \ldots\ldots (4).$$

L' equazione (3) dà per d un valore reale quando α è egualmente reale. Ma la forma dell' equazione (4) non è comoda per far conoscere quest' angolo; questo è il motivo perchè la cangeremo.

Se prendiamo le formule trigonometriche

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B,$$

sottraendo la prima dalla seconda, si trova

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A-B) - \cos(A+B).$$

Si faccia $A = \alpha + 2\varphi$, e $B = \alpha$, questa formula dà

$$2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} (\alpha + 2\varphi) = \cos 2\varphi - \cos(2\alpha + 2\varphi).$$

Per conseguenza, l' equazione (4) diviene $\cos 2\varphi - \cos(2\alpha + 2\varphi) = -2n \cos^2 \varphi$, donde

$$\cos(2\alpha + 2\varphi) = \cos 2\varphi + 2n \cos^2 \varphi.$$

Ora, $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \varphi = 2\cos^2 \varphi - 1$; dunque finalmente

$$\cos(2\alpha + 2\varphi) = 2(1+n)\cos^2 \varphi - 1.$$

Nell' ellisse, il rapporto n è negativo e < 1. Perciò ne segue che il valore precedente è compreso fra $+1$ e -1; dunque l' arco $2\alpha + 2\varphi$ è reale, e perciò lo è ancora α; dunque *un cono retto essendo dato, si può sempre tagliarlo seguendo un' ellisse data.*

Nell' iperbola, n è positivo e può avere qualunque grandezza. Se il valore di $\cos(2\alpha + 2\varphi)$ è negativo, è evidente che esso sarà più piccolo dall' unità, e per conseguenza α sarà reale. Ma non segue lo stesso allorchè questo valore è positivo: in quest' ipotesi è necessario avere

$$2(1+n)\cos^2 \varphi - 1 < 1,$$

donde

$$\cos \varphi < \sqrt{\frac{1}{1+n}}.$$

Per interpetrare questa condizione, rimettiamo invece di n il quadrato del rapporto degli assi; essa diventa

$$\cos\varphi < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Ora, se indichiamo per θ l'angolo degli asintoti con l'asse traverso, abbiamo ancora

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

dunque $\cos\varphi < \cos\theta$; dunque $\varphi > \theta$ e $2\varphi > 2\theta$. Così ritroviamo questa condizione che, per mettere un'iperbola sopra un cono retto, bisogna che, *in questo caso, l'angolo al vertice sia almeno eguale a quello degli asintoti.*

Nella parabola $n=0$, e allora l'equazione (4) dà $\operatorname{sen}\alpha=0$ o $\operatorname{sen}(\alpha+2\varphi)=0$. Il primo valore, non è ammissibile: poichè mettendolo nell'equazione (3) si avrebbe $p=0$, e l'equazione (2) non rappresenterebbe più una parabola. Dobbiamo dunque prendere $\operatorname{sen}(\alpha+2\varphi)=0$. Ora $\alpha+2\varphi$ deve essere $<360°$, dunque bisogna fare $\alpha+2\varphi=0$, ovvero $\alpha+2\varphi=180°$.

Possiamo trascurare l'eguaglianza $\alpha+2\varphi=0$, poichè essa darebbe α negativo; e quanto all'eguaglianza $\alpha+2\varphi=180°$, essa fa conoscere che la linea Ax (*Tav.* LXXX, *fig.* 7) dev'essere parallela ad ST: questo è infatti quello che deve succedere nel caso della parabola. Così *tutte le parabole possono trovarsi tagliando un medesimo cono retto con piani.*

Del rimanente tratteremo particolarmente, alle parole Ellisse, Iperbola, e Parabola, di queste curve celebri, di cui le numerose proprietà formano una delle parti più interessanti dell'estensione.

Passiamo attualmente a parlare di una *sezione anti-parallella del cono obliquo.*

Se facciamo muovere una retta in modo che essa si appoggi sempre sopra un circolo, e che passi costantemente per un punto dato, essa genera un *cono*, che ha per base il *circolo*, per *vertice* il punto dato, e per *asse* la retta condotta pel vertice, e pel centro della base. Il cono è *retto* o *obliquo*, secondo che l'asse è perpendicolare o obliquo alla base.

Un piano condotto per l'asse di un cono obliquo perpendicolarmente alla sua base, taglia il cono e la sua base secondo un triangolo che chiamasi la *sezione principale.*

Il cono obliquo egualmente del cono retto, è tagliato secondo dei circoli, da piani paralelli alla sua base; ma esso gode inoltre della proprietà di essere ancora incontrato seguendo circoli da altri piani.

Infatti, sia SAB (*Tav.* LXXX, *fig.* 8) la sezione principale di un cono obliquo, e DMC la curva prodotta dall'intersezione di questo cono con un piano perpendicolare al piano SAB. Avendo condotto MP perpendicolare sopra CD, ed EPF paralella ad AB, si conduca per EF ed MP un piano che sarà paralello alla base del cono, e che taglierà il cono secondo un circolo EMF. È facile vedere che MP è perpendicolare al diametro EF; dunque $\overline{MP}^2 = EP \times PF$.

Supponiamo che la curva DMC sia un circolo: la retta DC sarà un diametro di questo circolo, ed avremo ancora $\overline{MP}^2 = DP \times PC$; dunque $EP \times PF = DP \times PC$, ovvero

$$EP : DP :: PC : PF.$$

I due triangoli EDP, CPF, hanno dunque un angolo eguale fra lati proporzionali; per conseguenza essi sono simili, e l'angolo SCD = SEF = SAB. Quando questa condizione è adempita, egli è evidente che la sezione è un circolo.

Si conosce ancora la nuova direzione che bisogna dare ai piani secanti perchè le sezioni del cono obliquo siano ancora dei circoli. Queste sezioni sono quelle che indichiamo sotto il nome di *anti-paralelle*.

Osservazione. Qualunque sia la posizione delle linee CD ed EF, purchè esse sieno paralelle a quelle che rispondano alle due serie delle sezioni circolari, è evidente che i due triangoli EPD e CPF saranno ancora simili; dimodochè avremo sempre $EP \times PF = DP \times PC$. Da ciò con facilità si conclude che CD ed EF sono le corde di un medesimo circolo, e che le due sezioni circolari, che hanno queste linee per diametri, sono situate sopra una medesima sfera della quale il circolo massimo è precisamente quello che contiene le corde CD ed EF.

CONIO. (*Vedi* Cubo, Zeppa, Bietta.)

CONIUGATE (Ovali). Supponiamo che l'equazione di una curva sia tale da potersi ridurre alla forma $qy^2 - 2py + r = 0$, con p, q, ed r funzioni reali e razionali di x, se la risolviamo, e che sostituiamo per x in $p^2 - qr = 0$ i valori 0, 1, 2, ec., quando incontreremo zero; il che seguirà per tutti i valori di x che sono radici reali dell'equazione $p^2 - qr = 0$, avremo un'ordinata unica, la quale non potendo in tal caso attraversare la curva dovrà esserle tangente. E siccome i valori di x che sono radici reali ed ineguali dell'equazione s'incontrano ad ogni cambiamento di segno dato dalle successive sostituzioni (*Vedi* Equazione), così ogni porzione di curva seguita e preceduta da interruzione terminerà o comincerà con un'ordinata tangente. A queste separate porzioni di curva è stato dato il nome di *ovali* coniugate.

CONIUGATO (*Geom.*). Asse *coniugato* dell'ellisse o dell'iperbola. *Vedi* Asse.

Diametro *coniugato* di una sezione conica. *Vedi* Diametro.

Ovale *coniugata*. *Vedi* Coniugata *ovali*, e Ovale.

Coniugato punto. Si chiama così quel punto che rimane del tutto isolato dalla curva, questo è ciò che succede allorchè le radici di un'equazione appartenente ad una curva sono immaginarie, il che significa che vi sarà un punto senza tangente e per conseguenza del tutto isolato dai rami della curva. *Vedi* Punti multipli.

CONO (*Geom.*). Si chiama così uno dei tre corpi rotondi dei quali si occupa la geometria elementare. *Vedi* Nozioni preliminari. n.° 55.

Si chiama cono retto, il solido formato dalla rivoluzione di un triangolo rettangolo ABC (*Tav.* LXXX, *fig.* 9) attorno di uno de' suoi lati, come AC. In questa rivoluzione, il lato CB descrive un circolo BDE, che chiamasi la base del cono, e l'ipotenusa AB ne descrive la superficie convessa.

Per estendere questa definizione al *cono obliquo*, si generalizza dicendo: un cono qualunque è prodotto dalla rivoluzione di una retta soggetta a passare per un punto fisso A (*Tav.* LXXX, *fig.* 9 e 10) strisciando intorno di un circolo BDE.

Se si concepisce questa retta indefinitamente prolungata, essa descriverà nel suo moto due superficie convesse opposte al vertice, come nella fig. 11.

1. Risulta immediatamente dalla costruzione del cono retto che tutte le sezioni fatte da piani paralelli alla base, sono circoli i di cui raggi diminuiscono dalla base fino al vertice, nel rapporto medesimo delle loro distanze a questo vertice.

2. Tutte le sezioni fatte seguendo l'asse AC sono triangoli isosceli, come BAE, doppi del triangolo generatore.

3. Tutte le sezioni fatte nel cono da piani che non sono paralelli alla base, nè secondo l'asse, sono linee curve conosciute sotto il nome di Sezioni coniche. *Vedi* questa parola.

4. Si chiama *cono tronco* una porzione di cono dalla quale si è tolto la parte superiore, tagliandola con un piano paralello alla base. ACDB, (*Tav.* LXXX, *fig.* 12), è un cono tronco. Possiamo concepirlo come formato dalla rivoluzione del trapezio AFCG attorno del suo lato FG.

5. Un circolo dovendo considerarsi come un poligono regolare di un numero *infinito* di lati, tutte le proprietà de' coni possano dedursi da quelle delle *piramidi*; e questa è l'unica maniera diretta per arrivare alla conoscenza di queste proprietà: mentre cominciare dal supporle, come si fa nell'opera elementari, quindi a dimostrarle per mezzo di una conclusione all'*assurdo* (*Vedi* Assurdo), non fa conoscere in verun modo la generazione dell'idee, che le hanno fatte scoprire. In questo punto caderebbe forse in acconcio d'indicare i difetti degli *Elementi di Geometria* adottati pel pubblico insegnamento, difetti il più essenziale di questi difetti è quello di ritenere costantemente lo spirito degli alunni incatenato dalle medesime forme di ragionamento, di modo che lo studio di questa scienza, lungi dal concorrere a sviluppare l'intelligenza, arresta il suo slancio, e paralizza le sue facoltà. La maggior parte dei geometri, intiarsmente estranei ad ogni idea filosofica, hanno creduto di portare un gran *rigore* nelle loro dimostrazioni, allontanando con premura le considerazioni dell'*infinito*, e sostituendovi un'infinità di argomenti e di costruzioni, le quali però non avrebbero alcuna significazione senza questo *infinito*, che essi si sforzano sì sconciamente di allontanare. Alcuni autori elementari si sono immaginati di *dimostrare* gli *assiomi*, senza accorgersi che i loro argomanti erano molto meno evidenti che gli oggetti in discussione; e possiamo dire lo stesso di autori molto stimabili d'altra parte, i quali, dopo aver passato una gran parte della loro vita a fare e disfare la teoria delle *paralelle*, hanno presentato quindi come una bella scoperta una pretesa dimostrazione dell'eguaglianza dei tre angoli di un triangolo a due angoli retti, fondata sopra una costruzione successiva di triangoli, l'ultimo dei quali deve avere due angoli *infinitamente piccoli!* (Vedi *Geometria di Legendre*). Ma in altra parte ritorneremo sopra tutte queste questioni le quali reclamano una completa riforma. *Vedi* Geometria e Filosofia delle Matematiche.

6. Teorema. *La superficie convessa del cono retto è eguale alla metà del prodotto della circonferenza della sua base per il lato del cono.*

Si chiama lato del cono qualunque retta condotta sopra la superficie convessa dal vertice alla base.

La superficie di una piramide regolare (*Vedi* Piramide) senza comprendervi la base, è eguale alla metà del prodotto del perimetro della base per l'apotema. Ora, più la piramide ha lati, e più la differenza fra la sua costola e il suo apotema diviene piccola; e quando il numero di questi lati è infinitamente grande, caso, in cui la piramide diviene un cono, la costola e l'apotema si confondono e divengono l'una e l'altro il lato del cono: dunque la superficie convessa del cono è ancora eguale al semiprodotto del perimetro o della circonferenza della sua base per il suo lato.

Se indichiamo con r il raggio della base di un cono retto, e con h l'altezza di questo cono, il suo lato sarà.

$$\sqrt{h^2+r^2}$$

poichè, nel triangolo generatore (*Tav.* LXXX, *fig.* 9) ABC, abbiamo

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2$. Se dunque π esprime la semicirconferenza il di cui raggio è l'unità, $2\pi r$ sarà la circonferenza il di cui raggio è r, o la circonferenza della base del cono, e

$$\pi r\sqrt{h^2+r^2}$$

sarà la sua *superficie convessa*.

La superficie convessa del cono obliquo è l'oggetto di un problema difficilissimo che abbisogna dei soccorsi del calcolo differenziale. *Vedi* Quadratura.

7. Teorema. *La superficie convessa del cono tronco* ACBD (Tav. LXXX, fig. 12) *è eguale al prodotto del suo lato* AC *per la semisomma delle circonferenze delle due basi.*

Infatti, la superficie convessa del cono intero AEB è, per ciò che precede, eguale a

$$\frac{1}{2}\text{ cir. AF}\times\text{AE},$$

cir. AF indicando la circonferenza, di cui AF è il raggio, o la circonferenza della base. Egualmente la superficie convessa del cono tolto CED è eguale a

$$\frac{1}{2}\text{ cir. CG}\times\text{CE}.$$

Dunque la superficie convessa del cono tronco ACDB, differenza fra la superficie convessa del cono intero e quella del cono sottratto, è eguale a

$$\frac{1}{2}\text{ cir. AF}\times\text{AE} - \frac{1}{2}\text{ cir. CG}\times\text{CE}.$$

Ora, AE = AC+CE, possiamo mettere perciò quest'ultima espressione sotto la forma

$$\frac{1}{2}\text{ cir. AF}\times\text{AC} + \frac{1}{2}[\text{cir. AF} - \text{cir. CG}]\times\text{CE} \ldots (1);$$

Ma abbiamo, a motivo de' triangoli simili AFE, CGE,

$$\text{AF} : \text{CG} :: \text{AE} : \text{CE}$$

e per conseguenza

$$\text{cir. AF} : \text{cir. CG} :: \text{AE} : \text{CE},$$

proporzione donde si ricava

$$\text{cir. AF} - \text{cir. CG} : \text{cir. CG} :: \text{AE} - \text{CE} : \text{CE},$$

e, quindi

$$[\text{cir. AF} - \text{cir. CG}]\times\text{CE} = \text{cir. CG}\times\text{AC}.$$

Sostituendo questo valore nell'espressione (1), avremo per la superficie convessa del cono tronco l'altra espressione

$$\frac{1}{2}[\text{cir. AF} + \text{cir. CG}]\times\text{AC}$$

dunque, ec.

8. Teorema. *Il volume del cono è eguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza. Vedi* Piramide.

Indicando, come sopra, per r il raggio della base, e per h la sua altezza, la quale, nel cono retto è la medesima dell' asse, avremo, V essendo il volume,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

9. Corollario. Il volume di un cilindro essendo eguale al prodotto della sua base per la sua altezza (*Vedi* Cilindro), un cono è il terzo del cilindro della medesima base e della medesima altezza.

10. Teorema. R *essendo il raggio della base inferiore di un cono tronco,* r *il raggio della base superiore* e H *l' altezza del tronco, il volume del cono tronco è eguale a*

$$\frac{1}{3}\pi H[R^2+r^2+R\times r],$$

mentre, se h indica l' altezza del cono totale, $h-H$ sarà quella del cono sottratto, e i volumi di questi coni saranno

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h, \qquad \frac{1}{3}\pi r^2(h-H).$$

Così il volume del cono tronco, essendo la differenza di questi due volumi, sarà

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2(h-H),$$

ovvero

$$\frac{1}{3}[\pi R^2 h - \pi r^2 h + \pi r^2 H] \quad \ldots\ldots (2);$$

ma le circonferenze delle basi stanno fra loro come le altezze dei coni; abbiamo perciò

$$\pi R : \pi r :: h : h-H,$$

proporzione che dà

$$\pi rh = \pi Rh - \pi RH,$$

e quindi

$$Rh = RH + rh.$$

Sostituendo nell' espressione (2), in luogo di $\pi r^2 h$, la quantità $\pi Rrh - \pi RrH$, che è eguale, e riducendo, si ottiene

$$\frac{1}{3}\pi[R(RH-rh) - Rrh + RrH + r^2 H],$$

ovvero

$$\frac{1}{3}\pi[R^2 H + RrH + r^2 H],$$

il che è la medesima cosa della proposizione enunciata.

Risulta ancora dai teoremi precedenti:

1.° Che i coni della medesima base stanno come le respettive altezze;

2.° Che i coni delle medesime altezze stanno come le respettive basi.

11. Si chiamano *coni simili*, quelli i di cui assi stanno come i diametri delle basi respettive.

I volumi di due coni simili stanno nel medesimo rapporto dei cubi delle respettive altezze, o dei cubi dei diametri delle basi respettive.

CONOIDE. (*Geom.*). Solido formato dalla rivoluzione di una sezione conica intorno del suo asse. Questi corpi hanno diverse denominazioni secondo la natura della curva che gli genera; così, la *conoide parabolica*, che chiamasi ancora *paraboloide* (*Vedi* questa parola), risulta dalla rivoluzione della parabola; la *conoide ellettica*, o *sferoide* (*Vedi* questa parola) risulta da quella dell'elisse, e la *conoide iperbolica* (*Vedi*. Iperbolica) da quella dell'iperbola.

CONONE di Samo, astronomo e geometra celebre dell'antichità, viveva verso la CXX o la CXXX Olimpiade, circa 260 o 300 anni avanti Gesù Cristo. Nessuno degli scritti di Conone è giunto fino a noi, ma le testimonianze onorevoli di Seneca, di Virgilio, di Callimaco e di altri, e soprattutto il rammarico espresso da Archimede per la morte prematura di Conone, gli assegnano un posto distinto nella storia della scienza, e fanno riuscir grave la perdita delle sue opere. Si rileva dalla prefazione del *Trattato delle spirali* che Archimede gli aveva mandato parecchi teoremi sulla sfera e sul cono, e sebbene Conone non ne avesse indovinate le dimostrazioni, il grande architetto di Siracusa così si esprime a di lui riguardo: » Egli le avrebbe certamente trovate se fosse abbastanza vissuto, vi avrebbe aggiunto nuovi teoremi, ed avrebbe fatto avanzare la scienza, poichè aveva una » sagacità straordinaria ed un grande amore per l'applicazione ». Cominciando il suo *Trattato della quadratura della parabola*, Archimede esprime ancora la sua opinione sul sapere e sul carattere di Conone: » Era mio amico, dice egli, » ed era un uomo ammirabile nelle matematiche ». Apollonio gli è meno favorevole nel IV libro delle sue *Sezioni Coniche*. Si rileva da esso che Conone aveva determinato il numero dei punti che possono esser comuni ad un circolo e ad una sezione conica, ovvero a due sezioni coniche, senza che le due curve si confondano; ma si era ingannato nella dimostrazione del suo teorema. Nicotele di Cirene aveva scritto contro Conone per provare il suo errore; ma, trasportato dalla nimicizia, aveva detto non esservi nulla di utile nell'opera di Conone. Apollonio trova questo giudizio troppo severo, e pensa che se i teoremi di Conone non sono di una necessità indispensabile possono almeno abbreviare molte dimostrazioni. Finalmente si scorge nella proposizione XVIII del libro IV delle *Collezioni matematiche* di Pappo, che Conone aveva proposto ai geometri di trovare la teoria della spirale, e che forse tal circostanza ha dato origine al *Trattato sulle Elici* di Archimede. Questo è quanto si sa di Conone come geometra.

Come astronomo, vediamo che un commentatore di Tolomeo, in una nota aggiunta all'operetta *sulle apparizioni delle stelle fisse*, cita Conone tra quelli che hanno fatto le loro osservazioni in Italia. Seneca, nelle sue *Questioni naturali* (VII, 3), ci dice che aveva raccolto gli ecclissi solari osservati in Egitto. Virgilio le ha nominato in questi versi della terza egloga:

In medio duo signa: Conon, et, quis fuit alter,
Descripsit radio totum qui gentibus orbem;
Tempora quae messor, quae curvus arator haberet.

Ma ciò che soprattutto farà vivere il suo nome è il poemetto di Callimaco sulla chioma di Berenice, tradotto da Catullo, e al quale diede occasione l'improvvisa sparizione del riccio di capelli consacrato a Venere da Berenice sorella e moglie di Tolomeo Evergete al ritorno da una guerra che questo principe aveva vittoriosamente sostenuta in Asia. Il poeta finge che Venere l'avesse fatto rapire

da Pegaso per collocarlo in cielo, siccome Bacco vi aveva collocato Arianna. Callimaco in appoggio della sua finzione cita la testimonianza di Conone, il quale aveva veduto brillare in cielo la nuova costellazione; e per dare anche più credito a tala testimonianza rammenta con enfasi i varj lavori dell' astronomo. I versi di Callimaco non sono giunti fino a noi, ma tutti conoscono la bella traduzione che ne ha fatta Catullo:

Omnia qui magni dispexit lumina mundi,
Qui stellarum ortus comperit atque orbitus:
Flammeus ut rapidi solis nitor obscuretur
Ut cedant certis sidera temporibus,
Ut Triviam furtim sub Latmia saxa relegans
Dulcis amor gyro devocet aerio:
Idem me ille Conon coelesti lumine vidit
E Bereniceo vertice caesariem
Fulgentem clare: . . . . . .

È da credere che Conone non sia autore di questa metamorfosi poetica, e che Callimaco si valesse del suo nome senza consultarlo. Non pare però che la nuova costellazione venisse tosto adottata dagli astronomi di Alessandria. Eratostene che viveva verso quell'epoca ne fa menzione di volo ne'suoi *Caratterismi* in seguito alla costellazione del Lione; ma tale opuscolo viene generalmente considerato come apocrifo. Tolomeo, che viveva circa trecento anni dopo Conone, non ne cita che due o tre stelle che pone come *informi* in seguito alla costellazione del Lione. Egli le indica colla parola πλόκαμος (*riccio*); era questa la parola usata da Callimaco, che Catullo ha tradotta per *caesariem*. Le carte moderne rappresentano una chioma tutta intera; ma non era che un riccio, il che è provato da queste parole di Catullo

Abjunctae paulo ante comae mea fata sorores
Lugebant, ...

Non si avvertì punto a tale particolarità, e si fece attenzione soltanto al titolo dell' elegia, *De coma Berenices*.

CONRAD (Baldassare), gesuita, nato nel 1559, a Neiss nella Slesia, professore di matematiche nell' università di Olmutz, morto nel 1660, ha pubblicato: I *Nova tabularum chronographicarum ratio, edita ad specimen tabularum utriusque hemisphaerii, in cono rectangulo, cujus basis est aequator terrae, vertex vero polus*, Praga, 1630, II *Propositiones physico-mathematicae, de flamma viridi, de ortu et interitu flammae*, Olmutz, 1639, in-4. Lavorava ad una grand' opera di fisica intitolata: *Teledioptriene*, sulla quale aveva consultato i primi matematici del suo tempo; morì prima che ne avesse terminato gli ultimi capitoli.

CONSEGUENTE (*Aritm.*). Si dà questo nome al secondo termine di un *rapporto*, cioè a quello col quale si paragona l'antecedente. *Vedi* Antecedente, Rapporto e Proporzione.

CONSEQUENTIA (*Astron.*). Parola latina usata in astronomia per esprimere il moto reale o apparente di un astro secondo l'ordine dei segni dello zodiaco, cioè da occidente in oriente. Così si dice che una stella, un pianeta o una cometa si muove o pare che si muova *in consequentia*, quando si muove o pare che si muova da occidente in oriente. Questa parola è opposta ad *antecedentia*. *Vedi* Antecedentia.

CONSERVAZIONE DEL CENTRO DI GRAVITA'. (*Mecc.*). Se consideriamo due corpi qualunque come formanti un sistema, il di cui centro di gravità sia situato sopra la retta immaginaria, che possiamo supporre condotta dal centro di gravità di uno di questi corpi o dal centro di gravità dell'altro, questo centro comune di gravità gode di una proprietà degna d'osservazione, ed è che il moto che esso può avere, secondo che uno dei corpi si muove o che tutti due si muovano tanto nella medesima direzione quanto in direzioni opposte, non prova nessun cangiamento dall'urto di questi corpi. Questa proprietà che in meccanica viene indicata, sotto il nome di *principio della conservazione del moto del centro di gravità nell'urto de' corpi*, può dimostrarsi assai semplicemente come segue.

Siano M ed M' (*Tav.* LXXXI, *fig.* 1.) i due corpi, B e C le posizioni de' loro centri respettivi di gravità un momento avanti l'urto, e G quello del centro di gravità del sistema nel medesimo momento. Prendiamo un punto qualunque A sopra la direzione de' mobili, e indichiamo AB con a, AG con x e AC con b; se consideriamo la massa di ciascun corpo come se fosse riunita al suo centro di gravità, e la massa totale del sistema M+M' come similmente riunita al suo centro comune di gravità, avremo in virtù della teoria de' *momenti* (*Vedi* questa parola)

$$(M+M')x = Ma + M'b$$

poichè le masse sono proporzionali ai pesi, e M+M' è la risultante di M e di M'. Le quantità a, b, x, variando col tempo del moto, sono funzioni di questo tempo, così, differenziando l'equazione precedente rapporto al tempo t, verrà

$$(M+M')\frac{dx}{dt} = M\frac{da}{dt} + M'\frac{db}{dt},$$

ma $\frac{da}{dt}$ e $\frac{db}{dt}$ rappresentando la velocità de' mobili dopo il tempo t, e $\frac{dx}{dt}$ quella del centro di gravità del sistema, perciò, chiamando V, V', u queste velocità avanti l'urto e v, v' u' quelle dopo l'urto, avremo, avanti l'urto

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad V = \frac{da}{dt}, \quad V' = \frac{db}{dt}$$

e quindi

$$(M+M')u = MV + M'V',$$

donde

$$u = \frac{MV + M'V'}{M+M'} \quad \ldots\ldots (1)$$

Dopo l'urto le velocità essendo

$$u' = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{da}{dt}, \quad v' = \frac{db}{dt}$$

troveremo egualmente

$$u' = \frac{Mv + M'v'}{M+M'} \quad \ldots\ldots (2)$$

Per paragonare adesso i valori di u e di u', bisogna osservare che se i corpi

son duri la loro velocità è la stessa dopo l'urto, e che questa velocità ha per espressione (*Vedi* Urto) .

$$\frac{MV+M'V'}{M+M'} \ldots\ldots (3)$$

in questo caso, $v=v'$ e per conseguenza

$$u'=\frac{Mv+M'v}{M+M'}=v.$$

Ora il valore (3) di v è precisamente quello che abbiamo trovato di sopra per u, dunque $u'=u$, vale a dire che quando i corpi son duri, la velocità del centro di gravità è la medesima avanti e dopo l'urto.

Se i corpi sono elastici abbiamo:

$$v=\frac{MV-M'V+2M'V'}{M+M'},$$

$$v'=\frac{M'V'-MV'+2MV}{M+M'}.$$

sostituendo questi valori nell'equazione (2), viene

$$u'=\frac{MV+M'V'}{M+M'},$$

donde si conclude sempre $u'=u$. Così qualunque sia la natura de' corpi il principio enunciato ha luogo.

CONTATTO (*Geom.*) Il punto di contatto chiamasi quello in cui una linea retta tocca una linea curva, o quello nel quale due linee curve si toccano.

1. I problemi relativi ai contatti dei circoli tra loro o con rette, e che per conseguenza sono risolubili per mezzo di costruzioni elementari possono dividersi in due classi .

1.ª Classe. Quando si tratta di condurre una retta tangente.
2.ª Classe. Quando si vuol descrivere un circolo tangente.

2. Per determinare una retta *sono necessarie e bastano* due condizioni.

Nei problemi della prima classe con i quali in sostanza non si cerca che di determinare una retta potranno aversi perciò le seguenti condizioni.

1.ª Che essa sia tangente a un circolo.
2.ª Che passi per un punto dato.
3.ª Che faccia un angolo con una retta data.

3. Parimente per determinare un circolo *sono necessarie e bastano* tre condizioni.

Dunque nei problemi della seconda classe, nei quali in sostanza non si cerca che di determinare un circolo, potranno aversi perciò le seguenti condizioni.

1.ª Che sia di raggio dato.
2.ª Che il centro sia in un punto dato.
3.ª Che passi per un punto dato.
4.ª Che sia tangente a una retta
5.ª Che sia tangente a un circolo.

4. Dalla combinazione fra loro di queste condizioni risultano i diversi proble-

mi che si possono formare sopra i contatti, e che esporremo in questo articolo, servendoci della geometria elementare per alcuni problemi, e della geometria analitica per altri.

PRIMA CLASSE

5. PROBLEMA. *Condurre una retta tangente a un circolo e che passi per un punto dato.*

Sia T il punto dato (*Tav.* LXXXI, *fig.* 2) ed O il centro della circonferenza. Unisco il punto T col centro O, suppongo condotta la tangente, e sia TA conducco il raggio OA al punto di tangenza che prolungo di una lunghezza AP=OA, le rette TA e OA saranno perpendicolari fra loro, avremo perciò TO=TP, e la tangente TA dividerà la retta OP in due parti eguali nel punto A. Da ciò deducesi il seguente modo di condurre la tangente da un punto dato ad una circonferenza.

Fatto centro in T e con un raggio eguale TO descrivo una circonferenza che taglierà il circolo dato, quindi fatto centro in O e con un raggio eguale al diametro della circonferenza data, segnò un punto P sopra la circonferenza descritta col raggio TO, unisco il punto O col punto P e unisco il punto A ove la retta OP taglia la circonferenza OA col punto dato T, e TA sarà la tangente domandata. Infatti dalla costruzione che abbiamo fatta TA divide in due parti eguali la corda OP, dunque essa è perpendicolare sul mezzo della corda OP, e perciò TA è una perpendicolare all'estremità del raggio OA; dunque essa è tangente.

Perchè le circonferenze TO ed OA si taglino, vale a dire affinchè il triangolo POT sia possibile bisogna avere $PO < PT + TO < 2TO$, cioè $OA < TO$: ciò è lo stesso che dire che il punto T dev'essere fuori del circolo OA. Di più siccome allora vi sono necessariamente due punti d'intersezione P, P', ne risulta ancora due punti di tangenza A, A', e due tangenti TA, TA', le quali risolvono egualmente il problema.

Se TO=OA, vale a dire se il punto T è sopra la circonferenza data, le due circonferenze TO ed OA sono allora eguali, la corda OP diventa un diametro e si confonde con OT, e per conseguenza il punto A col punto T, la costruzione non dando più, pel punto di tangenza cercato, che il medesimo punto T, non indica niente: il che proviene da volere applicare al caso in cui il punto dato sia sopra la circonferenza, un modo di risoluzione che non è stato trovato che nell'ipotesi in cui questo punto fosse esterno. Del rimanente non dobbiamo in questo caso per risolvere il problema, che elevare una perpendicolare all'estremità del raggio OT (*Vedi* CIRCOLO n.° 49).

Finalmente non vi è alcuna soluzione possibile se il punto T è nell'interno del circolo OA, perchè le circonferenze OT ed OA non hanno in questo caso verun punto comune.

6. PROBLEMA. *Condurre una retta tangente a due circoli.*

Siano O ed O' (*Tav.* LXXXI, *fig.* 3) i circoli dati. Supponiamo condotte le tangente comune ai due circoli e sia questa TT', e di cui il prolungamento incontri in B la retta MN condotta per i centri O ed O', se il punto B fosse conosciuto, la questione si ridurrebbe a condurre da questo punto una tangente ad uno dei circoli, questa retta sarebbe tangente ancora all'altro. Basta perciò di determinare la distanza OB. Per arrivarvi, si tira una parallela O'P a BT i raggi OT, O'T' essendo perpendicolari alla tangente BT sono paralelli, e i triangoli simili OPO', OTB, danno

$$OP : OT :: OO' : OB,$$

ovvero

$$OT - O'T' : OT :: OO' : OB \quad \ldots\ldots (1)$$

Ora, si conoscono i raggi OT, O'T' e la distanza OO' dei centri, perciò la proporzione (1) determinerà OB.

Conducendo pel punto B due tangenti BT, Bt, ad uno dei circoli, esse saranno tangenti all'altro circolo.

La proporzione che dà OB, esprime solamente che i raggi OT, O'T', sono paralelli. Per conseguenza se si tira una retta dalle estremità D, d di due raggi paralelli qualunque OD, O'd situati da una medesima parte di MN, questa retta incontrerà MN al medesimo punto che la tangente comune ai due circoli. Infatti tirando la paralella O'q a Dd i triangoli simili OqO', ODB danno

$$Oq : OD :: OO' : OB,$$

ovvero

$$OD - O'd : OD :: OO' : OB \ldots\ldots (a),$$

e le proporzioni (1) e (2), danno evidentemente lo stesso valore di OB. Osservazione che somministra un modo facilissimo per costruire il punto B.

È facile di vedere che possiamo ancora condurre due altre tangenti comuni TB't, T'B't' (*Tav.* LXXXI, *fig.* 4), ai circoli dati. Per trovare il punto B' ove la tangente taglia la retta Cc che unisce i centri C, c. Si condurrà la retta CTA, e si condurrà una paralella cE a tT; i triangoli simili Cpc, CTB' daranno

$$Cp : CT :: Cc : CB',$$

ovvero

$$CT + ct : CT :: Cc : CB'.$$

Quest' ultima proporzione determinerà l'incognita CB'.

Vedremo, con ragionamenti analoghi a quelli che abbiamo fatto di sopra, che per costruire il punto B' basta di tirare una retta Dd, per le estremità D, d, di due raggi paralelli qualunque CD, cd, situati da una parte e dall'altra della retta MN; questa retta incontrerà MN al punto B' cercato; e tirando da questo punto due tangenti Tt, T't', ad uno dei circoli, esse saranno tangenti ancora all'altro circolo.

Premesso ciò: quando i circoli sono esterni l'uno all'altro e non hanno alcun punto comune, le precedenti costruzioni determinano le quattro tangenti comuni che possiamo condurre a questi due circoli.

Se quindi concepiamo che i circoli si muovano in maniera che i loro centri c, C, si avvicinino, i circoli diverranno tangenti esternamente, e le due tangenti TB't, T'B't', si riuniranno in una sola; quindi, i circoli tagliandosi, non esisteranno che due tangenti comuni, i centri continuando ad avvicinarsi, i circoli diverranno tangenti internamente, e le due tangenti precedenti si confonderanno; finalmente, quando i circoli saranno l'uno nell'altro, essi non avranno più veruna tangente comune.

Rimarrebbe per completare la prima classe dei problemi sopra i contatti, il problema di *condurre una retta tangente a un circolo e che faccia un angolo dato con una retta*, ma veduto come si risolvano tali problemi per mezzo della Geometria elementare, è meglio di nuovamente risolverli coll'aiuto dell'applicazione dell'algebra alla Geometria, metodo soggetto ad una maggior generalità.

7. Problema 1. *Per un punto dato* (x, y), *condurre una tangente ad un circolo*,

Supponiamo che il circolo sia riportato ad assi rettangolari che passino pel suo centro.

L'equazione del circolo essendo

$$y^2+x^2=r^2 \ldots\ldots (1)$$

quella della retta cercata è della forma

$$y-y'=a(x-x') \ldots\ldots (2)$$

(*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria n.° 59.).

Per esprimere prima di tutto che il circolo e la retta si tagliano, bisogna combinare le loro equazioni, supponendo che le x e le y sieno le medesime. Ora l'equazione (2) dà

$$y=ax+y'-ax';$$

donde, sostituendo nell'equazione (1) e riducendo,

$$(a^2+1)x^2+2a(y'-ax')x+(y'-ax')^2-r^2=0 \ldots\ldots (3).$$

Attribuendo ad a dei valori particolari, si otterrebbe una serie di secanti al circolo, di cui i due punti d'intersezione avrebbero per ascisse i valori di x dedotti dall'equazione (3), e per ordinate i valori di y dedotti dall'equazione (2), dopo avervi messo per a ed x i loro valori.

Adesso, se vogliamo che la retta diventi tangente, bisogna che le due radici dell'equazione (3) siano eguali, vale a dire che risoluta l'equazione rapporto ad x, la quantità sotto il segno radicalasia eguale a zero, ciò somministra l'equazione di condizione fra i coefficienti (*Vedi* Equazioni di secondo grado).

$$4a^2(y'-ax')^2-4(a^2+1)[(y'-ax')^2-r^2]=0 \ldots\ldots (4),$$

o, dividendo per 4 e sopprimendo le due quantità

$$a^2(y'-ax')^2, \quad -a^2(y'-ax')^2$$

che si distruggono . . . . $-(y'-ax')^2+(a^2+1)r^2=0$,

equazione che allorchè abbiamo sviluppato i calcoli e ordinato rapporto ad a, diventa

$$(r^2-x'^2)a^2+2x'y'a+r^2-y'^2=0 \ldots\ldots (5).$$

Da questa equazione, si deduce, fatta ogni riduzione

$$a=-\frac{x'y'}{r^2-x'^2}\pm\frac{r}{r^2-x'^2}\sqrt{x'^2+y'^2-r^2} \ldots (6),$$

espressione che sostituita nell'equazione (2) darà l'equazione della tangente domandata.

8. Il risultamento (6) prova che per un punto dato N (*Tav.* LXXXI, *fig.* 5). è, in generale, possibile di condurre due tangenti NM, NM' alla circonferenza. Tuttavia, siccome è necessario, perciò, che i due valori di a siano reali e ineguali, dobbiamo avere

$$x'^2+y'^2>r^2, \text{ ovvero a motivo di } x'^2+y'^2=\overline{ON}^2, \ldots \overline{ON}^2>\overline{OH}^2;$$

dunque il punto (x', y') dev'essere situato fuori del circolo.

Se supponiamo $x'^2+y'^2=r^2$, nel qual caso il punto dato si trova sopra la curva, il doppio valore di a si riduce ad un solo

$$a=-\frac{x'y'}{r^2-x'^2},$$

ovvero

$$a=-\frac{x'}{y'}$$

a motivo che $y'^2=r^2-x'^2$.

Infatti, dopo questa supposizione si riconosce che, l'equazione (5) diventa

$$a^2y'^2+2ax'y'+x'^2=0,$$

ovvero

$$(ay'+x')^2=0;$$

donde

$$a=-\frac{x'}{y'}.$$

Per distinguere questo caso, dal caso generale, converremo d'indicare il punto dato, che non è altra cosa che il punto di contatto, per (x'', y''); ed allora avremo per l'equazione della tangente al circolo, in un punto di questa curva,

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'')\ldots\ldots a=-\frac{x''}{y''}.$$

9. Se $x'^2+y'^2<r^2$, il radicale diventa immaginario; e questo è ciò che deve succedere poichè in questo caso il punto (x', y') sarebbe interno alla curva, ed è evidente che allora non vi può essere veruna tangente comune ai due circoli.

10. *Osservazione* sul metodo che abbiamo esposto. Formando con l'aiuto delle equazioni (1) e (2) un'equazione in y solamente, ciò che equivale a sostituire nell'equazione (1) il valore di $x=\frac{y-(y'-ax')}{a}$ ricavato dall'equazione (2), si trova

$$(a^2+1)y^2-2(y'-ax')y+(y'-ax')^2-a^2r^2=0;$$

o se vogliamo che la retta diventi tangente, bisogna esprimere che le due radici di questa equazione sono eguali; ciò che dà fra i coefficienti l'equazione di condizione

$$4(y'-ax')^2-4(a^2+1)[(y'-ax')^2-a^2r^2]=0,$$

o, dividendo per 4 e sopprimendo le quantità $(y'-ax')^2$, e $-(y'-ax')^2$ che si distruggono,

$$a^2[(y'-ax')^2-r^2(a^2+1)]=0.$$

Ora questa equazione può essere soddisfatta in due maniere, cioè facendo $a^2=0$, quanto facendo $(y'-ax')^2-r^2(a^2+1)=0$.

L'ultima di queste due relazioni è per verità identica con la relazione (5) ottenuta dall'equazione in x; ma si trova nel medesimo tempo per soluzione, $a^2=0$.

Di più se risalghiamo all'equazione (4) del numero 7, e che, senza avere riguardo alle riduzioni de' termini simili, sviluppiamo i calcoli, otteniamo un equazione del quarto grado in a della quale per verità, i coefficienti di a^4 e di a^3 sono *nulli*. Ma sappiamo dall'algebra che una simile equazione ha due delle sue radici *infinite*. Così l'equazione (4), oltre i due valori che dà l'equazione (5), contiene ancora implicitamente due radici infinite, $a=\infty$, $a=\infty$.

Cerchiamo d'interpetrare queste soluzioni $a=0$, $a=\infty$ le quali sembrano estranee alla questione proposta. Perciò osserveremo che prendendo un punto N' situato fuori del circolo e tale che le perpendicolari abbassate da questo punto sopra l'asse delle x e l'asse delle y, incontrino la curva ai punti i, i', l, l', se vogliamo quindi esprimere che per una retta condotta dal punto N', i due valori di x dei punti d'intersezione di questa retta con la curva sono eguali, senza niente dire per y, questa condizione conviene non solo alle due tangenti N'm, N'm' che possiamo condurre da questo punto, quanto alla linea N'ii' perpen-

dicolare all'asse delle x Così l'analisi deve dare, oltre le soluzioni relative alle due tangenti, la soluzione $a=\infty$ corrispondente a questa perpendicolare.

L'equazione (2) che equivale a $x=\frac{y-y'}{a}+x'$, dà infatti per $a=\infty$, $x=x'$ ciò che non indica nulla per y. Ma per avere il suo valore basta di risalire all'equazione (1) che dà

$$y=\pm\sqrt{r^2-x'^2}.$$

Tali sono infatti i valori di Op, ip, $i'p$ corrispondenti a $N'ii'$.

Egualmente, se esprimiamo che i due valori di y sono eguali, senza dir nulla per x, questa condizione conviene non solamente alle due tangenti, ma ancora alla retta $N'll'$ paralella all'asse delle x. Così l'analisi deve dare nel medesimo tempo le soluzioni relative alle due tangenti, ed alla soluzione $a=0$ corrispondente a $N'll'$.

L'equazione (2) dà per $a=0$, $y=y'$ ciò non indica niente per x; ma dall'equazione (1) si deduce

$$x=\pm\sqrt{r^2-y'^2}.$$

Tali sono infatti i valori di Oq, Oq', lq, $l'q'$.

Concludiamo da ciò che, per esprimere il contatto di una retta con una curva, bisogna *scrivere nel medesimo tempo analiticamente le due condizioni, perchè due dei valori di* x *e due dei valori di* y *corrispondenti ai punti d'intersezione, sieno eguali, quindi considerare a parte la relazione comune che si trova implicitamente racchiusa nelle due relazioni generali, stabilite prima separatamente.*

11. Il seguente metodo può egualmente applicarsi non solo per condurre una tangente al circolo, ma a tutte le curve, qualunque sia l'inclinazione degli assi.

Si chiamino (x', y'), (x'', y'') le coordinate di due punti della curva, di cui uno (x'', y'') deve diventare un punto di contatto.

La retta che unisce questi due punti, ha per equazione (*Vedi* Applicazione dell'algebra alla Geometria n.° 59)

$$y-y'=\frac{y'-y''}{x'-x''}(x-x') \quad \ldots\ldots (1);$$

Se a questa equazione si riuniscono le due relazioni

$$y'^2+x'^2=r^2 \quad \ldots\ldots (2),$$
$$y''^2+x''^2=r^2 \quad \ldots\ldots (3),$$

il sistema di queste tre equazioni conviene alla secante condotta per i due punti.

Ora, sottraendo l'equazione (3) dall'equazione (2), abbiamo

$$y'^2-y''^2+x'^2-x''^2=0 \quad \ldots\ldots (4),$$

equazione che può stare in luogo di una delle due precedenti, dell'equazione (3) per esempio; e siccome la relazione (4) equivale a

$$(y'+y'')(y'-y'')+(x'+x'')(x'-x'')=0$$

donde

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'+x''}{y'+y''},$$

ne segue che la secante è finalmente rappresentata dal sistema delle due equazioni.

$$y-y'=-\frac{x'+x''}{y'+y''}(x-x')$$

e

$$y'^2+x'^2=r^2.$$

Se adesso, vogliamo che la secante diventi tangente, vale a dire, che i due punti d'intersezione si uniscano in un solo, basta fare $x'=x''$, e $y'=y''$; il che dà

$$y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x''),$$

e

$$y''^2+x''^2=r^2.$$

Ordinariamente, non consideriamo che la prima di queste equazioni per rappresentare la tangente; ma la seconda è sempre sottintesa.

È da osservarsi che l'artifizio del calcolo impiegato di sopra e il quale consiste a sottrarre l'equazione (3) dall'equazione (2) ha per oggetto di trasformare il coefficiente $\frac{y'-y''}{x'-x''}$ dell'equazione (1), per quindi introdurvi le due condizioni $y'=y''$ e $x'=x''$; mentre se questa doppia ipotesi si facesse prima di questa trasformazione, si otterrebbe $\frac{0}{0}$ per valore di questo coefficiente.

12. L'equazione $y-y''=-\frac{x''}{y''}(x-x'')$ può riportarsi ad una forma molto più semplice per mezzo della relazione $y''^2+x''^2=r^2$ che vi è riunita.

Mandiamo via il denominatore e trasportiamo, avremo

$$yy''+xx''=y''^2+x''^2,$$

ovvero

$$yy''+xx''=r^2.$$

Questa nuova forma è facile a ritenersi, in quanto che essa si deduce da quella del circolo, $y^2+x^2=r^2$, sostituendovi invece dei quadrati y^2 e x^2 i rettangoli yy'' e xx''.

Si faccia, nell'equazione semplicizzata della tangente, $y=0$; ne risulta $x=\frac{r^2}{x''^2}$; questa è l'ascissa OR del punto ove la tangente incontra l'asse delle x.

D'altra parte, rileviamo dalla figura

$$PR=OR-OP;$$

donde

$$PR=\frac{r^2}{x''}-x''=\frac{r^2-x''^2}{x''}.$$

Questa distanza PR compresa, fra il piede dell'ordinata del punto di contat-

to e il punto ove la tangente incontra l'asse delle x, e ciò che chiamasi la *sottangente*.

Osserveremo che poichè abbiamo ottenuto il suo valore supponendo $y=0$ nell'equazione semplicizzata della tangente, e sottraendo quindi x'' dal valore di x corrispondente ad $y=0$, ne segue che per averla direttamente dall'equazione non semplicizzata della tangente, basta di farvi $y=0$, e di cercare il valore corrispondente di $x-x''$.

Si trova, infatti, per $y=0$

$$x-x''=\frac{y''^2}{x''}=\frac{r^2-x''^2}{x''}.$$

13. Riprendiamo egualmente il caso in cui la tangente debba essere condotta da un punto preso fuori del circolo, e cerchiamo di esprimere le coordinate incognite x'', y'' del punto di contatto, in funzione delle coordinate x', y' del punto dato.

La tangente dovendo passare pel punto x', y', la sua equazione è della forma

$$y-y'=a(x-x');$$

a avendo per valore come abbiamo veduto antecedentemente $-\frac{x''}{y''}$; e la questione si riduce a determinare x'' e y''.

Ora l'equazione della tangente essendo ancora

$$yy''+xx''=r^2,$$

siccome questa retta passa pel punto (x', y'), abbiamo necessariamente la relazione

$$y'y''+x'x''=r^2 \ldots (1).$$

Di più poichè il punto x'', y'' si trova sopra la curva, abbiamo ancora

$$y''^2+x''^2=r^2 \ldots\ldots (2).$$

Tali sono le equazioni con l'aiuto delle quali bisogna calcolare x'' e y''. Si ricava dalla prima

$$y''=\frac{r^2-x'x''}{y'} \ldots (3),$$

donde sostituendo nell'equazione (2) e ordinando rapporto ad x

$$(x'^2+y'^2)x''^2-2r^2x'x''=r^2y'^2-r^4,$$

equazione che risoluta e semplicizzata rapporto ad x'', dà

$$x''=\frac{r(rx'\pm y'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2}.$$

Sostituendo questo valore di x'' nell'equazione (3), si ottiene fatta ogni riduzione

$$y''=\frac{r(ry'\mp x'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2})}{x'^2+y'^2}.$$

Dunque

$$a=-\frac{x''}{y''}=-\frac{rx'\pm y'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{ry'\mp x'\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}.$$

Digitized by Google

Per provare l'identità di questo risultamento con quello che abbiamo ottenuto (n.° 7) moltiplichiamo alto e basso per $ry' \pm x' \sqrt{x'^2+y'^2-r^2}$, osservando che i segni superiori si corrispondano come pure i segni inferiori, avremo

$$a = -\frac{r^2x'y' \pm r(y'^2+x'^2)\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}+y'x'(x'^2+y'^2-r^2)}{r^2y'^2-x'^2(x'^2+y'^2-r^2)},$$

ovvero

$$a = -\frac{x'y'(x'^2+y'^2) \pm r(x'^2+y'^2)\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{(x'^2+y'^2)(r^2-x'^2)},$$

ovvero finalmente

$$a = -\frac{x'y' \pm r\sqrt{x'^2+y'^2-r^2}}{r^2-x'^2}.$$

14. Se si volesse fissare geometricamente la posizione del punto (x'', y''), bisognerebbe costruire i valori ottenuti di sopra. Ma siccome essi sono assai complicati, adopreremo invece il seguente metodo.

Prima Costruzione

Riprendiamo le equazioni del (n.° 13.)

$$y'y''+x'x''=r^2 \ldots\ldots (1),$$

$$y''^2+x''^2=r^2 \ldots\ldots (2),$$

le quali hanno servito a determinare x'', y''.

Sottraendo la prima dalla seconda, si ottiene

$$y''^2-y'y''+x''^2-x'x''=0 \ldots\ldots (3),$$

equazione che possiamo sostituire invece della prima; e se si costruisce rapporto ai medesimi assi, ciascuna delle equazioni (2) e (3), considerata come contenente due variabili x'', y'', i punti d'intersezione dei due luoghi geometrici saranno i punti di contatto domandati.

Prima di tutto l'equazione (2) rappresenta un circolo avente il suo centro all'origine, e per raggio r (*Tav.* LXXXI, *fig.* 6); questo è perciò il circolo di già costruito.

Quanto all'equazione (3), siccome essa può essere riportata alla seguente

$$\left(y''-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(x''-\frac{x'}{2}\right)^2=\frac{y'^2+x'^2}{4},$$

essa rappresenta una circonferenza di cui il centro ha per coordinate $\frac{x'}{2}, \frac{y'}{2}$, e che ha per raggio, $\frac{1}{2}\sqrt{x'^2+y'^2}$.

Ora, se si unisce il punto O al punto N pel quale ci proponiamo di condurre una tangente, abbiamo evidentemente

$$OL \text{ ovvero } \frac{OP}{2}=\frac{x'}{2},\ IL=\frac{NP}{2}=\frac{y'}{2},\ OI=\frac{1}{2}\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Dunque la circonferenza descritta sopra ON come diametro, è il luogo geometrico dell' equazione (3).

Così i punti M, M', ove le due circonferenze si tagliano, sono i punti di contatto, e unendoli al punto N si hanno le due tangenti domandate.

Questa costruzione è precisamente quella che si trova negli elementi di Geometria.

Seconda Costruzione

15. Possiamo operare direttamente sopra le equazioni (1) e (2) del numero antecedente, la costruzione delle quali dà luogo ad una proprietà che merita una particolare osservazione.

L' equazione (2) rappresenta sempre il circolo dato.

L' equazione (1) essendo del primo grado in x'', y'', rappresenta una linea retta; e siccome i punti ove essa deve incontrare la circonferenza, non sono che i punti di contatto, ne segue che questa retta è *la linea di unione de' punti di contatto.*

Per fissarne la posizione, si faccia successivamente nell'equazione (1) $y''=0$, e $x''=0$, ne risulta

$$\text{per } y''=0, \quad x''=\frac{r^2}{x'},$$

$$\text{per } x''=0, \quad y''=\frac{r^2}{y'}.$$

Il primo punto $x''=0$, $x''=\frac{r^2}{x'}$, è il punto B (*Tav.* LXXXI, *fig.* 7) ove la retta incontra l' asse delle x, e questo punto si ottiene costruendo la 3ª proporzionale

$$x' : r :: r : x''.$$

Il secondo punto $x''=0$, $y''=\frac{r^2}{y'}$, è il punto C ove la retta incontra l' asse delle y, si ottiene nella medesima maniera.

La retta BC, che unisce questi due punti, incontra la circonferenza ai punti M, M' che sono i punti di contatto delle tangenti condotte pel punto N.

16. Osservazione Siccome il valore $x''=\frac{r^2}{x'}$ corrispondente a $y''=0$, nell' equazione della linea d' unione dei due punti di contatto, è indipendente dall' ordinata y' del punto pel quale vogliamo condurre le due tangenti, possiamo concludere che, per un secondo punto qualunque N' preso sopra la perpendicolare LL', la linea che unisce i punti di contatto delle tangenti condotte per questo punto, incontra l' asse delle x al medesimo punto B.

Infatti siano x', e y_1, le coordinate del punto N'; si avrebbe per l'equazione delle linee M''M''', $y_1y''+x'x''=r^2$; ora, facendo $y''=0$, troviamo $x''=\frac{r^2}{x'}=$OB.

Inoltre osserviamo che, l' asse OX essendo una linea condotta a piacere nel piano del circolo, la retta LL' che gli è perpendicolare, può essa medesima essere considerata come una retta tracciata in una maniera qualunque in questo

piano, perchè si potrebbe prima tracciare quest' ultima linea arbitrariamente, e prendere quindi per asse delle x la perpendicolare abbassata dal centro sopra la retta.

Da ciò deducesi il seguente teorema: *Se da differenti punti di una linea indefinita* LL', *si conducano delle tangenti ad un circolo, tutte le rette che uniscono i punti di contatto delle tangenti partendo dal medesimo punto, si riuniscono in un punto comune* B; *il quale si trova situato sopra la perpendicolare abbassata dal centro* O *sulla retta* LL'.

N. B. Risulta dall' espressione $x'' = \frac{r^2}{x'}$, che tutte le volte che la retta LL' è esterna al circolo, nel qual caso abbiamo $x' > r$, il punto B è interno, poichè allora x'' è $< r$.

Se al contrario LL' (*Tav.* LXXXI, *fig.* 8) è secante alla curva, il punto B è esterno; poichè in questo caso abbiamo $x' < r$, donde $\frac{r^2}{x'}$ o $x'' > r$.

Le due seguenti questioni dipendono dal problema delle tangenti, e danno luogo ad alcune circostanze degne di essere osservate, sotto il rapporto della discussione.

17. 1.° *Essendo dati un circolo* OAMB (*Tav.* LXXXI, *fig.* 9) *ed un punto* N, *proponiamoci di condurre per questo punto una retta in tal maniera che la parte* MM' *intercetta nel circolo, sia eguale ad una linea data* 2m.

Supponiamo il circolo riportato a due assi rettangolari OX, OY, e si chiamino x', y' le coordinate del punto N. Indichiamo inoltre con z la distanza da questo punto ad uno dei punti d' intersezione della linea cercata con la circonferenza

Avremo le equazioni

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$y - y' = a(x - x') \ldots\ldots\ldots (2),$$
$$z^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 \ldots (3);$$

($x - x'$, $y - y'$ esprimono qui le differenze fra le coordinate del punto N e le coordinate x, y, proprie a verificare nel medesimo tempo le equazioni (1) e (2) che sono quelle del circolo e della retta).

Premesso ciò per risolvere la proposta questione, elimineremo prima x ed y fra queste tre equazioni, il che darà un' equazione in z, a, x', y', r. Risolvendo quest' equazione rapporto a z otterremo due valori di cui la differenza, eguagliata a $2m$, condurrà ad un' ultima equazione in a e in quantità cognite x', y', r, m, la di cui risoluzione farà conoscere a, e fisserà per conseguenza la posizione della retta cercata. Effettuiamo questi calcoli.

Se prendiamo il valore di $y - y'$ dall' equazione (2) e quindi si sostituisce nell' equazione (2), si ha $z^2 = (x - x')^2(1 + a^2)$; donde si deduce

$$x - x' = \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \text{e} \quad x = x' + \frac{z}{\sqrt{1 + a^2}};$$

dunque

$$y - y' = \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \text{e} \quad y = y' + \frac{az}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Sostituendo questi due valori nell'equazione (1) e ordinando rapporto a z, si ottiene

$$z^2+2\frac{ay'+x'}{\sqrt{1+a^2}}.z+x'^2+y'^2-r^2=0 \quad \ldots\ldots (4);$$

donde

$$z=-\frac{ay'+x'}{\sqrt{1+a^2}}\pm\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{(r^2-x'^2)a^2+2ax'y'+r^2-y'^2}$$

Si chiamino z', z'' le distanze NM, NM', le quali non sono altro che i due valori di z che abbiamo trovato. Si ha

$$z'-z''=\frac{2}{\sqrt{1+a^2}}\sqrt{(r^2-x'^2)a^2+2ax'y'+r^2-y'^2};$$

ma per ipotesi dobbiamo avere $z'-z''=2m$.

Si ottiene dunque infine, per l'equazione del problema,

$$m\sqrt{(1+a^2)}=\sqrt{(r^2-x'^2)a^2+2ax'y'+r^2-y'^2},$$

ovvero elevando al quadrato ed ordinando rapporto ad a,

$$(x'^2+m^2-r^2)a^2-2x'y'.a+y'^2+m^2-r^2=0 \ldots\ldots (5).$$

Siccome quest'espressione è del secondo grado, ne segue che pel punto N, possiamo condurre due rette NM, NM'', che soddisfanno egualmente alla questione.

18. Osservazione. Il problema delle tangenti può considerarsi come un caso particolare di questo. Infatti, per stabilire che la retta condotta pel punto N è tangente alla curva, basta esprimere che la parte MM' o M''M''' della secante è nulla, vale a dire che abbiamo $m=0$; il che riduce l'equazione (5) a questa

$$(x'^2-r^2)a^2-2x'y'.a+y'^2-r^2=0,$$

risultamento identico con quello che abbiamo ottenuto (n.° 7)

19. Per semplicizzare la costruzione dei valori dell'equazione (5), supponiamo, il che è permesso, che l'asse delle x passi pel punto dato N (*Tav.* LXXXI, *fig.* 10).

In questo caso abbiamo $y'=0$ e l'equazione (5) diventa

$$(x'^2+m^2-r^2)a^2=r^2-m^2;$$

donde

$$a=\frac{\pm\sqrt{r^2-m^2}}{\sqrt{(x'^2+m^2-r^2)}}=\frac{\pm h}{\sqrt{x'^2-h^2}}$$

facendo $\sqrt{r^2-m^2}=h$.

Perchè questa espressione di a sia reale, è necessario che primieramente si abbia, $m<r$, o $2m<2r$; il che deve essere, poichè $2m$ rappresenta una delle corde del circolo dato.

In secondo luogo, x'^2-h^2 ovvero $x'^2-r^2+m^2>0$, donde $m>\sqrt{r^2-x'^2}$.

Quest'ultima condizione è sempre soddisfatta, finchè il punto N è esterno al circolo; poichè allora abbiamo $x'>r$, donde *a fortiori*, $x'^2-r^2+m^2>0$.

Ma se il punto N (*Tav.* LXXXI, *fig.* 11) è interno, siccome conducendo NK perpendicolare ad OX, abbiamo $NK = \sqrt{r^2 - x'^2}$ ne segue che la linea data $2m$ dev' essere minore della corda KK'; ed infatti questa corda è la più piccola di tutte quelle che possiamo condurre dal punto N nel circolo dato.

Ammettiamo che le due condizioni $m < r$, $m > \sqrt{r^2 - x'^2}$ siano soddisfatte e costruiamo il problema.

Descriviamo sopra OB (*Tav.* LXXXI, *fig.* 10) una semicirconferenza, e prendiamo a partire dal punto B, una corda BI eguale m; ne risulta

$$OI = \sqrt{r^2 - m^2} = h.$$

Adesso, sopra $ON = x'$, descriviamo una semicirconferenza, e portiamo OI da O in L, poi tiriamo la retta NL; se ne deduce

$$NL = \sqrt{x'^2 - h^2}.$$

Inoltre questa retta NLM e la retta NL'M'' situata simmetricamente al di sotto di OX, rappresentano le due rette cercate. Infatti il triangolo rettangolo OLN dà

$$\text{tang LNO} = \frac{OL}{NL} = \frac{h}{\sqrt{x'^2 - h^2}}; \text{ donde tang LNX} = \frac{-h}{\sqrt{x'^2 - h^2}}.$$

Si ha similmente

$$\text{tang L'NO} = \frac{+h}{\sqrt{x'^2 - h^2}}.$$

La costruzione è la medesima, quando il punto N (*Tav.* LXXXI, *fig.* 11) è interno. Solamente, la corda BI o m dev' essere minore di BO o r, e maggiore di NK o $\sqrt{r^2 - x'^2}$, dopo quanto abbiamo detto di sopra.

20. Osservazione. L'equazione (4), alla quale siamo giunti nella risoluzione della questione precedente (n.° 17), prova molto semplicemente che *due secanti sono reciprocamente proporzionali alle loro parti esterne*, ovvero, *che due corde si tagliano in parti reciprocamente proporzionali*, secondo che il punto N è esterno o interno al circolo.

Infatti, sappiamo che in ogni equazione del secondo grado, l'ultimo termine è eguale al prodotto delle due radici, si ha perciò, chiamando z', z'' (*Tav.* LXXXI, *fig.* 9) le radici dell'equazione (4) n.° 17.

$$z' \times z'' \text{ ovvero } NM \times NM' = x'^2 + y'^2 - r^2$$

Il secondo membro di questa relazione essendo indipendente da a, cioè dalla costante che fissa l'inclinazione della retta MN, ne segue che essa sarebbe ancora la medesima per qualunque altra secante NR condotta pel punto N. Si deduce da ciò

$$NM \times NM' = NR \times NR'$$

e per conseguenza,

$$NM : NR :: NR' : NM'.$$

Se il punto è interno al circolo, come N', si ha egualmente

$$N'M \times N'M' = N'S \times N'S'$$

e per conseguenza

$$N'M : N'S :: N'S' : N'M'$$

Ciò che doveva dimostrarsi.

Il caso in cui il punto sia esterno è caratterizzato (n.° 8) dalla condizione $x'^2+y'^2-r^2>0$; vale a dire che le due radici sono positive nel medesimo tempo; e il caso in cui il punto è interno dalla condizione $x'^2+y'^2-r^2<0$; e infatti, le due radici essendo rappresentate geometricamente da N'M e N'M', debbono essere di segni contrari.

21. 2.° *Due circoli essendo dati sopra un piano, condurvi una retta a traverso in modo che le parti* MM', NN' (Tav. LXXXII, fig. 1) *intercette dalle due circonferenze, siano eguali fra loro e ad una linea data* 2m.

Riportiamo i circoli a due assi rettangolari di cui l'uno sia la linea dei centri, e l'altro passi pel centro di uno di loro.

Prolunghiamo d'altronde la linea cercata MN' fino al suo incontro in A con la linea OO'. È evidente che questa retta sarebbe determinata di posizione se si conoscesse la distanza OA; poichè tutto allora si ridurrebbe a condurre pel punto A una linea AM tale che MM' fosse eguale a $2m$, e la questione sarebbe identica con la precedente.

Ciò premesso, siano

$$OA=x',\quad OO'=d;\quad \text{donde}\quad O'A=x'-d;$$

facciamo inoltre $OB=r$, $O'B'=r'$, e si chiami a la tangente dell'angolo che forma AM con l'asse delle x.

Abbiamo trovato (n.° 19)

$$a=\frac{\pm h}{\sqrt{x'^2-h^2}}\quad (h \text{ essendo eguale a } \sqrt{r^2-m^2}).$$

Da un'altra parte, se si chiama a' la tangente dell'angolo che forma con OX una retta AN che adempia, rapporto al secondo circolo, la medesima condizione NN'$=2m$, e che s'indichi O'A o $x'-d$ per x''; $\sqrt{r'^2-m^2}$ per h', si ha similmente

$$a'=\frac{\pm h'}{\sqrt{x''^2-h'^2}}=\frac{\pm h'}{\sqrt{(x'-d)^2-h'^2}}.$$

Ma dall'enunciato della questione, le rette AM, AN debbono non formarne che una sola; così dobbiamo avere $a'=a$; e si ottiene, per l'equazione del problema proposto,

$$\pm\frac{h}{\sqrt{x'^2-h^2}}=\frac{\pm h'}{\sqrt{(x'-d)^2-h'^2}},$$

ovvero, mandando via i denominatori ed elevando al quadrato,

$$h^2[(x'-d)^2-h'^2]=h'^2(x'^2-h^2),$$

o, sopprimendo il termine $-h^2h'^2$ comune ai due membri,

$$h^2(x'-d)^2=h'^2x'^2.$$

Si deduce da questa equazione,

$$h(x'-d)=\pm h'x';$$

donde

$$x'=\frac{hd}{h\mp h'};$$

e se invece di h e h' si sostituiscono i loro valori avremo

$$x' = \frac{d\sqrt{r^2-m^2}}{\sqrt{r^2-m^2} \mp \sqrt{r'^2-m^2}}$$

Il doppio valore di x' prova che in generale, esistono due punti A ed A', da ciascuno dei quali possiamo condurre due rette capaci di soddisfare alla questione; il che in tutto dà *quattro* soluzioni differenti AM ed Am, RA'S e rA's.

22. Problema II. *Condurre una tangente comune a due circoli dati.*

Si faccia nel precedente problema, $m=0$, il che stabilisce la condizione che le rette cercate sia tangente nel medesimo tempo ai due circoli. Siccome si ha allora

$$h \text{ o } \sqrt{r^2-m^2} = r, \text{ e } h' \text{ o } \sqrt{r'^2-m^2} = r' ;$$

il doppio valore di x' si riduce a

$$x' = \frac{dr}{r \mp r'}.$$

L'equazione in cui si considera il segno superiore, essendo evidentemente maggiore della seconda, corrisponde al caso in cui i circoli sono situati da una medesima parte rapporto alla tangente, e quella in cui si considera il segno inferiore, al caso in cui i circoli sono situati da parti differenti. Si dice nel primo caso che le tangente è esterna ai due circoli, e nel secondo che essa è interna.

Per costruire il resultamento $x' = \frac{dr}{r-r'}$ o $r-r' : r :: d : x'$ (*Tav.* LXXXII, *fig.* 2) si tiri una linea indefinita OL; si prende sopra questa linea, a partire dal punto K, una parte KH eguale ad O'B' o r'; si ha così OK$=r$, OH$=r-r'$. Si unisca H ed O' e pel punto K, si conduca KA parallela ad HO. Il punto A sarà il punto domandato.

Mentre si ha

$$\text{OH} : \text{OK} :: \text{OO}' : \text{OA}$$

ovvero

$$r-r' : r :: d : \text{OA}$$

dunque

$$\text{OA} = x'.$$

E non trattesi più che di condurre pel punto A le due tangenti ANM e Anm al primo circolo; ed esse lo sono necessariamente al secondo.

Quanto al secondo risultamento $x' = \frac{dr}{r+r'}$ o $r+r' : r :: d : x'$, basta di prendere sopra la medesima linea OL, una parte KH' eguale ed O'B'; ciò, dà OH'$=r+r'$. Tirando quindi H'O', e KA' parallela a d H'O', si ha A' per seconda soluzione della questione; vale a dire che, se dal punto A' si conducano A'M' e A'm' tangenti al primo circolo, esse lo saranno egualmente al secondo.

23. La costruzione della questione precedente (n.° 21) si deduce facilmente da quella del problema attuale.

Infatti, se s'inscrive ai circoli dati due corde CD, cd (*Tav.* LXXXII, *fig.* 1) eguali a $2m$, e che dai punti O, O', si descrivano due circonferenze i di cui raggi sieno eguali alle perpendicolari abbassate sopra queste corde, egli è evidente

cha le tangenti comuni a questi nuovi circoli, saranno tali che le parti MM′, NN′ e RR′, SS′, intercette dalle due prime, saranno eguali a CD o am.

Il problema (n.° 22) sotto il rapporto della discussione, presenta diverse circostanze che meritano di essere sviluppate.

24. Consideriamo i due circoli in tutte le situazioni che essi possano avere l'uno rapporto all'altro, supponendo però che il circolo che ha il maggior raggio sia quello il di cui centro è a sinistra, mentre le circostanze relative all'ipotesi contraria sarebbero assolutamente simili.

1.° *Siano i circoli del tutto esterni l'uno all'altro* (Tav. LXXXII, fig. 3).

Questa circostanza è espressa analiticamente dalla condizione

$$d > r + r',$$

donde a più forte ragione

$$d > r - r'.$$

In questo caso l'espressione $x' = \frac{dr}{r-r'}$, che per mezzo della divisione, può mettersi sotto la forma

$$x' = d + \frac{dr'}{r-r'}$$

è evidentemente maggiore di $d+r'$ ossia di OB′. Dunque il punto A corrispondente a questo valore di x' è esterno all'uno e all'altro circolo; e le due tangenti esterne possano essere tracciate.

L'espressione

$$x' = \frac{dr}{r+r'}$$

è prima di tutto maggiore di r ossia di OB (a motivo di $d > r+r'$).

Dall'altra parte, essa può esser messa sotto la forma

$$x' = d - \frac{dr'}{r+r'};$$

e siccome si ha

$$d > r + r',$$

ne resulta

$$\frac{dr'}{r+r'} > r';$$

dunque x' è minore di $d-r'$, o minore di OC′. Così il punto A′ corrispondente al secondo valore di x', è ancora esterno ai due circoli; e si possono condurre le due tangenti interne.

La prima circostanza offre perciò quattro soluzioni.

Nel caso particolare di $r = r'$ (*Tav.* LXXXII, *fig.* 4), l'espressione $x' = \frac{dr}{r+r'}$ riducesi ad $x' = \frac{d}{2}$; vale a dire che il punto A′ è il mezzo della distanza dei due centri.

L'espressione $x' = \frac{dr}{r-r'}$ diventa $\frac{dr}{0}$ o infinita; ciò significa che le due tangenti esterne sono paralelle alla linea dei centri.

Questi risultamenti si spiegano facilmente con l'aiuto della figura.

2.° *I circoli possono toccarsi esternamente*; ovvero analiticamente, possiamo avere (*Tav.* LXXXII, *fig.* 5)

$$d=r+r'; \quad \text{donde} \quad d>r-r'.$$

Il valore di

$$x'=\frac{dr}{r-r'}=d+\frac{dr}{r-r'}.$$

è maggiore di $d+r'$ ossia di OB'. Così le due tangenti esterne esistono, poichè il punto A è esterno ai due circoli.

Ma il valore $x'=\frac{dr}{r+r'}$ si riduce a $x'=r$; il che prova che le tangenti interne si confondono in una sola LL'.

Il problema non ammette perciò in questo caso che tre soluzioni.

3.° *I circoli possono tagliarsi*. Questa circostanza è espressa dalle due condizioni $d<r+r'$, $d>r-r'$ (*Tav.* LXXXII, *fig.* 6).

L'espressione

$$x'=\frac{dr}{r-r'}=d+\frac{dr}{r-r'}$$

è maggiore di $d+r'$ ovvero di OB'; così le due tangenti esterne esistono.

Ma l'espressione

$$x'=\frac{dr}{r+r'}$$

è minore di r; dunque il punto A' è interno al circolo il di cui centro è in O; per conseguenza, non possiamo condurre le tangenti interne.

La questione non ammette dunque, in questo caso, che due soluzioni.

4.° I *circoli possono toccarsi internamente*; ciò esige che si abbia $d=r-r'$, donde $d<r+r'$ (*Tav.* LXXXII, *fig.* 7).

Il primo valore

$$x'=\frac{dr}{r-r'},$$

riducesi a $x'=r$ ovvero $x'=$OB; dunque le due tangenti esterne si confondono in una sola LL'.

Il secondo

$$x'=\frac{dr}{r+r'}$$

è minore di r, a motivo di $d<r+r'$; dunque non esistono tangenti interne.

Così la questione non è capace che di una sola soluzione.

5.° *Finalmente, i circoli possono essere del tutto interni l'uno a l'altro*

Questa circostanza è espressa da $d<r-r'$, e a più forte ragione, $d<r+r'$. (*Tav.* LXXXII, *fig.* 8).

I due valori

$$x'=\frac{dr}{r-r'}, \quad \text{e} \quad x'=\frac{dr}{r+r'}$$

sono l'uno e l'altro minori di r. Così in questo caso non vi è alcuna soluzione possibile.

Merita di essere osservato che le circostanze sulle quali il problema cessa di ammettere quattro soluzioni, non corrispondono ad alcuno risultamento algebrico che sia nullo in se medesimo, come lo sono le espressioni immaginarie nell' equazioni del secondo grado. Ciò indica che il proposto problema dipende da un altro (*condurre per un punto dato una tangente ad un circolo*), il quale per essere solubile, esige di già (n.i 8 e 9) che i dati soddisfacciano a condizioni date.

La discussione del problema (n.° 21), dipende da questo, con la sola differenza che invece dei raggi r r' dobbiamo sostituirvi le quantità h h', ovvero

$\sqrt{r^2-m^2}$, $\sqrt{r'^2-m^2}$

Queste due espressioni provano che è necessario avere prima di tutto m minore del più piccolo dei raggi r e r'. Questa è una condizione di più da aggiungere a quelle della precedente discussione.

25. Problema III. *Condurre una retta tangente ad un circolo e che faccia un angolo dato con una retta data.*

Sia l' equazione del circolo

$$y^2+x^2=r^2 \quad . \; . \; . \; . \; (1),$$

e quella della retta

$$y=ax+b \quad . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

nella quale a mi rappresenta la tangente trigonometrica dell' angolo che questa retta fa con l' asse delle ascisse, supponendo di aver condotto quest' asse parallalamente alla retta data, supposizione sempre permessa.

Perchè la linea retta ed il circolo si taglino asse debbono avere nel loro punto di intersezione le medesime coordinate; dimodochè per trovar quelle del punto d' incontro della retta a del circolo, altro non dee farsi che supporre che l' incognite x e y abbiano il medesimo valore nell' equazioni (1) e (2); avremo in tal maniera, prendendo il valore di y^2 dall' equazione (2) e sostituendolo nell' equazione (1)

$$(ax+b)^2=r^2-x^2$$

sviluppando, ordinando rapporto ad x e mandando a zero, questa equazione si cangia in

$$x^2(a^2+1)+2abx+b^2-r^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

La quale risolute (*Vedi* Equazioni di secondo grado) dà

$$x=\frac{-ab\pm\sqrt{r^2(a^2+1)-b^2}}{a^2+1}.$$

Ora se vogliamo che la retta divenga tangente, è necessario che la quantità sotto il segno radicale sia eguale a 0, ciò esige che si abbia

$$b^2=r^2(a^2+1)$$

e

$$b=\pm r\sqrt{a^2+1};$$

valore che sostituito nell' equazione (2) la cangia in

$$y=ax\pm r\sqrt{a^2+1}.$$

Il doppio segno indica che vi sono sempre due tangenti che soddisfanno al problema.

Se $a=0$, il che indica che la retta è paralella all' asse delle x, abbiamo

$y = \pm r$; vale a dire che le due tangenti sono all'estremità di un medesimo diametro perpendicolare all'asse delle x. Quanto al valore di x sostituendovi il valore di $b = \pm r$, diviene $x = \pm \frac{0}{1} = \infty$, il che evidentemente ha luogo in questo caso.

Se $a = 45^\circ$, siccome considerando il raggio eguale all'unità la tangente trigonometrica sappiamo essere eguale al raggio, così abbiamo $y = x \pm r\sqrt{2}$, ed essendo $b = \pm r\sqrt{2}$, se ne deduce $x = \frac{\mp r\sqrt{r}}{2} = \mp \frac{3}{2}$ e $y = \frac{\pm r\sqrt{r}}{2} = \pm \frac{1}{2}$.

Finalmente se l'angolo che la tangente deve fare con la retta data è retto, abbiamo $a = \infty$, $y = \infty\, x \pm r\sqrt{\infty^2 + 1} = \infty\,(x \pm r)$, cioè $y = \infty$, ed infatti quando la tangente si eleva perpendicolarmente sull'asse delle x essa è paralella alle asse dalle y, vale a dire che non può incontrarlo. L'ascissa poi in questo caso sostituendovi il valore di b è $x = \frac{\mp ar\sqrt{a^2+1}}{a^2+1} = \frac{\mp ar}{\sqrt{a^2+1}}$ e facendo $a = \infty$, si ottiene $x = \frac{\pm \infty r}{\infty} = \pm r$; il che doveva succedere.

Dalla presente discussione rilevasi che il problema è sempre possibile, che vi sono due soluzioni, e che l'angolo che la retta tangente può fare con l'asse delle x, e per conseguenza con la retta data, può essere di qualunque grandezza.

Seconda Classe

Risolveremo i problemi che appartengono a questa classe, parte per mezzo della Geometria elementare, e parte per mezzo dell'applicazione dell'algebra alla geometria.

26. Problema I. *Descrivere un circolo tangente ad un circolo e che abbia il centro in un punto dato.*

Il punto dato per centro potrà essere esterno ovvero interno al circolo dato. Sia A (*Tav.* LXXXII, *fig.* 9) questo punto in ambedue i casi, unisco il punto A col centro O del circolo dato, quindi dall'estremità del raggio OT elevo una perpendicolare PV, questa sarà tangente al circolo dato, e perciò fatto centro in A e con un raggio eguale AT descritto un circolo, questo sarà tangente al circolo dato ed avrà il centro nel punto dato.

Infatti, nel caso che il punto sia esterno abbiamo la distanza AO dei centri eguale alla somma dei raggi, e nel caso che sia interno eguale alla differenza dei raggi; dunque perciò che si sa da un teorema di geometria questi circoli non hanno che un solo punto comune, vale a dire essi sono tangenti.

27. Problema II. *Descrivere un circolo tangente ad una retta e che abbia il centro in un punto dato.*

Sia AB la retta data, ed O il punto dato, (*Tav.* LXXXII, *fig.* 10), abbasso dal punto O la perpendicolare OT sopra AB; quindi fatto centro in O e con un raggio eguale OT descritto un circolo, questo sarà il circolo domandato.

Infatti AB essendo una perpendicolare all'estremità del raggio OT è tangente Dunque ec.

28. Problema III. *Descrivere un circolo di un raggio dato, il quale tocchi retta data in un punto dato.*

Per la soluzione di questo problema basta di elevare dal punto dato sopra la

retta una perpendicolare eguale al raggio dato, e di prendere per centro l'estremità di questa perpendicolare.

Siccome la perpendicolare può elevarsi nel medesimo piano da due parti della retta così vi sono due soluzioni.

29. Problema IV. *Descrivere un circolo di un raggio dato* OA (Tav. LXXXII, fig. 11) *che tocchi una retta data* MN, *e che passi per un punto* A (dato fuori di questa retta).

Da un punto qualunque P preso sopra MN, eleviamo dalla medesima parte del punto dato, una perpendicolare PQ eguale al raggio dato. Quindi all'estremità Q di questa perpendicolare conduciamo una paralella M'N' alla retta MN. Finalmente dal punto dato come centro, con un raggio eguale al raggio dato descriviamo una circonferenza OA. L'intersezione di questa circonferenza con la paralella M'N' darà il centro cercato O, ovvero O'.

Tutte le volte che la circonferenza OA taglierà la paralella M'N' in due punti, vi saranno due soluzioni, vi sarà una sola soluzione se la perpendicolare abbassata dal punto A sopra la paralella è eguale al raggio, non ve ne sarà alcuna e il problema sarà immaginario se la perpendicolare abbassata dal punto A sopra la retta MN sarà maggiore del doppio del raggio dato, o minore del raggio dato.

30. Problema V. *Descrivere un circolo di un raggio dato* OA *che tocchi una circonferenza data* CA (Tav. LXXXII, fig. 12) e *che passi per un punto dato* D (esterno o interno a questa circonferenza).

Dal punto dato come centro, col raggio dato, si descriva una circonferenza DO. Quindi si descriva un'altra circonferenza concentrica al circolo dato, e con un raggio eguale alla somma o alla differenza dei due raggi dati, secondo che il contatto dev'essere esterno o interno. Queste due circonferenze determinano il centro cercato.

Vi sono per ciascun modo di tangenza, due soluzioni che possono ridursi ad una sola o divenire immaginarie (*Vedi* il n.° 29).

31. Problema VI. *Descrivere un circolo di un raggio dato che tocchi due rette date.*

Le rette date formano generalmente quattro angoli, vi saranno *quattro* soluzioni, vale a dire quattro circoli, respettivamente inscritti a questi angoli.

Per trovare i centri di questi quattro circoli, basta di condurre da una parte e dall'altra di ciascuna retta data e a distanze eguali al raggio dato (*vedi* il problema IV. n.° 29), delle paralelle a queste rette. L'intersezione di queste paralelle sarà il centro cercato.

Nel caso particolare in cui le rette date sono paralelle, il problema non è possibile, se non che nel caso che fra ambedue vi sia una distanza eguale al diametro; ed allora il problema è del tutto *indeterminato*, vale a dire che vi sono un'infinità di soluzioni: ogni punto della retta condotto ad egual distanza dalle due paralelle, può essere preso per centro.

32. Problema VII. *Descrivere un circolo di un raggio dato, che tocchi una retta data ed una circonferenza data.*

Il centro del circolo cercato si troverà sopra una paralella alla retta data (n.° 29), condotta ad una distanza da questa retta eguale al raggio dato, e sopra una circonferenza concentrica al circolo dato (n.° 30), descritta con un raggio eguale alla somma o alla differenza dei due raggi, secondo il modo di tangenza.

Vi saranno generalmente *quattro* soluzioni quando la retta data sarà esterna o tangente alla circonferenza data. Potranno esservene fino a *otto* quando la retta taglierà la circonferenza. Ma il numero di queste soluzioni può, secondo le circostanze, ridursi molto, e ancora divenire del tutto nullo.

33. Problema VIII. *Descrivere un circolo di un raggio data, che tocchi due circonferenze date.*

Il centro del circolo cercato si trova sopra due circonferenze, respettivamente concentriche alle due circonferenze date (n° 30), e descritte ciascuna secondo il modo di tangenza, con un raggio eguale alla somma o alla differenza del raggio di ciascun circolo dato e del raggio del circolo cercato.

In questo problema relativamente al numero delle soluzioni è necessario di fare un' osservazione analoga a quella del (n° 32).

34. Problema IX. *Per due punti dati far passare un circolo tangente ad una retta data* (Tav. LXXXIII, fig. 1).

Per maggior semplicità si prenda per asse delle x la retta data, e l' origine delle coordinate rettangolari si ponga al punto d' intersezione della retta che unisce i punti dati A (a, b) e B (a', b') con l' asse.

L' equazione del circolo sarà sempre (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria n.° 77).

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

ed avremo per determinare p, q, ed r le tre equazioni di condizione

$$q=r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$
$$(a-p)^2+(b-q)^2=r^2 \ldots\ldots (2),$$
$$(a'-p)^2+(b'-q)^2=r^2 \ldots\ldots (3).$$

In virtù dell' equazione (1) le due altre divengono

$$(a-p)^2+b^2-2bq=0,$$
$$(a'-p)^2+b'^2-2b'q=0;$$

sostituendo nella prima il valore di q ricavato dalla seconda, si otterrà dopo avere sviluppato e ordinato,

$$(b'-b)p^2-2(ab'-a'b)p+b'(a^2+b^2)-b(a'^2+b'^2)=0 \ldots (4);$$

ma poichè la retta AB passa per l' origine, si ha

$$\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'};$$

donde 1.° $ab'-a'b=0$, e il secondo termine dell' equazione (4) sparisce;

2.° $$\frac{a^2+b^2}{b^2}=\frac{a'^2+b'^2}{b'^2},$$

donde

$$b'(a^2+b^2)=\frac{b^2(a'^2+b'^2)}{b'},$$

$$b'(a^2+b^2)-b(a'^2+b'^2)=\frac{b^2(a'^2+b'^2)-bb'(a'^2+b'^2)}{b'},$$

e finalmente

$$b'(a^2+b^2)-b(a'^2-b'^2)=-(b'-b)(a'^2+b'^2)\frac{b}{b'};$$

l' equazione precedente (4), in virtù di queste riduzioni, prende la forma

$$(b'-b)p^2-(b'-b)(a'^2+b'^2)\frac{b}{b'}=0,$$

e

$$p^2-(a'^2+b'^2)\frac{b}{b'}=0;$$

3.° $$\frac{b}{b'}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a'^2+b'^2}};$$

dunque finalmente

$$p^2-\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}=0,$$
$$p=\pm\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a'^2+b'^2}}.$$

Ora p, dalla disposizione di quanto sopra, indica nel medesimo tempo l'ascissa del centro e del punto di tangenza, e d'altra parte

$$\sqrt{a^2+b^2}=OA,\quad \sqrt{a'^2+b'^2}=OB:$$

i punti di tangenza, e le perpendicolari T_1O_1, T_2O_2, saranno dunque determinate.

Da un' altra parte se si sottrae l' una dall' altra le equazioni (2) e (3), si trova

$$(a^2-a'^2)-2p(a-a')+b^2-b'^2-2q(b-b')=0;$$

equazione che prende la forma

$$q-\frac{b+b'}{2}=-\left(\frac{a-a'}{b-b'}\right)\left(p-\frac{a+a'}{2}\right)\ldots\ (5),$$

e che rappresenta la retta O_2MO_1, perpendicolare sul mezzo di AB.

Da ciò questa costruzione:

Prolungare la linea che unisce i punti dati fino al suo incontro con la retta data. Cercare una media proporzionale a OA e OB, che si porterà a destra e a sinistra del punto O in T_1 e T_2; elevare le perpendicolari T_1O_1, T_2O_2, e i punti O_1 e O_2, ove queste perpendicolari saranno tagliate dalla perpendicolare O_2MO_1 elevata sul mezzo di AB, saranno i centri dei circoli cercati.

Invece di cercare col metodo ordinario una media proporzionale ad OA e OB, si può far passare per i punti A e B una circonferenza qualunque, e la tangente condotta dal punto O a questa circonferenza sarà ancora il valore di p.

Se $b=b'$, vale a dire se i due punti sono sopra una linea parallela alla retta data, l' equazione (5) diviene quella di una linea perpendicolare all' asse delle x, e il punto di tangenza è il punto d' intersezione di questa perpendicolare con l' asse. Il problema si riduce così a far passare un circolo per tre punti dati.

35. Problema X. *Per un punto dato far passare un circolo tangente a due rette date* (Tav. LXXXIII, fig. 2)

L' origine degli assi rettangolari è al punto d' intersezione delle rette date, e la linea che divide il loro angolo in due parti eguali è presa per asse delle x, il punto dato essendo in quest' angolo.

Digitized by Google

Le rette OB, OC, avranno per equazioni

$$y = Ax$$
$$y = -Ax$$

A essendo la tangente della metà dell'angolo delle due rette.

Le perpendicolari abbassate dal centro del circolo cercato, le di cui coordinate sono p, q sopra queste rette, avranno per espressione, r essendo il raggio del circolo cercato,

$$\pm \frac{q - Ap}{\sqrt{1 + A^2}} = r \; . \; . \; . \; . \; . \; (1),$$

$$\pm \frac{q + Ap}{\sqrt{1 + A^2}} = r \; . \; . \; . \; . \; . \; (2).$$

Si osserverà che le perpendicolari hanno una direzione inversa l'una dall'altra, il che esprime la differenza di segno.

D'altra parte il circolo domandato dovendo passare pel punto A (a,b), la terza equazione di condizione sarà

$$(a-p)^2 + (b-q)^2 = r^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Le equazioni (1) e (2) danno $q = 0$, ciò che si sapeva a *priori*, poichè il centro del circolo tangente alle due rette deve trovarsi sopra la linea che divide il loro angolo in due parti eguali.

Questa condizione cangia l'equazione (2) in

$$(a-p)^2 + b^2 = r^2,$$

relazione che conviene nel medesimo tempo al punto A (a, b) e al suo simmetrico A'$(a, -b)$. Il circolo cercato passa dunque per questi due punti, e il problema riducesi al precedente, vale a dire a far passare per i due punti A e A' un circolo che tocchi una delle rette; questo circolo sarà ancora tangente all'altra.

Seconda soluzione. A motivo di $q = 0$, le equazioni (1) e (2) danno nel medesimo tempo

$$\pm \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} p = r;$$

e siccome

$$\pm \frac{A}{\sqrt{1 + A^2}} = \text{sen}(\pm A),$$

(*Vedi* Seno)

$$p \, \text{sen}(\pm A) = r.$$

Ora se da un punto qualunque della linea che divide in due parti eguali l'angolo delle due rette, D per esempio, preso per centro, si descrive una circonferenza tangente alle due rette, indicando la distanza OD per d, e il raggio DS per r' avremo ancora

$$d \, \text{sen}(\pm A) = r',$$

donde

$$\frac{r'}{r} = \frac{d}{p}.$$

Se dunque si unisce OA, che tagli i circoli D, C_1 e C_2, ai punti I, I'; G, A; A, H, avremo

$$\frac{DI}{GC}=\frac{OD}{OC_1} \quad e \quad \frac{DI'}{AC_2}=\frac{OD}{OC_2},$$

ovvero

$$\frac{DI'}{AC_1}=\frac{OD}{OC_1} \quad e \quad \frac{DI'}{HC_2}=\frac{OD}{OC_2};$$

e per conseguenza DI e DI' sono paralelle a GC_1, AC_2, e AC_1, HC_2.

Da ciò se ne deduce quest' altra costruzione:

Unire il punto d' incontro delle rette date col punto dato; dividere l' angolo delle due rette in due parti eguali; da un punto D di questa linea, preso per centro, descrivere un circolo tangente alle due rette, il quale sarà tagliato dalla retta OAH in due punti I e I'; unire ID e I'D, e pel punto A condurre paralellamente a questi raggi le rette GC_1, AC_2, le quali determineranno col loro incontro con ODC_1C_2 i punti C_1 e C_2, centri dei circoli cercati.

Terza soluzione. Il paralellismo delle rette IS e I'S con AT_1 e AT_2 somministra una terza costruzione.

Quarta soluzione. Finalmente, se nell' equazione

$$(a-p)^2+b^2=r^2$$

si sostituisce in vece di r il suo valore

$$r=\pm p \operatorname{sen} A,$$

L' equazione risultante, fatta ogni riduzione darà

$$p=\frac{a}{\cos^2 A}\pm\sqrt{\left(\frac{a}{\cos^2 A}\right)^2-\frac{a^2+b^2}{\cos^2 A}}.$$

Per costruire questo doppio valore, si prolungherà AA' fino al suo incontro con la retta OM in M; al punto M si eleverà MN perpendicolare a OB, e si avrà

$$OM=\frac{OP}{\cos A}=\frac{a}{\cos A},$$

e

$$ON=\frac{OM}{\cos A}=\frac{a}{\cos^2 A};$$

quindi descrivendo sopra ON come diametro la semicirconferenza OKN, e portando la corda

$$OK=\frac{OA}{\cos A}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cos A},$$

il radicale sarà espresso da NK; finalmente dal punto N come centro, e con questo raggio NK, si descriverà un arco di circolo che taglierà OX in due punti C_1 e C_2, i quali saranno i centri de' circoli domandati.

Se le rette date sono paralelle, h essendo la loro distanza, l' equazione generale (3) si cangia in

$$(a-p)^2+(b-q)^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2,$$

Digitized by Google

la quale rappresenta il circolo descritto dal punto A (a, b) (*Tav.* LXXXIII, *fig.* 3) come centro e di un raggio eguale ad $\frac{h}{2}$. L'intersezione di questo circolo e della retta OL, ad egual distanza dalle due paralelle, determinerà i centri C_1 e C_2.

Si vede facilmente ciò che bisogna fare se il punto dato è sopra una delle due rette, o sopra la linea che divide in due parti egnali l'angolo che esse formano.

36. Problema XI. *Condurre per due punti dati* A, B (*Tav.* LXXXIII, *fig.* 4) *un circolo tangente ad un circolo dato* F.

Sia C il centro del circolo cercato, ed E il punto di contatto; abbassiamo sopra la retta indefinita AB le perpendicolari CD, FG; conduciamo FK paralella ad AB, e prolunghiamo DC fino al suo incontro H con FK. Si faccia

$$AB=2a,\ FH=b,\ FG=c,\ EF=d,\ CD=x$$

avremo

$$CH=c-x,\ \overline{CF}^2=\overline{FH}^2+\overline{CH}^2=b^2+(c-x)^2.$$

Ma i circoli si toccano esternamente in E, si ha perciò

$$CF=d+CE=d+CB=d+\sqrt{a^2+x^2}.$$

Dunque

$$b^2+(c-x)^2=a^2+x^2+d^2+2d\sqrt{a^2+x^2};$$

donde

$$2d\sqrt{a^2+x^2}=b^2+c^2-a^2-d^2-2cx.$$

Elevando i due membri al quadrato, e facendo $b^2+c^2-a^2-d^2=2m^2$, viene

$$(d^2-c^2)x^2+2m^2cx+a^2d^2-m^4=0$$

dalla quale si ricava

$$x=\frac{-m^2c\pm\sqrt{m^4d^2+a^2c^2d^2-d^4a^2}}{d^2-c^2}$$

Ma se si fosse considerato un circolo tangente, nell'interno del quale si sarebbe trovato il circolo F, si sarebbe avuto

$$CF=CB-d,\ \text{invece di}\ CF=CB+d;$$

e siccome d non entra in x che al secondo grado, ne segue che questi due valori di x convengono l'uno al contatto interno, l'altro al contatto esterno.

La formula trovata può come le precedenti essere discussa, e si riconoscerà facilmente in quel caso essa è reale o immaginaria, positiva o negativa, e quali sono le circostanze geometriche corrispondenti.

Seconda Soluzione. Per trovare il punto di contatto C (*Tav.* LXXXIII, *fig.* 5) Facciamo passare per i due punti dati A, B, una circonferenza qualunque che tagli la circonferenza data OC in due punti, E, F: (il che sarà sempre facile elevando una perpendicolare IG sul mezzo I di AB, e prendendo per centro un punto G di questa perpendicolare, sufficientemente lontano dal punto I). Prolunghiamo quindi le rette AB, EF, fino al loro incontro in K, e indichiamo i punti C, C′ ove le due rette che partono dal punto K possano toccare il cir-

colo OC. Ciascuno dei due punti C, C′, somministra una soluzione del problema: dimodochè la questione riducesi a far passare una circonferenza per i tre punti A, B, C, ovvero A, B, C′.

Questa costruzione risolve infatti il problema proposto, poichè il circolo OC ha una tangente comune in C col circolo ABC, e in C′ col circolo ABC′

Perchè il problema sia possibile, bisogna che i due punti dati siano tutti due fuori della circonferenza data, o tutti due nell'interno: e allora vi sono due soluzioni.

Quando i due punti dati sono fuori della circonferenza, i due circoli ottenuti possono essere secondo i casi, tanto tutti due esterni al primo, quanto tutti due inviluppati, quanto l'uno esterno e l'altro inviluppato come nella figura. Quando sono nel circolo dato i due circoli ottenuti gli sono interni.

Nel caso particolare ove i due punti dati sono sopra una medesima tangente alla circonferenza, questa tangente è una delle soluzioni; ed essa le rappresenterebbe ancora tutte due se uno dei punti dati fosse il punto di contatto.

Se le due rette AB, EF fossero paralelle, la costruzione data sarebbe difettosa; ma in questo caso i punti cercati, C C′, sarebbero precisamente i punti d'intersezione della perpendicolare IG con le circonferenze date.

37. Problema XII. *Descrivere un circolo tangente ad un circolo e ad una retta data, e che passi per un punto dato* (Tav. LXXXIII, fig. 6).

Siano XY e C, la retta e il circolo dati. Supponiamo che M, N sieno i punti di contatto cercati, si tiri la retta MN e si prolunghi fino al circolo C in P; i triangoli CPN, MNO saranno simili, perchè le corde PN, MN sono nel rapporto dei raggi; CP sarà dunque paralella ad MO, vale a dire perpendicolare sopra XY; possiamo dunque determinare *a priori* il punto P. Se si unisce al punto A, non rimarrà da trovare che il punto Z ove PA deve tagliare il circolo cercato. Ora il rettangolo PA×PZ è eguale a PN×PM, e questo è eguale a PK×PH, a motivo de' triangoli simili PKN, PHM. Il rettangolo PA in PZ essendo perciò conosciuto, ne verrà PZ, e per i due punti A, Z si farà passare un circolo tangente a XY.

Vi saranno due soluzioni pel contatto esterno dei circoli, e due altre pel contatto interno.

38. Problema XIII. *Descrivere un circolo tangente a due rette e ad un circolo dato.*

Se il circolo dato è tagliato da una delle rette (*Tav.* LXXIII, *fig.* 7) si prenda questa linea per asse delle x, l'origine degli assi rettangolari sarà al punto d'intersezione delle due rette.

Sia A l'angolo delle rette,

a, b, r, le coordinate del centro e il raggio del circolo dato,
a', b', r', le coordinate del centro e il raggio del circolo domandato.

Questo circolo dovendo esser tangente alla retta presa per asse delle x, si ha per prima equazione di condizione

$$b' = r' \quad \ldots\ldots (1),$$

la condizione di tangenza con le due rette nel medesimo tempo, sarà espressa da

$$b' = a' \operatorname{tang} \frac{A}{2}$$

ovvero

$$b' = a' \operatorname{tang} \left(\frac{180^\circ - A}{2} \right) \quad \ldots\ldots (2);$$

finalmente, la condizione di tangenza del circolo dato col circolo cercato somministra la terza equazione

$$(a'-a)^2+(b'-b)^2=(r'+r)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (3).$$

In questo caso non vi è da considerare la tangenza esterna. Queste equazioni essendo in numero sufficiente per determinare le incognite a', b', e r', non rimane che da eliminarle fra loro.

Per la sostituzione dei valori di a' e r' ricavati dall' equazioni (1) e (2), l'equazione (3) diventa

$$(a-a')^2+\left(b-a'\operatorname{tang}\frac{A}{2}\right)^2=\left(r+a'\operatorname{tang}\frac{A}{2}\right)^2;$$

sviluppando e ordinando, fatta ogni riduzione si ottiene

$$a'^2-2\left[a+(b+r)\operatorname{tang}\frac{A}{2}\right]a'+a^2+b^2-r^2=0,$$

donde si ricava

$$a'=a+(b+r)\operatorname{tang}\frac{A}{2}\pm\sqrt{\left[a+(b+r)\operatorname{tang}\frac{A}{2}\right]^2-(a^2+b^2-r^2)}.$$

A questi due valori bisogna aggiungere i due altri

$$a'_1=a+(b+r)\operatorname{tang}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)$$
$$\pm\sqrt{\left[a+(b+r)\operatorname{tang}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right)\right]^2-(a^2+b^2-r^2)}.$$

Questi quattro valori si costruiscono facilmente come segue.

Si dividerà l' angolo delle due rette, e il suo supplemento, in due parti eguali per mezzo delle rette OS, OU, pel punto P, proiezione del centro A sopra la retta OC, presa per asse delle x, si condurrà PS', PU', paralelle alle bissettrici OS, OU; sopra OX si porterà $PD=PR=b+r$, e si eleverà la perpendicolare indefinita IDI', dimodochè

$$ID=(b+r)\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

$$DI'=(r+b)\operatorname{tang}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right);$$

quindi, conducendo IH, I'H', paralelle ad OX, e prendendo $PL=PH$, $PL'=PH'$, si avrà

$$OL=a+(b+r)\operatorname{tang}\frac{A}{2},$$

$$OL'=a+(b+r)\operatorname{tang}\left(\frac{180^\circ-A}{2}\right).$$

Sopra queste due lunghezze, come diametri, si descriveranno delle semicirconferenze, sopra delle quali si porteranno le corde OT', OT'' eguali ad OT, tangente condotta dal punto O al circolo dato: i radicali dei due valori di a' saranno dun-

que rappresentati dalle corde LT′, L′T″; portando in seguito queste corde a destra ed a sinistra dei punti L ed L′, si otterranno i quattro punti V, V′, V″, V‴, ove i circoli cercati devono toccare la retta OC, asse delle x, e i centri dei circoli saranno determinati dall'incontro delle perpendicolari, elevate in questi punti al di sopra o al di sotto dell'asse, con le linee che dividono in due parti eguali l'angolo delle rette e il suo supplemento.

Se il circolo dato è compreso fra le due rette le due ultime soluzioni sono rappresentate dal valore

$$a'_2 = a + (b-r)\operatorname{tang}\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(a+(b-r)\operatorname{tang}\frac{A}{2}\right)^2 - (a^2+b^2-r^2)},$$

risultamento proveniente dall'equazione

$$(a'-a)^2+(b'-b)^2=(r'-r)^2:$$

mentre la condizione di tangenza dei due circoli è in generale

$$(a'-a)^2+(b'-b)^2=(r'\pm r)^2.$$

La costruzione di questi due ultimi valori è facile a trovarsi dopo quello che è stato detto precedentemente (*Tav* LXXXIII, *fig.* 8).

Finalmente, allorchè le due rette date sono paralelle, se h esprime la loro distanza, si hanno le relazioni

$$b'=r',\ r'=\frac{h}{2},\ (a'-a)^2+(b'-b)^2=(r'+r)^2;$$

e se si pone l'origine al punto ove la perpendicolare abbassata dal centro del circolo dato incontra le paralella presa per asse delle x, vale a dire se si fa $a=0$, si trova

$$a'=\pm\sqrt{\left(r+\frac{h}{2}\right)^2-\left(b-\frac{h}{2}\right)^2}.$$

Da ciò la seguente costruzione: dal punto A (*Tav.* LXXXIII, *fig.* 9), centro del circolo dato, e con un raggio eguale a $(r+\frac{h}{2})$ si descriva un circolo, che tagli la paralella intermediaria MN in due punti C_1 e C_2, centri dei circoli cercati: mentre

$$\overline{IC}^2=a'^2=\overline{AC_1}^2-\overline{AI}^2=\left(r+\frac{h}{2}\right)^2-\left(\frac{h}{2}-b\right)^2.$$

Se il circolo dato fosse compreso nelle paralelle, bisognerebbe aggiungere a questi due valori i due seguenti

$$a'=\pm\sqrt{\left(-r\ \frac{h}{2}\right)^2-\left(b-\frac{h}{2}\right)^2},$$

i quali corrispondono ai circoli che sono toccati internamente dal circolo dato.

Questo problema, tutto al più, può considerarsi come un caso particolare del problema (n.° 41)

39. Problema XIV. *Far passare un circolo per un punto dato* X (Tav. LXXXIII, fig. 10) *tangenzialmente a due circoli dati.*

Sieno A, B i centri dei circoli dati, supponiamo il problema risoluto e che O sia il centro del circolo cercato, e M, N i due punti di contatto; si tiri la retta MN, e si prolunghi indefinitamente, essa taglierà il prolungamento di AB in un punto K. Dico che si può determinare questo punto *a priori*, poichè se si unisce AQ, BP, i tre triangoli isosceli AQM, MON, BNP saranno simili; BP sarà perciò paralella ad AM; e per conseguenza il punto K può essere costruito unendo le estremità di due raggi paralelli qualunque.

Premesso ciò, si unisca XK, tutto si ridurrà a trovare KY, perchè basterà allora di condurre un circolo tangente ad uno dei circoli proposti per i due punti X e Y. Ora, il rettangolo $KX \times KY$ è eguale a $KM \times KN$; questo è eguale a $KR \times KS$, poiche PV essendo paralella ad MR, l'angolo a è eguale a b. Ora $b = c$ come supplementi di un medesimo angolo P; dunque $a = c$, e per conseguenza $a + d = 180°$. Duoque il quadrilatero RMNS è inscrittibile, e quindi

$$KN \times KM = KS \times KR.$$

Il rettangolo $KX \times KY$ essendo allora conosciuto, se ne deduce il punto Y, e il problema è risoluto.

Questo problema è capace in generale di quattro soluzioni, secondo che i circoli dati dovranno essere nel medesimo tempo, sia interni, sia esterni al terzo, ovvero l'uno interno e l'altro esterno. Non staremo ad esaminare i casi in cui alcune delle soluzioni diventano eguali o impossibili.

40. Problema XV. *Descrivere un circolo tangente a due circoli dati* A, B *e che tocchi una retta data* XY (Tav. LXXXIV, fig. 1).

Sia O il circolo incognito. Se si concepisce che il raggio di quest'ultimo aumenti di BM, si avrà un nuovo circolo che avrà il medesimo centro O, passerà pel punto B, sarà tangente a un circolo descritto dal centro A, con un raggio eguale alla differenza dei due raggi dati, e a una retta paralella a XY, condotta al di sotto ed alla distanza MB da XY; potremo dunque determinare questo circolo per mezzo di una costruzione assai facile; e il centro O essendo conosciuto, il problema proposto sarà risoluto.

Il problema ammette quattro soluzioni salvo i casi d'impossibilità parziale o assoluta.

41. Problema XVI. *Descrivere un circolo tangente a tre circoli dati.*

L'origine delle coordinate rettangolari essendo situato al centro del circolo r_3; a_1, b_1, r_1; a_2, b_2, r_2; a', b', r', indicando le coordinate e il raggio de'due altri circoli dati e del circolo cercato, le equazioni di condizione saranno, abbracciando tutti i casi possibili,

$$a'^2 + b'^2 = (r' \pm r_3)^2 \quad \ldots\ldots (1),$$
$$(a' - a_1)^2 + (b' - b_1)^2 = (r' \pm r_1)^2 \quad \ldots\ldots (2),$$
$$(a' - a_2)^2 + (b' - b_2)^2 = (r' \pm r_2)^2 \quad \ldots\ldots (3).$$

Se si sottrae successivamente le due ultime equazioni dalla prima, si troverà

$$2a_1a' + 2b_1b' \mp 2(r_3 \pm r_1)r' = a_1^2 + b_1^2 + r_3^2 - r_1^2 \quad \ldots\ldots (4),$$
$$2a_2a' + 2b_2b' \mp 2(r_3 \pm r_2)r' = a_2^2 + b_2^2 + r_3^2 - r_2^2 \quad \ldots\ldots (5).$$

Premesso ciò, sieno x, y le coordinate del punto di tangenza del circolo, col circolo di cui il centro cercato è l'origine degli assi: questo punto dovendo trovarsi nel medesimo tempo sopra la circonferenza di quest'ultimo circolo e sopra la linea che unisce i due centri, avremo le due relazioni

$$x^2 + y^2 = r^2_3 \quad \ldots\ldots (6),$$

$$\frac{y}{x} = \frac{b'}{a'} \quad \ldots\ldots (7).$$

L'equazione (7) dà

$$\frac{a'^2+b'^2}{a'^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2},$$

e a motivo delle equazioni (1) e (6),

$$a'=\frac{(r'\pm r_3)\,x}{\pm r_3},$$

$$b'=\frac{(r'\pm r_3)\,y}{\pm r_3}.$$

Adesso, se nelle equazioni (4) e (5) messe sotto la forma

$$2a_1a'+2b_1b'\mp 2(r_3\pm r_1)(r'\pm r_3)=a_1^2+b_1^2+r^2_3-r_1^2\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3),$$
$$2a_2a'+2b_2b'\mp 2(r_3\pm r_2)(r'\pm r_3)=a^2_2+b^2_2+r^2_3-r^2_2\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3),$$

si sostituiscono i valori di a' e b' trovati precedentemente otterremo

$$\left(\frac{r'\pm r_3}{\pm r_3}\right)[2a_1x+2b_1y\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3)]=a_1^2+b_1^2+(r_3^2-r_1^2)\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3),$$

$$\left(\frac{r'\pm r_3}{\pm r_3}\right)[2a_2x+2b_2y\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3)]=a_2^2+b_2^2+(r_3^2-r_2^2)\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3).$$

Dividendo membro a membro queste due equazioni, il risultamento prenderà la forma

$$\frac{2a_1x+2b_1y\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3)}{a_1^2+b_1^2+(r_3^2-r_1^2)\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3)}=\frac{2a_2x+2b_2y\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3)}{a_2^2+b_2^2+(r_3^2-r_2^2)\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3)}.\quad(8).$$

Tale è l'equazione della linea che, con le sue intersezioni col circolo r_3 deve determinare i punti di contatto di questo circolo col circolo cercato.

Se eguagliamo ciascuno dei due membri ad una medesima quantità indeterminata k, le due equazioni

$$\frac{2a_1x+2b_1y\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3)}{a_1^2+b_1^2+(r_3^2-r_1^2)\mp 2(r_3\pm r_1)(\pm r_3)}=k,$$

$$\frac{2a_2x+2b_2y\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3)}{a_2^2+b_2^2+(r_3^2-r_2^2)\mp 2(r_3\pm r_2)(\pm r_3)}=k,$$

daranno con la loro intersezione un punto della retta (8). k essendo arbitraria, si potranno determinare tanti punti quanti se ne vorrà, i quali tutti apparterranno alla retta (8). Si faccia dunque successivamente $k=0$ e $k=1$, avremo i due sistemi d'equazioni

$$b_1y+a_1x=r_3(r_3\pm r_1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (9),$$
$$b_2y+a_2x=r_3(r_3\pm r_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (10),$$
$$-2a_1x-2b_1y+(a_1^2+b_1^2)+(r_3^2+r_1^2)=0\ \ldots\ (11)$$
$$-2a_2x-2b_2x+(a_2^2+b_2^2)+(r_3^2+r_2^2)=0\ \ldots\ (12).$$

Le due equazioni (9) e (10) rappresentano le corde di contatto determinate, nel circolo r_3, dalle tangenti comuni ai circoli (r_3, r_1) e (r_3, r_2); e le due ultime (11) e (12), le disomologhe de' circoli (r_3, r_1) e (r_3, r_2). I due punti d'intersezione delle corde di contatto o delle polari fra loro, e delle disomologhe, basteranno per determinare la direzione della retta (8).

Tutto ciò che precede applicandosi a ciascuno dei circoli dati, si deduce questa costruzione:

Siano C_1, C_2, C_3, i circoli dati (*Tav.* LXXXIV, *fig.* 2); $O_{(1,2)}$, $O_{(1,3)}$, $O_{(2,3)}$, i centri di similitudine esterni corrispondenti ai circoli indicati dalle notazioni. Le polari si tagliano in P_3, P_2, P_1, nei circoli C_3, C_2, C_1, e le disomologhe in un medesimo punto D. Le rette P_3D, P_2D, P_1D, determineranno i punti di tangenza T_3, T_2, T_1, dai quali il circolo tangente dovrà passare.

Possiamo ancora determinare il centro conducendo i raggi C_3T_3, C_2T_2, C_1T_1, i quali concorrono al medesimo punto.

Questa conclusione non dà che un caso particolare del problema, quello in cui il circolo cercato è toccato esternamente dai tre circoli nel medesimo tempo. Si troveranno le sette altre soluzioni combinando le polari fra loro, ed osservando che le rette che congiungono i punti d'incontro delle polari, e quello di concorso delle disomologhe tagliano ciascun circolo in due punti. In fatti è facile di risolvere dalle equazioni (9), (10) (*Tav.* LXXXIV, *fig.* 3 e 4), che il problema può avere otto soluzioni.

(*Vedi* Corda di Contatto, Disomologhe, Similitudine, e Polari).

42. Problema XVII. *Descrivere un circolo tangente a tre rette date.*

L'origine degli assi rettangolari essendo situato ad uno degli angoli A (*Tav.* LXXXIV, *fig.* 5) formato dall'intersezione di due delle rette date, e la retta AB essendo presa per asse delle x, se indichiamo con o,o; o,c; a,b, le coordinate dei punti A, B, C,; e con a', b' le coordinate incognite del centro del circolo domandato esso avrà per equazione

$$(x-a')^2+(y-b')^2=r^2$$

a', b' ed r, saranno determinate dalle relazioni che otterremo fra queste incognite e le costanti del problema, esprimendo che le perpendicolari abbassate dal punto (a', b') sono tutte tre eguali al raggio r.

Prima di tutto la perpendicolare abbassata dal punto a', b', sul lato AB, di cui l'equazione è $y=o$, essendo eguale all'ordinata essa medesima, si avrà

$$\pm b'=r \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

La perpendicolare abbassata sul lato AC, di cui l'equazione è

$$y=\frac{b}{a}x,$$

ha per espressione

$$\pm\frac{ab'-ba'}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

e la seconda equazione di condizione sarà

$$\pm\frac{ab'-ba'}{\sqrt{a^2+b^2}}=r \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Finalmente per la perpendicolare sul terzo lato BC, di cui l'equazione è

$$y=\frac{-b}{c-a}(x-a),$$

si otterrà la terza equazione,

$$\pm\frac{(c-a)b'-b(c-a')}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}=r \;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Al sistema delle tre equazioni (1), (2) e (3), può sostituirsi il sistema delle tre seguenti equazioni, le quali sono il risultamento della loro combinazione.

$$\pm\frac{ab'-ba'}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm b',$$

$$\pm\frac{(c-a)b'-b(c-a')}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}=\pm b',$$

$$\pm\frac{ab'-ba'}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{(c-a)b'-b(c-a')}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}}.$$

Per determinare queste linee rette, sopra le quali il centro del circolo tangente deve trovarsi, osserveremo che le due prime prendono la forma.

$$b'=\frac{\pm\frac{b}{a}}{1\mp\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}a' \ldots\ldots (A),$$

$$b'=\frac{\pm\frac{b}{c-a}}{1\mp\sqrt{1+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2}}(a'-c) \ldots\ldots (B);$$

ma dalle formula generale

$$\text{tang}\,2A=\frac{2\,\text{tang}\,A}{1-\text{tang}^2 A}$$

si deduce

$$\text{tang.}\,A=\frac{\text{tang}\,2A}{1\pm\sqrt{1+\text{tang}^2 2A}}$$

Si vede per conseguenza, che l'equazione (A) è quella della retta AO_1 e AO_2 che passa per A, e divide l'angolo CAB e il suo supplemento in due parti eguali.

Egualmente l'equazione (B) contiene nel medesimo tempo l'espressione di due rette BO_1 e BO_2, che dividono l'angolo CBA e il suo supplemento in due parti eguali.

Quanto alla terza equazione, essa è evidentemente soddisfatta da $a'=a$, e $b'=b$: dunque la linea retta che essa rappresenta passa pel punto c.

Di più, se facciamo $b'=0$, per determinare il punto ove essa taglia la base del triangolo, si trova

$$\pm\frac{a'}{\sqrt{a^2+b^2}}=\pm\frac{(c-a')}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}},$$

donde

$$\pm\left(\frac{a'}{c-a'}\right)=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{(c-a)^2+b^2}};$$

ciò prova che i due segmenti che essa determina sopra la base del triangolo sono nel rapporto de' lati adiacenti: donque questa linea divide l'angolo del vertice o il soo supplemento in due parti egoali.

Ora siccome un circolo tangente a due rette, ha il suo centro sulla linea che divide il loro angolo in due parti eguali, esso si ricaverà dalle rette che dividono due degli angoli in due parti eguali, dalla parte ove vorremo che il contatto abbia luogo, e il punto d'incontro di queste due rette determioerà il centro.

È indifferente qualunque si prenda dei tre aogoli, perchè le rette che gli dividono in doe parti egnali, concorrono in un medesimo punto

Se le tre linee date si tagliano due a due, vi saranno quattro soluzioni; se due sono paralelle, non ve ne saranno che due; e nessona se le tre rette sono paralelle.

Prima di terminare l'articolo dei contatti esporremo il segueote teorema che è della massima facilità.

43. *Se quattro circoli toccano ciascuno, internomente o esternomente, tre lati di un quadrilotero piano qualunque, i centri di questi circoli saronno sempre sopro uno medesima circonferenza* (Tav. LXXXIV, fig. 6).

Questa proposiziooe curiosa e nuova è del genere di quelle, per la dimostrazione delle quali è preferibile d'impiegare la considerazione degli angoli. Infatti se supponiamo che i quattro circoli tocchino esternamente i lati di un qusdrilstero, e che si siano condotte delle rette da un centro all'altro, rette che divideranno ciascuna in doe parti eguali gli angoli sopplementari di qoesto qnadrilatero, basterà di provare che il nuovo quadrilatero $OO'O''O'''$ è inscrittibile al circolo, vale a dire che la somma di due dei suoi angoli opposti è eguale a due angoli retti. Ora, si ha.

$$\text{l'angolo } OAD = 1^{\text{r}} - \frac{A}{2}, \text{ l'angolo } ODA = 1^{\text{r}} - \frac{D}{2};$$

per conseguenza

$$\text{l'angolo } O = \frac{A+D}{2}.$$

Per la medesima rsgione

$$\text{l'angolo } O'' = \frac{B+C}{2};$$

dunque

$$O+O'' = \frac{A+B+C+D}{2};$$

ma

$$A+B+C+D = 4^{\text{r}},$$

dunque

$$O+O'' = 2^{\text{r}}.$$

Ecco ciò che bisognava dimostrare.

Con la medesima facilità si dimostrerebbe quest'altro teorema.

Se i lati di un quadrilatero circoscritto toccano la circonferenza ai medesimi vertici degli angoli di un quadrilatero inscritto, tutte le loro diagonali si taglieranno ol medesimo punto.

Non sarebbe difficile di assicurarsi inoltre che qoesta proprietà si verifica egualmente per l'ellisse.

Angolo di contotto. Vedi Contingenza.

Per maggiori particolarità sopra i contatti si veda questo Dizionario all' Articolo Apollonio dove parla *de tactionibus*; e dove si citano diversi autori che hanno parlato sopra i problemi dei Contatti. Potranno inoltre consultarsi vantaggiosamente Gergonne *Annoles des Mathématiques pures et oppliquées*, Reynaud et Dhoamel *problèmes et développemens sur diverses porties des Mathématiques*; Vincent *Cours de géométrie élémentaire*, e l'opere di Fermat.

Per i cootatti poi che oltrepassano la geometria elementare vedi in questo Dizionario l' articolo Osculazione.

Angolo di contotto. Vedi Contingenza.

CONTENUTO (*Geom.*). Termine impiegato comunemente per indicare il volume di un corpo: così trovare il *contenuto* di un corpo è la medesima cosa che trovare la sua solidità.

Per esempio il cootenuto di un paralellepipedo rettangolo di 3 metri di lato, è 27 metri cubi, vale a dire che questo paralellepipedo è racchiuso da uno spazio di 27 metri cubi, o che il suo volume ha 27 metri cubi.

CONTIGUO (*Geom.*). Gli angoli contigui sono quelli che hanno un lato comune, e di cui gli altri lati sooo io linea retta; si chiamoano ancora *angoli adiocenti*. *Vedi* questa parola.

Si chiamano *corpi contigui*, quelli che sono in contatto assoluto.

CONTINGENZA (*Geom.*). Si chiama *angolo di contingenzo* un angolo *mistilineo*, come l'angolo BA*n* (*Tav.* LXXXIV, *fig.* 7) formato da un arco di circolo A*n* e dalla tangente AB al puoto A. Si sa che la retta BC perpendicolare all'estremità A del raggio, tocca il circolo in un solo punto, e che non possiamo condurre alcuna linea retta fra il circolo e questa tangeote (*Vedi* Tangenta) e, per conseguenza, che l'*ongolo di contingenzo* è più piccolo che un angolo rettilioeo per quaoto piccolo possiamo supporlo. La natura di quest' aogolo è stata l' oggetto di grandi dispute fra i geometri degl'ultimi secoli. Il Pellettier del Mans, l'Ozanam, e l' Wallis pretesero che l'angolo di contingenza non fosse veramente un aogolo, e che non esistesse. Il Clavio al contrario, sosteneva che quest' angolo era reale, ma di una natura eterogenea a quella dell' angolo rettilineo. Tutta questa disputa non riposava che sopra un malioteso, poichè l' idea di un angolo in generale, tale quale risulta dalla considerazione di due rette che si tagliano, è inapplicabile senza modificazione a quello di contingenza: le linee rette sono lioee delle quali tutte le parti hanno una sola e medesima direzione, e un angolo rettilineo nou è che la differenza delle direzioni di due rette. Non segue così dell' angolo di contiogenza; la differenza delle direzioni dei suoi lati varia a ciascun punto del suo lato curvilioeo, poichè la natura di qualunque linea curva, considerandola come formata da un' infinità di linee rette infinitamente piccole, consiste principalioente in ciò che le direzioni di due parti qualunque che si seguono immediatamente non sono le medesime.

Bisogna dunque riconoscere che ciò che chiamasi *angolo di contingenza* è una grandezza di uoa natura interamente differente dall' angolo rettilineo, che non può essergli paragonato. Si dice che l'angolo di contingenza è una grandezza, perchè di tali angoli ne possono esistere dei più grandi e dei più piccoli, e perfettamente paragoonbili fra loro. Infatti quantunque non si possa far passare una linea retta fra l'arco A*n* e la tangente AB, possiamo però far passare un'infinità di altri circoli tali come A*m*E, che formino ciascuno un angolo di contingenza differente. Il Newton ha dimostrato che il rapporto di due angoli di contingenza come BA*m*, BA*n* era l' inverso di quello delle radici quadrate dei diametri, vale a dire che si ha

$$\text{Angolo BA}m : \text{angolo BA}n :: \sqrt{AD} : \sqrt{AE}$$

Donde segue che questi angoli possano essere divisi in un numero qualunque di parti eguali o proporzionali, descrivendo de' circoli che passino pel punto O di contatto.

L'angolo di contingenza non si considera solamente rapporto al circolo: si chiama ancora così l'angolo formato da un arco qualunque di curva e la tangente all'estremità di quest'arco. *Vedi* per maggiori particolarità il primo libro *dei Principii*, del Newton.

CONTINUITA'. —— Si chiama così un legame non interrotto.

La legge di continuità è quella per mezzo della quale delle quantità variabili, passando da una grandezza ad un'altra, passano per tutte le grandezze intermediarie senza saltarne alcuna. Un gran numero di filosofi e di metafisici hanno riguardato come probabile l'applicazione di questa legge alle operazioni della natura; ma il padre Boscovich ha provato che la legge era universale. Così vediamo che la distanza fra due corpi non può essere alterata, se prima non sono passati per tutte le distanze intermediarie. I pianeti si muovono ciascuno con velocità e direzioni differenti nelle diverse parti della loro orbita, ma sempre osservando la legge di continuità. Nei corpi celesti proiettati, la velocità cresce e diminuisce seguendo tutte le velocità intermediarie, e succede lo stesso nell'elettricità e nel magnetismo. Alcun corpo non diventa più o meno denso senza passare per tutte le densità intermediarie. La luce del giorno cresce la mattina e diminuisce la sera, passando per tutti i gradi intermediarii possibili. E esaminando la natura con tutta l'attenzione che esige un tale esame, vediamo che da per tutto esiste la legge di continuità. Vi sono però dei passaggi bruschi; così quando paragonando un giorno al seguente, troviamo che questo è più corto o più lungo del primo di due o tre minuti, saremmo tentati di dire che vi è passaggio brusco, ma se consideriamo tutte le longitudini, troveremo che vi sono stati dei giorni di tutte le grandezze intermediarie. Alcune volte ancora confondiamo un moto rapido con uno impulso istantaneo. Così, siamo disposti a pensare che una palla è lanciata dalla polvere, da un impulso istantaneo; ma effettivamente, un tempo apprezzabile è necessario per l'infiammazione graduale della polvere, la rarefazione dell'aria e la comunicazione del moto alla palla. Ed è in questa guisa che possiamo distruggere tutte le obiezioni che potrebbero essere fatte alle legge di continuità.

CONTINUO. (*Mec.*) Moto *continuo* Si chiama così quello che si effettua senza alcuna retrogradazione, o cangiamento brusco di direzione in tutta la sua durata. Un peso che cade liberamente si muove con un *moto continuo*; una ruota che gira sempre nel medesimo senso ha ancora un *moto continuo*. Abbiamo continuamente bisogno nelle arti di trasformare il moto continuo in moto alternativo (*Vedi* questa parola) e *viceversa*, donde ne risulta diversi problemi pratici che fanno l'oggetto della *composizione delle macchine*. (*Vedi* questa parola.)

CONTINUO (da *continuus*, *che non cesso*) dicesi di tutte la grandezze di cui le parti si congiungono e non sono divise le une dall'altre, *superficie continua*, *curva continuo*, ec. *Vedi* Continuità.

Frazioni continua (*Alg.*). Specie particolare di frazione, il denominatore della quale è composto di un numero intero e di un'altra frazione, che ha egualmente per denominatore un numero intero e una frazione, e così di seguito. L'importanza delle *frazioni continue*, soprattutto nello stato di generalità al quale sono state recentemente portate, ne fanno una delle parti più ragguardevoli della scienza dei numeri; ne esporremo perciò la teoria con alquante particolarità, cominciando dalle più semplici di queste frazioni; quindi le considereremo come modo particolare di generazione di una funzione qualunque di una quantità variabile; daremo allora le loro leggi generali; e termineremo con alcune applica-

zioni interessanti, dando un'occhiata all'istoria della loro introduzione nella scienza.

1. Sia una quantità frazionaria qualunque $\frac{N}{M}$, in cui N sia maggiore di M. Se si divide N per M e che indichiamo il quoziente con a_1, e il resto con N_1, avremo

$$\frac{N}{M} = a_1 \text{ resto } N_1,$$

o ciò che significa lo stesso

$$\frac{N}{M} = a_1 + \frac{N_1}{M}.$$

N_1 essendo evidentemente minore di M, $\frac{N_1}{M}$, è una frazione più piccola dell'unità; e se si paragona all'unità, si trova

$$1 : \frac{N_1}{M} = \frac{M}{N_1} = a_2 + \frac{N_2}{N_1},$$

indicando con a_2 il quoziente della divisione di M per N_1, e con N_2 il resto della divisione.

N_2 dovendo essere ancora minore di N_1, operiamo sopra $\frac{N_2}{N_1}$ come abbiamo fatto sopra $\frac{N_1}{M}$, e proseguiamo nella medesima maniera sopra i resti seguenti; otterremo questa serie di trasformazioni, a_2, a_3, a_4, ec. esprimendo i quozienti e N_3, N_4. N_5, ec. i resti successivi.

$$1 : \frac{N_2}{N_1} = \frac{N_1}{N_2} = a_3 + \frac{N_3}{N_2},$$

$$1 : \frac{N_3}{N_2} = \frac{N_2}{N_3} = a_4 + \frac{N_4}{N_3},$$

$$1 : \frac{N_4}{N_3} = \frac{N_3}{N_4} = a_5 + \frac{N_5}{N_4},$$

ec. ec. ec.,

$$1 : \frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \frac{N_{m-2}}{N_{m-1}} = a_m + \frac{N_m}{N_{m-1}}.$$

Continueremo le trasformazioni fino a tanto che non si sia giunti ad un resto $N_m = 0$, come se si trattasse di trovare il massimo comun divisore di due numeri N e M (*Vedi* Comun divisore), operazione che è identicamente la stessa della precedente.

Dall' eguaglianze di sopra si ricavano le seguenti:

$$\frac{N_1}{M} = \frac{1}{a_2 + \frac{N_2}{N_1}},$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a_3 + \frac{N_3}{N_2}},$$

$$\frac{N_3}{N_2} = \frac{1}{a_4 + \frac{N_4}{N_3}},$$

ec. ec.,

$$\frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \frac{1}{a_m + \frac{N_m}{N_{m-1}}},$$

di cui l' ultima è semplicemente.

$$\frac{N_{m-1}}{N_{m-2}} = \frac{1}{a_m}$$

a motivo di $N_m = 0$.

Sostituendo questi valori gli uni negli altri, cominciando dall'espressione primitiva $\frac{N}{M} = a_1 + \frac{N_1}{M}$, si ottiene definitivamente

$$\frac{N}{M} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \text{ec.}}}}} \cdots + \cfrac{1}{a_{m-1} + \cfrac{1}{a_m}}$$

e tale sarà la generazione della quantità frazionaria $\frac{N}{M}$, generazione che indichiamo sotto il nome di *frazione continua.*

2. Si chiamano *frazioni integranti* le frazioni semplici $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ ec. le quali entrano nella composizione della frazione continua. Queste frazioni danno il mezzo di ottenere dei valori approssimati di una quantità frazionaria qualunque $\frac{N}{M}$;

la generazione di questa quantità essendo effettivamente

$$\frac{N}{M} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \text{ec.}}}$$

se ci fermiamo successivamente alla prima, seconda, terza, ec., frazione integrante, si hanno le quantità

$$a_1 + \frac{1}{a_2}, \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_5}}, \quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}, \text{ ec. . . . . } (m)$$

le quali tanto più si avvicinano al vero valore di $\frac{N}{M}$, quanto maggiore è il numero delle frazioni integranti che prendiamo. È però evidente che questo valore non è dato che da tutte queste frazioni.

3. Le quantità (m) che si ottengono arrestandoci successivamente alla prima, seconda, ec. frazione integrante, sono alternativamente maggiori a minori delle quantità $\frac{N}{M}$ mentre, arrestandoci da principio alla prima frazione $\frac{1}{a_2}$, si trascura la parte unita al denominatore a_2, e si rende per conseguenza questo denomonatore più piccolo che non lo dovrebbe essere; donde $\frac{1}{a_2}$ e, perciò $a_1 + \frac{1}{a_2}$ maggiore, così

$$\frac{N}{M} < a_1 + \frac{1}{a_2}.$$

Arrestandoci alla seconda frazione $\frac{1}{a_5}$, siccome questa frazione diviene maggiore, poichè si trascura la parte che dovrebbe essere unita al suo denominatore, ne segue che $a_2 + \frac{1}{a_5}$ è maggiore, di ciò che dovrebbe essere, e perciò $\cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a^3}}$ minore, donde

$$\frac{N}{M} > a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}.$$

Per le medesime ragioni, fermandoci alla terza frazione, si ottiene un valore maggiore di $\frac{N}{M}$, a un valore minore arrestandoci alla quarta: e così di seguito.

Avremo perciò, arrestandoci successivamente a ciascuna frazione integrante, un

seguito di valori approssimati di $\frac{N}{M}$ di cui gli uni, ne' quali il numero delle frazioni integranti è impari, sono maggiori di $\frac{N}{M}$, e di cui gli altri, nei quali il numero delle frazioni integranti è pari, sono minori.

Così, siccome dobbiamo avvicinarci tanto più al vero valore di $\frac{N}{M}$ quanto più frazioni integranti prendiamo, i primi valori approssimati (i maggiori) debbono essere continuamente più piccoli; e i secondi al contrario continuamente più grandi.

4. Quando una frazione continua è data, troviamo la quantità che essa esprime addizionando successivamente la parte intera e la parte frazionaria di ciascun denominatore cominciando dall' ultimo. Ed è con questo metodo che troviamo, per esempio

$$a_1+\cfrac{1}{a^2+\cfrac{1}{a^3+\cfrac{1}{a^4}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cfrac{a_3a_4+1}{a_4}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{a_4}{a_3a_4+1}}$$

$$=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{a_2a_3a_4+a_2+a_4}{a_3a_4+1}}=a_1+\frac{a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4}$$

$$=\frac{a_1a_2a_3a_4+a_1a_2+a_1a_4+a_3a_4+1}{a_2a_3a_4+a_2+a_4},$$

e operando egualmente per il seguito de' valori approssimati di $\frac{N}{M}$, si troverebbe per questi valori

$$\frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{a_3(a_1a_2+1)+a_1}{a_2a_3+1},$$

$$\frac{a_4\left\{a_3\left(a_1a_2+1\right)+a_1\right\}+a_1a_2+1}{a_4\left(a_2a_3+1\right)+a_3},\ \text{ec.}$$

5. Esaminando la forma di questi valori successivi approssimati di $\frac{N}{M}$, è facile l' accorgerci che indicando con A_1, A_2, A_3, ec., B_1, B_2, B_3, ec., delle quantità la di cui generazione sia

$$\begin{array}{ll} A_1=a_1 & B_1=1 \\ A_2=a_2A_1+1 & B_2=a_2 \\ A_3=a_3A_2+A_1 & B_3=a_3B_2+1 \\ A_4=a_4A_3+A_2 & B_4=a_4B_3+B_2 \\ A_5=a_5A_4+A_3 & B_5=a_5B_4+B_3 \\ \text{ec.}\quad\text{ec.} & \text{ec.}\quad\text{ec.} \end{array}$$

avremo

$$\frac{A_1}{B_1}=a_1,\quad \frac{A_2}{B_2}=\frac{a_1a_2+1}{a_2},\quad \frac{A_3}{B_3},=\frac{a_3a_2a_1+a_3+a_1}{a_3a_2+1},\ \text{ec.}$$

Vale a dire che le quantità $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$, saranno i valori successivi della frazione continua che rappresenta $\frac{N}{M}$.

Conserveremo alle funzioni A, B il nome di *mediatori* che gli è stato dato da Kramp (*Vedi* Aritmetica Universala), riservandoci di rendere inseguito più generale questa concezione. Applichiamo ciò che precede ad un caso particolare.

6. *Problema primo.* Ridurre la frazione $\frac{381}{266}$ in frazione continua.

Si ha in primo luogo

$$\frac{381}{266}=1+\frac{115}{266}$$

operando sopra $\frac{115}{266}$ come abbiamo indicato (1), si trova

$$1:\frac{115}{266}=\frac{266}{115}=2+\frac{36}{115}$$

$$1:\frac{36}{115}=\frac{115}{36}=3+\frac{7}{36}$$

$$1:\frac{7}{36}=\frac{36}{7}=5+\frac{1}{7}$$

$$1:\frac{1}{7}=\frac{7}{1}=7+0$$

E per conseguenza

$$\frac{381}{266}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7}}}}$$

7. *Problema secondo.* Trovare i valori successivi della frazione continua

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{7}}}}}}$$

Si costruiranno i seguenti *mediatori* dando alle quantità a_1, a_2, a_3, *ec*, i valori 1, 2, 3, ec.

$$A_1 = 1 \qquad B_1 = 1$$
$$A_2 = 2A_1 + 1 = 3 \qquad B_2 = 2$$
$$A_3 = 3A_2 + A_1 = 10 \qquad B_3 = 3B_2 + B_1 = 7$$
$$A_4 = 4A_3 + A_2 = 43 \qquad B_4 = 4B_3 + B_2 = 30$$
$$A_5 = 5A_4 + A_3 = 225 \qquad B_5 = 5B_4 + B_3 = 157$$
$$A_6 = 6A_5 + A_4 = 1393 \qquad B_6 = 6B_5 + B_4 = 972$$
$$A_7 = 7A_5 + A_5 = 9976 \qquad B_7 = 7B_5 + B_5 = 6961,$$

ed avremo per conseguenza per i valori successivi domandati

$$1, \frac{3}{2}, \frac{10}{7}, \frac{43}{30}, \frac{225}{157}, \frac{1393}{972}, \frac{9976}{6961},$$

di cui l'ultima è quello della frazione continua intera.

8. I *mediatori* formano la parte principale della teoria delle frazioni continue, e sono di un uso maggiore in un'altra branca dell'algebra, ed è perciò che come l'abbiamo detto di sopra, renderemo più generale la *concezione* di queste funzioni adottando la notazione che è stata proposta dal Signor Wronski, nella sua *Introduzione alla filosofia delle matematiche.*

Siano a_1, a_2, a_3, ec. delle quantità qualunque alle quali daremo il nome di basi. Prendendo una di queste quantità a_m per formare il primo mediatore, e successivamente le seguenti a_{m+1}, a_{m+2}, ec. prese così in un ordine diretto per formare gli altri, indicheremo questi mediatori con la seguente notazione:

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$
$$\left[a_m\right]_2 = a_{m+1}\left[a_m\right]_1 + 1$$
$$\left[a_m\right]_3 = a_{m+2}\left[a_m\right]_2 + \left[a_m\right]_1$$
$$\left[a_m\right]_4 = a_{m+3}\left[a_m\right]_3 + \left[a_m\right]_2$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$
$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}$$

Ma possiamo egualmente formare questi mediatori, prendendone le basi in un ordine retrogrado, vale a dire partendo dalla base a_m, e risalendo alle basi a_{m-1}, a_{m-2}, ec.; per esprimere questa circostanza, uniremo il segno — all'indice della prima base in ciascun mediatore, ed avremo così

$$\left[a_{m-}\right]_1 = a_m$$
$$\left[a_{m-}\right]_2 = a_{m-1}\left[a_{m-}\right]_1 + 1$$
$$\left[a_{m-}\right]_3 = a_{m-2}\left[a_{m-}\right]_2 + \left[a_{m-}\right]_1$$
$$\left[a_{m-}\right]_4 = a_{m-3}\left[a_{m-}\right]_3 + \left[a_{m-}\right]_2$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.}$$
$$\left[a_{m-}\right]_n = a_{m-n+1}\left[a_{m-}\right]_{n-1} + \left[a_{m-}\right]_{n-2}$$

Mediante questo modo di esprimere i mediatori, vediamo che vi è sottinteso il segno + dopo l'indice della prima base, nei mediatori diretti.

9. Essendo dato un numero n di basi a_m, a_{m+1}, ec. . . . a_{m+n-1}. Se si forma un seguito di mediatori tanto nell'ordine diretto quanto nell'ordine inverso di queste basi, l'ultimo mediatore *diretto*, vale a dire quello nella composizione del quale entreranno tutte le basi, sarà eguale all'ultimo mediatore *indiretto*, ed avremo

$$\left[a_m\right]_n = \left[a_{(m+n-1)}-\right]_n$$

Prima di tutto è facile di vedere che ciò ha luogo effettivamente per due, tre, quattro, ec., basi, poichè facendo $n=1, 2, 3, 4$, ec, e costruendo i mediatori corrispondenti, si ha

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_m\right]_2 = a_{m+1}.a_m+1$$

$$\left[a_m\right]_3 = a_{m+2}.a_{m+1}.a_m+a_{m+2}.+a_m$$

ec. ec.

$$\left[a_m-\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_{(m+1)}-\right]_2 = a_m a_{m+1}+1$$

$$\left[a_{(m+2)}-\right]_3 = a_m.a_{m+1}.a_{m+2}+a_m+a_{m+2}$$

ec. ec.

Così, possiamo di già concludere

$$\left[a_m\right]_1 = \left[a_m-\right]_1, \quad \left[a_m\right]_2 = \left[a_{(m+1)}-\right]_2,$$
$$\left[a_m\right]_3 = \left[a_{(m+2)}-\right]_3, \text{ ec.}$$

Si tratta dunque solamente di provare che ciò ha luogo per un numero qualunque n di basi. Perciò, supponiamo che questo sia dimostrato fino al numero $n-1$, vale a dire che si abbia

$$\left[a_m\right]_{n-2} = \left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-1},$$

$$\left[a_m\right]_{n-1} = \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-2},$$

ec. ec.

dalla costruzione dei mediatori si ha

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}.$$

Sostituendo in questa eguaglianza i mediatori *inversi* ai mediatori *diretti* corrispondenti, essa diviene

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_{(m+n-2)}-\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-3)}-\right]_{n-2} \cdots (n)$$

Ma dalla formazione de' mediatori inversi, abbiamo ancora

$$\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-1} = a_m\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-2} + \left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-4}$$

$$\left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-2} = a_m\left[a_{(m+n-3-}\right]_{n-2} + \left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-4}.$$

Sostituendo questi valori nell' eguaglianza (n) abbiamo

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\cdot a_m\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-2} + a_{m+n-1}\cdot\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-3}$$

$$+ a_m\cdot\left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-3} + \left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-4} \cdots (p).$$

Ora, siccome abbiamo supposto che l' eguaglianza fra i mediatori diretti e inversi fosse dimostrata fino ad un numero $n-1$ di basi; si ha

$$\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-2} = \left[a_{m+1}\right]_{n-2}$$

$$\left[a_{(m+n-2)-}\right]_{n-3} = \left[a_{m+2}\right]_{n-3}$$

$$\left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-3} = \left[a_{m+1}\right]_{n-3}$$

$$\left[a_{(m+n-3)-}\right]_{n-4} = \left[a_{m+2}\right]_{n-4}.$$

Valori, che, sostituiti nell' espressione (p) la cambiano in

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\cdot a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-2} + a_{m+n-1}\left[a_{m+2}\right]_{n-3}$$

$$+ a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-3} + \left[a_{m+2}\right]_{n-4} \cdots (q),$$

ovvero

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left\{a_{m+n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2} + \left[a_{m+1}\right]_{n-3}\right\} +$$

$$+ a_{m+n-1}\left[a_{m+2}\right]_{n-3} + \left[a_{m+2}\right]_{n-4} \cdots (r).$$

Ora, abbiamo

$$a_{m+n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2} + \left[a_{m+1}\right]_{n-3} = \left[a_{m+1}\right]_{n-1}$$

$$a_{m+n-1}\cdot\left[a_{m+2}\right]_{n-3} + \left[a_{m+2}\right]_{n-4} = \left[a_{m+2}\right]_{n-2},$$

e per conseguenza

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-1} + \left[a_{m+2}\right]_{n-2} \cdots (s)$$

espressione che, sostituendo ai mediatori diretti $\left[a_{m+1}\right]_{n-1}$, $\left[a_{m+2}\right]_{n-2}$, i mediatori inversi corrispondenti $\left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-1}$, $\left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-2}$, diventa

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-2}.$$

Ma

$$a_m\left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-1} + \left[a_{(m+n-1)-}\right]_{n-2} = \left[a_{(m+n-1)-}\right]_n$$

Dunque, si ha definitivamente

$$\left[a_m\right]_n = \left[a_{(m+n-1)-}\right]_n .$$

Così, basta che la proposizione sia dimostrata fino ad un numero $n-1$ di basi perchè possiamo concludere che essa è egualmente vera per un numero n. Ora, abbiamo veduto di sopra che essa era vera per una, due e tre basi; essa lo è perciò per 4, 5, ec., ec., e per conseguenza per un numero qualunque di basi.

10. L'eguaglianza (s) fa conoscere che possiamo ancora costruire i mediatori nella seguente maniera:

$$\left[a_m\right]_1 = a_m$$

$$\left[a_m\right]_2 = a_m\left[a_{m+1}\right]_1 + 1$$

$$\left[a_m\right]_3 = a_m\left[a_{m+1}\right]_2 + \left[a_{m+2}\right]_1$$

$$\left[a_m\right]_4 = a_m\left[a_{m+1}\right]_3 + \left[a_{m+2}\right]_2$$

ec. ec.

$$\left[a_m\right]_n = a_m\left[a_{m+1}\right]_{n-1} + \left[a_{m+2}\right]_{n-2} .$$

Inseguito avremo occasione di servirci di questa costruzione la quale modifica la nostra forma generale.

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}$$

11. Un mediatore $\left[a_m\right]_p$ formato da p basi a_m, a_{m+1}, .. a_{m+p-1} è sempre eguale al prodotto de' due mediatori che si ottengono dividendo le sue basi in due in una maniera qualunque $\left[a_m\right]_n$, $\left[a_{m+n}\right]_{p-n}$, n essendo un numero intero qualunque da 1 fino a p inclusivamente, più il prodotto dei due mediatori $\left[a_m\right]_{n-1}$, $\left[a_{m+n+1}\right]_{p-n-1}$ che si ottengono dai due precedenti sopprimendo l'ultima base dell'uno e la prima dell'altro, vale a dire che si ha

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{p-n} + \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{p-n-1} .$$

Infatti, abbiamo

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} \cdot \left[a_m\right]_{p-1} + \left[a_m\right]_{p-2}$$

$$\left[a_m\right]_{p-1} = a_{m+p-2}\left[a_m\right]_{p-2} + \left[a_m\right]_{p-3} .$$

Sostituendo la seconda eguaglianza nella prima, essa dà

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} \cdot a_{m+p-2} \cdot \left[a_m\right]_{p-2} +$$
$$+ a_{m+p-1} \cdot \left[a_m\right]_{p-2} + \left[a_m\right]_{p-2}$$

ovvero

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} \cdot \left[a_m\right]_{p-1} + \left[a_m\right]_{p-2} \cdot \left\{ a_{m+p-1} \cdot a_{m+p-2} + 1 \right\}$$

Espressione che, a motivo di

$$a_{m+p-1} \cdot a_{m+p-2} + 1 = \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

si cangia in

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1} \cdot \left[a_m\right]_{p-1} + \left[a_m\right]_{p-2} \cdot \left[a_{m+p-2}\right]_2 \ldots\ldots (1).$$

Se in quest' ultima si sostituisce invece di $\left[a_m\right]_{p-2}$ il suo valore

$a_{m+p-3}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-4}$ abbiamo

$$\left[a_m\right]_p = a_{m+p-1}\left[a_m\right]_{p-1} +$$
$$+ \left[a_{m+p-2}\right]_2 \cdot \left\{ a_{m+p-3}\left[a_m\right]_{p-3} + \left[a_m\right]_{p-4} \right\} =$$
$$= \left[a_m\right]_{p-2} \cdot \left\{ a_{m+p-1} + a_{m+p-3}\left[a_{m+p-2}\right]_2 \right\} +$$
$$+ \left[a_m\right]_{p-4} \cdot \left[a_{m+p-2}\right]_2 .$$

Ma dalla legge di formazione abbiamo

$$a_{m+p-1} + a_{m+p-3} \cdot \left[a_{m+p-2}\right]_2 = a_{m+p-1} +$$
$$+ a_{m+p-3} \cdot a_{m+p-2} \cdot a_{m+p-1} + a_{m+p-3} = \left[a_{m+p-3}\right]_3$$

donde sostituendo

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_{p-3} \cdot \left[a_{m+p-3}\right]_3 + \left[a_m\right]_{p-4} \cdot \left[a_{m+p-2}\right]_2 ,$$

sostituendo egualmente in questa espressione invece di $\left[a_m\right]_{p-3}$ il suo valore $a_{m+p-4}\left[a_m\right]_{p-4} + \left[a_m\right]_{p-5}$ essa diventa

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_{m+p-3}\right]_3 \cdot \left\{ a_{m+p-4}\left[a_m\right]_{p-4} + \left[a_m\right]_{p-5} \right\} + \left[a_m\right]_{p-4} \cdot \left[a_{m+p-2}\right]_2$$

ovvero

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_{p-4} \left\{ a_{m+p-4} \cdot \left[a_{m+p-3}\right]_3 + \left[a_{m+p-2}\right]_2 \right\} + + \left[a_m\right]_{p-5} \cdot \left[a_{m+p-3}\right]_3 .$$

Ora, in virtù della legge (n.° 10), abbiamo

$$a_{m+p-4}\left[a_{m+p-3}\right]_3 + \left[a_{m+p-2}\right]_2 = \left[a_{m+p-4}\right]_4$$

dunque, sostituendo

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_{p-4} \cdot \left[a_{m+p-4}\right]_4 + \left[a_m\right]_{p-5} \cdot \left[a_{m+p-3}\right]_3 \cdots (3).$$

Continuando questo sistema di trasformazioni, con facilità si vede che il mediatore $\left[a_m\right]_p$ prenderà successivamente le seguenti forme:

$$\begin{aligned}
\left[a_m\right]_p &= \left[a_m\right]_{p-2}\left[a_{m+p-2}\right]_2 + \left[a_m\right]_{p-3}\left[a_{m+p-1}\right]_1 \\
&= \left[a_m\right]_{p-3}\left[a_{m+p-3}\right]_3 + \left[a_m\right]_{p-4}\left[a_{m+p-2}\right]_2 \\
&= \left[a_m\right]_{p-4}\left[a_{m+p-4}\right]_4 + \left[a_m\right]_{p-5}\left[a_{m+p-3}\right]_3 \\
&= \left[a_m\right]_{p-5}\left[a_{m+p-5}\right]_5 + \left[a_m\right]_{p-6}\left[a_{m+p-4}\right]_4 \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned}$$

e in generale

$$= \left[a_m\right]_{p-q} \cdot \left[a_{m+p-q}\right]_q + \left[a_m\right]_{p-q-1} \cdot \left[a_{m+p-q+1}\right]_{q-1} .$$

Se in questa espressione generale, si fa $p-q=n$, essa darà

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{p-n} + \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{p-n+1} \cdots (4),$$

ciò che è il teorema enunciato

12. Il teorema precedente ci fa vedere che seguendo la legge di continuità della formazione de' mediatori, si ha

$$\left[a_m\right]_0 = 1 \left[a_m\right]_{-1} = 0$$

poichè facendo $n = p$ nell' espressione (4), essa dà

$$\left[a_m\right]_p = \left[a_m\right]_p \cdot \left[a_{m+p}\right]_0 + \left[a_m\right]_{p-1} \cdot \left[a_{m+p+1}\right]_{-1}$$

eguaglianza che non può evidentemente aver luogo che supponendo

$$\left[a_{m+p}\right]_0 = 1, \quad \left[a_{m+p+1}\right]_{-1} = 0,$$

e in generale

$$\left[a_m\right]_0 = 1, \quad \left[a_m\right]_{-1} = 0.$$

Possiamo dunque concludere egualmente

$$\left[a_{m-}\right]_0 = 1 \cdot \left[a_{m-}\right]_{-1} = 0.$$

13. Esiste sempre fra quattro mediatori che si seguono, tali come

$$\left[a_m\right]_n, \left[a_m\right]_{n-1},$$
$$\left[a_{m+1}\right]_{n-1}, \left[a_{m+1}\right]_{n-2}$$

la seguente relazione

$$\left\{\left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} - \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-1}\right\} = (-1)^n$$

Infatti abbiamo

$$\left[a_m\right]_n = a_{m+n-1}\left[a_m\right]_{n-1} + \left[a_m\right]_{n-2}$$
$$\left[a_{m+1}\right]_{n-1} = a_{m+n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-2} + \left[a_{m+1}\right]_{n-3},$$

donde ricaveremo

$$\left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} = a_{m+n-1} \cdot \left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-2} +$$
$$+ \left[a_m\right]_{n-2} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2}.$$
$$\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-1} = a_{m+n-1} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2}\left[a_m\right]_{n-1} +$$
$$+ \left[a_{m+1}\right]_{n-3} \cdot \left[a_m\right]_{n-1}$$

e quindi

$$\left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} - \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-1} =$$
$$= \left[a_m\right]_{n-2} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-2} - \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+1}\right]_{n-3}.$$

Con una simile trasformazione si troverebbe

$$\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-3}=$$
$$=\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-3}-\left[a_m\right]_{n-3}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}.$$

e così di seguito si troverebbe

$$\left[a_m\right]_n\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-1}=$$
$$=(-1)\left\{\left[a_m\right]_{n-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-3}-\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}\right\}=$$
$$=\left[a_m\right]_{n-2}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-3}-\left[a_m\right]_{n-3}\left[a_{m+1}\right]_{n-3}=$$
$$=(-1)\left\{\left[a_m\right]_{n-3}\left[a_{m+1}\right]_{n-3}-\left[a_m\right]_{n-3}\left[a_{m+1}\right]_{n-4}\right\}=$$

ec. ec.

e in generale.

$$=(-1)^p\left\{\left[a_m\right]_{n-p}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-p-2}-\left[a_m\right]_{n-p-1}\left[a_{m+1}\right]_{n-p-1}\right\}$$

Così tutte le differenze di questi prodotti essendo eguali fra loro, ma alternativamente positive e negative, rimane semplicemente da conoscere cosa è questa differenza in uno dei casi: ora, facendo $p=n-3$, si ha

$$(-1)^{n-3}\left\{\left[a_m\right]_3\cdot\left[a_{m+1}\right]_1-\left[a_m\right]_2\cdot\left[a_{m+1}\right]_2\right\}$$

ovvero sviluppando

$$(-1)^{n-3}\left\{\left(a_{m+1}a_m\cdot a_{m+1}\cdot a_{m+2}+a_{m+1}a_{m+2}+a_{m+1}a_m\right)-\right.$$
$$\left.-\left(a_{m+2}a_{m+1}\cdot a_{m+1}a_m+a_{m+2}a_{m+1}+a_m a_{m+1}+1\right)\right\}$$

il che si riduce a

$$(-1)^{n-3}\times(-1)=(-1)^{n-2}=(-1)^n:(-1)^2=(-1)^n.$$

Dunque, si ha definitivamente

$$\left[a_m\right]_n\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-2}-\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+1}\right]_{n-1}=(-1)^n.$$

La differenza è dunque -1 allorchè il numero n delle basi è impari, e $+1$ allorchè questo numero è pari, proprietà essenzialmente osservabile dei mediatori, della quale faremo in seguito delle importanti applicazioni.

Questo teorema non è che un caso particolare del seguente.

14. *Fra quattro mediatori*

$$\left[a_m\right]_q \quad \left[a_{m+n}\right]_{q-n},$$
$$\left[a_m\right]_{q-p}, \quad \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n}$$

tali che le basi dei due secondi siono interamente comprese, e nella medesima maniera, fra quelle dei due primi esiste sempre la seguente relazione

$$\left[a_m\right]_q \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \left[a_m\right]_{q-p} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} =$$
$$= (-1)^{q+p+n} \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}.$$

In virtù del n.° 11 si ha

$$\left[a_m\right]_q = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} + \left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1}$$
$$\left[a_m\right]_{q-p} = \left[a_m\right]_n \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} + \left[a_m\right]_{n-1} \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1}$$

moltiplicando la prima di queste eguaglianze per $\left[a_{m+n}\right]_{q-p-n}$ e la seconda per $\left[a_{m+n}\right]_{q-n}$ se ne ricava

$$\left[a_m\right]_q \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \left[a_m\right]_{q-p} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-n} =$$
$$= \left[a_m\right]_{n-1} \left\{ \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1} - \right.$$
$$\left. - \left[a_{m+n}\right]_{q-n} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1} \right\} \ldots (a);$$

ma dal medesimo numero 11.

$$\left[a_{m+n}\right]_{q-n} = \left[a_{m+n}\right]_{q-n-p} \left[a_{m+q-p}\right]_p +$$
$$+ \left[a_{m+n}\right]_{q-n-p-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}$$
$$\left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-1} = \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-1} \cdot \left[a_{m+q-p}\right]_p +$$
$$+ \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-2} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1}.$$

Sostituendo questi valori nel secondo membro dell'eguaglianza (a), questo secondo membro diventa

$$\left[a_m\right]_{n-1} \cdot \left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1} \cdot \left\{ \left[a_{m+n+1}\right]_{q-n-p-2} \cdot \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n} - \right.$$
$$\left. - \left[a_{m+n}\right]_{q-p-n-1} \cdot \left[a_{m+n+1}\right]_{q-p-n-1} \right\} \cdot (b).$$

Ora facendo

$$m+n=r, \qquad q-p-n=s,$$

nella quantità compresa fra le grappe, essa si cangia in

$$\left[a_{r+1}\right]_{s-2}\cdot\left[a_r\right]_s-\left[a_r\right]_{s-2}\cdot\left[a_{r+1}\right]_{s-1}$$

e si riduce a $(-1)^s$, pel teorema (13); sostituendo dunque $(-1)^s$, o piuttosto $(-1)^{q-p-n}$ invece di questa quantità, nel secondo membro dell' eguaglianza (b) e osservando che

$$(-1)^{q-p-n}=(-1)^{q+p+n}$$

a motivo di

$$(-1)^{2n+2p}=1$$

avremo definitivamente

$$\left[a_m\right]_q\cdot\left[a_{m+n}\right]_{q-p-n}-\left[a_m\right]_{q-p}\cdot\left[a_{m+n}\right]_{q-n}=$$
$$=(-1)^{p+n+p}\left[a_m\right]_{n-1}\cdot\left[a_{m+q-p+1}\right]_{p-1},$$

e questo è precisamente il teorema in questione.

15. I mediatori semplici che abbiamo indicati con le lettere A_1, A_2, ec., B_1, B_2, ec., saranno, seguendo la nostra notazione

$$A_1=\left[a_1\right]_1 \qquad B_1=\left[a_2\right]_0$$
$$A_2=\left[a_1\right]_2 \qquad B_2=\left[a_2\right]_1$$
$$A_3=\left[a_1\right]_3 \qquad B_3=\left[a_2\right]_2$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}$$

e per conseguenza le frazioni $\frac{A_1}{B_1}$, $\frac{A_2}{B_2}$ ec., le quali esprimono i valori successivi della frazione continua di cui i denominatori delle frazioni integranti sono a_1, a_2, a_3, ec., saranno d' ora innanzi sotto le forme

$$\frac{\left[a_1\right]_1}{\left[a_2\right]_0},\ \frac{\left[a_1\right]_2}{\left[a_2\right]_1},\ \frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2},\ \text{ec.}\ldots\ldots\ \frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}\ldots\ldots(c)$$

ed è in questa guisa che le esamineremo.

16. Segue dal teorema del numero 13, che se moltiplichiamo in croce i termini delle frazioni vicine nella serie dei valori (c) di una frazione continua, la differenza dei prodotti sarà sempre l' unità positiva o negativa, vale a dire che in generale avremo.

$$\left[a_1\right]_m\cdot\left[a_2\right]_{m-2}-\left[a_2\right]_{m-1}\cdot\left[a_1\right]_{m-1}=(-1)^m$$

e in particolare

$$[a_1]_2 \cdot [a_2]_0 - [a_1]_1 \cdot [a_2]_1 = 1$$
$$[a_1]_3 \cdot [a_2]_1 - [a_1]_2 \cdot [a_2]_2 = -1$$
$$[a_1]_4 \cdot [a_2]_2 - [a_1]_3 \cdot [a_2]_3 = 1$$
$$[a_1]_5 \cdot [a_2]_3 - [a_1]_4 \cdot [a_2]_4 = -1$$
ec. ec. ec.

Risulta da questa proprietà che le frazioni $\frac{[a_1]_1}{[a_2]_0}, \frac{[a_1]_2}{[a_2]_1}, \frac{[a_1]_3}{[a_2]_2}$, ec., sono irriducibili, o sono di già ridotte alla più semplice espressione mentre se $\frac{[a_1]_3}{[a_2]_2}$ per esempio, avesse un divisore comune ai suoi due termini diverso dall'unità, ne seguirebbe che il numero intero $[a_1]_2 \cdot [a_2]_1 - [a_1]_2 \cdot [a_2]_2$ sarebbe ancora divisibile per questo medesimo divisore, il che non può essere a motivo che

$$[a_1]_3 \cdot [a_2]_1 - [a_1]_2 \cdot [a_2]_2 = -1.$$

17. La differenza che vi è fra due frazioni consecutive (c) è la più piccola possibile, vale a dire, che fra queste medesime frazioni, non potrebbe cadervi alcun' altra frazione qualunque, quando essa non avesse un denominatore maggiore di quelli di queste frazioni.

Poichè prendiamo, per esempio, le due frazioni.

$$\frac{[a_1]_3}{[a_2]_2}, \frac{[a_1]_4}{[a_2]_3}, \text{ la loro differenza è}$$

$$\frac{[a_1]_4 [a_2]_2 - [a_1]_3 [a_2]_3}{[a_2]_2 [a_2]_3},$$

ovvero

$$\frac{1}{[a_2]_2 [a_2]_3}$$

Poichè il numeratore si riduce all' unità.

Ora, se esistesse una frazione $\frac{A}{B}$ il di cui valore cadesse fra quelli di queste due frazioni, e di cui il denominatore fosse minore di $[a_2]_2$ o di $[a_2]_3$ bisognerebbe che la differenza $\frac{A}{B}$ e $\frac{[a_1]_3}{[a_2]_2}$ che è

$$\frac{A[a_2]_2 - B[a_3]_3}{B[a_2]_2}, \text{ ovvero } \frac{B[a_3]_3 - A[a_2]_2}{B[a_2]_2}$$

fosse minore di

$$\frac{1}{[a_2]_2 \cdot [a_2]_3},$$

ma è evidente che questa differenza non potrebbe essere minore di $\frac{1}{B[a_2]_2}$, dunque se $B < [a_2]_3$ essa sarà necessariamente maggiore di

$$\frac{1}{[a_2]_2 \cdot [a_2]_3};$$

egualmente la differenza fra $\frac{A}{B}$ e $\frac{[a_1]_4}{[a_2]_3}$ non potendo essere minore di $\frac{1}{B[a_2]_3}$ sarà necessariamente maggiore di

$$\frac{1}{[a_2]_2 [a_2]_3}$$

se $B < [a_2]_2$.

18. Da quello che precede, si vede che la differenza fra due frazioni consecutive qualunque è sempre eguale all' unità, divisa pel prodotto dei denominatori di queste frazioni; risultamento che è positivo, allorchè il mediatore che forma il numeratore dell' ultima frazione ha un indice pari, e negativo nel caso contrario.

Infatti si ha

$$\frac{[a_1]_m}{[a_2]_{m-1}} - \frac{[a_1]_{m-1}}{[a_2]_{m-2}} =$$

$$= \frac{[a_1]_m [a_2]_{m-2} - [a_1]_{m-1} [a_2]_{m-1}}{[a_2]_{m-1} [a_2]_{m-2}} =$$

$$= (-1)^m \frac{1}{[a_2]_{m-1} [a_2]_{m-2}}$$

19. Un numero frazionario $\frac{N}{M}$ essendo ridotto in frazione continua, possiamo, per quello che precede, determinare sempre in un modo rigoroso la differenza che esiste fra questa quantità e le frazioni consecutive che ne sono delle approssimazioni. Sia $\frac{[a_1]_m}{[a_2]_{m-1}}$ l'ultima frazione consecutiva, vale a dire quella che è esattamente eguale a $\frac{N}{M}$, p essendo un numero intero qualunque minore di m, una frazione consecutiva qualunque sarà rappresentata da

$$\frac{[a_1]_{m-p}}{[a_2]_{m-p-1}},$$

e la differenza fra questa frazione e la quantità $\frac{N}{M}$ dà

$$\frac{[a_1]_m}{[a_2]_{m-1}} - \frac{[a_1]_{m-p}}{[a_2]_{m-p-1}}$$

ovvero

$$\frac{[a_1]_m [a_2]_{m-p-1} - [a_1]_{m-p} [a_2]_{m-1}}{[a_2]_{m-1} [a_2]_{m-p-1}}$$

ma pel teorema del n.° 14. il numeratore di quest' ultima frazione si riduce a

$$(-1)^{m-p-1} [a_{m-p+2}]_{p-1}.$$

Abbiamo dunque definitivamente, facendo $m-p=n$

$$\frac{\left[a_1\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}-\frac{\left[a_1\right]_n}{\left[a_2\right]_{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{\left[a_{n+2}\right]_{m-n-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{n-1}}$$

espressione che sarà ancora più facile a calcolare, se in vece del mediatore diretto $\left[a_{n+2}\right]_{m-n-1}$ si sostituisce il mediatore inverso $\left[a_{m-}\right]_{m-n-1}$ equivalente, perchè allora non bisognerà che calcolare le tre serie di mediatori $\left[a_1\right]$, $\left[a_2\right]$, $\left[a_{m-}\right]$. Seguendo quest'ultima sostituzione la quantità $\frac{\left[a_2\right]_m}{\left[a_2\right]_{m-1}}$ o $\frac{N}{M}$ è successivamente eguale a

$$\frac{N}{M}=a_1+\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-2}}{\left[a_2\right]_{m-1}}$$

$$=\frac{\left[a_1\right]_2}{\left[a_2\right]_1}-\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-3}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_1}$$

$$=\frac{\left[a_1\right]_3}{\left[a_2\right]_2}+\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-4}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_2}$$

$$=\frac{\left[a_1\right]_4}{\left[a_2\right]_3}-\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-5}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_3}$$

ec ec.

$$=\frac{\left[a_1\right]_n}{\left[a_2\right]_{n-1}}+(-1)^{n-1}\frac{\left[a_{m-}\right]_{m-n-1}}{\left[a_2\right]_{m-1}\left[a_2\right]_{n-1}}$$

eguaglianze per mezzo delle quali possiamo conoscere facilmente il grado di approssimazione che dà una delle frazioni consecutive qualunque.

ESEMPIO

20. Sia proposto di ridurre $\frac{1733}{445}$ in frazione continua e di determinare il grado di approssimazione di tutte le frazioni consecutive. Le divisioni successive danno

$$a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ a_3 = 8,\ a_4 = 2,\ a_5 = 7,\ a_6 = 3$$

e si ha per conseguenza

$$\frac{1733}{445} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3}}}}}$$

Si costruiranno i mediatori

$$\begin{array}{llll}
\left[a_1\right]_1 = 3 & & & \\
\left[a_1\right]_2 = 4, & \left[a_2\right]_1 = 1, & & \\
\left[a_1\right]_3 = 35, & \left[a_2\right]_2 = 9, & \left[a_6 -\right]_1 = 3 & \\
\left[a_1\right]_4 = 74, & \left[a_2\right]_3 = 19, & \left[a_6 -\right]_2 = 22 & \\
\left[a_1\right]_5 = 553, & \left[a_2\right]_4 = 142, & \left[a_6 -\right]_3 = 47 & \\
\left[a_1\right]_6 = 1733, & \left[a_2\right]_5 = 445, & \left[a_6 -\right]_4 = 398. &
\end{array}$$

Le frazioni consecutive saranno dunque

$$3,\ \frac{4}{1},\ \frac{35}{9},\ \frac{74}{19},\ \frac{553}{142},\ \frac{1733}{445}$$

e si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1733}{445} &= 3 + \frac{398}{445} \\
&= 4 - \frac{47}{445 \wedge 1} \\
&= \frac{35}{9} + \frac{22}{445 \times 9} \\
&= \frac{74}{19} - \frac{3}{445 \wedge 19} \\
&= \frac{553}{142} + \frac{1}{445 \times 142}
\end{aligned}$$

così la frazione $\frac{74}{19}$, per esempio, è più grande della proposta di $\frac{3}{445\times19}$ e la frazione $\frac{553}{142}$ più piccola di $\frac{1}{445\times142}$. Con questo metodo si conosce perciò con esattezza il grado di approssimazione che dà ciascuna frazione consecutiva.

21. In tutto quello che precede, non abbiamo considerato le frazioni continue che per quello che spetta all'aritmetica, e come dando la generazione di una quantità frazionaria determinata; è necessario ora di esaminarle generalmente, vale a dire come modo particolare di generazione di qualunque quantità, o di qualunque funzione di una variabile.

Prima di tutto, dobbiamo indicare almeno la differenza che esiste fra la generazione di una quantità data da uno dei modi primitivi ed elementari di generazione, e quella che vien data da un modo universale, tale come le frazioni continue. Abbiamo veduto (Alg. 39) che non esistono che tre modi elementari per la costruzione dei numeri, rappresentati dalle forme generali.

$$A+B=C,\ A\times B=C,\ A^{n}=C.$$

Ora la costruzione di una quantità per mezzo di uno di questi modi di generazione è ciò che ci dà la *natura* particolare di questa quantità; per esempio il lato di un quadrato, essendo l'*unità*, la sua diagonale è eguale a $\sqrt{2}$, e questa espressione o questo numero $\sqrt{2}$ ci fa conoscere la natura della diagonale di cui la grandezza è incommensurabile rapporto all'unità. Ma se vogliamo *valutare* questa grandezza, vale a dire, se vogliamo *misurarla* per mezzo della quantità presa per *unità*, possiamo, tanto con l'operazione artimetica dell'estrazione delle radici, quanto sviluppando $\sqrt{2}$ in serie per mezzo del binomio del Newton, o con qualunque altro processo, trovare dei numeri la cui grandezza non differisca da quella di $\sqrt{2}$ che di una quantità tanto piccola quanto vorremo; metodo che ci permetterà di valutare $\sqrt{2}$, se non esattamente almeno in limiti tanto ristretti quanto potremo desiderarlo.

Esaminando i diversi metodi di valutare $\sqrt{2}$, vediamo facilmente che l'operazione dell'estrazione delle radici, sebbene ci faccia conoscere dei valori che continuamente differiscono in meno dal vero secondo quanto si prolunga l'operazione, niente però c'insegna sopra la *legge* in se medesima di questa valutazione; mentre questi valori sono isolati gl'uni dagli altri, e d'altra parte non sono che il risultamento di tentativi di calcolo, il di cui complesso non può essere determinato. Così, limitandoci successivamente a 1, 2, 3, ec. decimali, si ottiene.

$$\sqrt{2}=1,4\ldots\ldots$$
$$\sqrt{2}=1,41\ldots\ldots$$
$$\sqrt{2}=1,414\ldots$$
$$\sqrt{2}=1,4142\ldots$$

valutazioni i di cui termini non sono legati da alcuna legge. Non segue però così dalla generazione di questa medesima quantità, ottenuta con un processo generale di sviluppo, poichè questa generazione, impiegando per esempio il binomio del Newton, è

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\text{ec.}\ldots$$

vale a dire una *serie* il di cui complesso è dato dal suo *termine generale*; essa conseguentemente ci offre una valutazione sottoposta a leggi fisse e determinate.

Egli è perciò essenziale di distinguere nella generazione delle quantità due punti di vista perfettamente distinti, di cui il primo ha per oggetto la *natura*, e l'altro la *misura* delle quantità. Il signor Wronski è stato il primo a stabilire questa distinzione importante, e a dividere la scienza dei numeri in due branche, di cui la prima sotto il nome di Teoria ha per oggetto i modi primitivi e indipendenti dalla *generazione* e dal *paragone* delle quantità, e di cui il secondo, sotto quello di Tecnia, ha per oggetto i modi universali di questa *generazione* e di questo *paragone* universale (Vedi *Filosofia della Tecnia*). Le frazioni continue ci offrono precisamente un modo tecnico universale di generazione, e da ciò deriva l'estrema importanza di queste frazioni; importanza della quale sembra che i moderni geometri non si siano ancora completamente avveduti. Tentiamo perciò di metterla nella massima evidenza.

22. Sia $F(x)$, una funzione qualunque di una quantità variabile x, della quale si tratta di ottenere la valutazione o la *generazione tecnica*, prendendo per *misura* un'altra frazione φx della medesima variabile. Decomponiamo prima di tutto la funzione proposta in due altre A_0 e $f_0 x$, tali che si abbia subito

$$F(x)=A_0+f_0 x \ldots\ldots (1),$$

e che quindi $f_0 x$ sia sempre paragonabile con la misura φx, o che il rapporto di queste due funzioni non diventi *infinito*, qualunque valore si dia ad x. Così $f_0 x$ deve diventare *zero*, quando φx diventa *zero*, e siccome si ha

$$F(x)-f_0 x=A_0,$$

se indichiamo con un punto situato sopra la lettera x il valore che prende la funzione $F(x)$, allorchè $\varphi x=0$, avremo

$$F(\dot{x})=A_0$$

A_0 può dunque sempre esser determinata, e la decomposizione (1) può aver luogo in tutti i casi.

Ma $f_0 x$ dovendo sempre essere paragonabile a φx, il rapporto

$$\frac{f_0 x}{\varphi x},$$

ovvero il suo inverso

$$\frac{\varphi x}{f_0 x}$$

sarà una nuova funzione di φx, che esprimeremo con $F_1(x)$, e che decomporremo egualmente in

$$F_1(x)=A_1+f_1 x;$$

$f_1 x$ essendo una funzione paragonabile a φx e che diventa zero quando $\varphi x=0$. Esprimendo di nuovo il rapporto

$$\frac{\varphi x}{f_1 x}$$

per $F_2(x)$ avremo per terza trasformazione

$$F_2(x)=A_2+f_2 x,$$

e continuando nella medesima maniera, troveremo riunendo i risultamenti,

$$F(x) = A_0 + f_0 x \qquad \text{donde} \qquad F(\dot{x}) = A_0$$

$$F_1(x) = A_1 + f_1 x \qquad\qquad F_1(\dot{x}) = A_1$$

$$F_2(x) = A_2 + f_2 x \qquad\qquad F_2(\dot{x}) = A_2$$

$$F_3(x) = A_3 + f_3 x \qquad\qquad F_3(\dot{x}) = A_3$$

ec. ec. ec. ec.

$$\frac{\varphi x}{f_0 x} = F_1(x) \qquad \text{donde} \qquad f_0 x = \frac{\varphi x}{F_1(x)}$$

$$\frac{\varphi x}{f_1 x} = F_2(x) \qquad\qquad f_1 x = \frac{\varphi x}{F_2(x)}$$

$$\frac{\varphi x}{f_2 x} = F_3(x) \qquad\qquad f_2 x = \frac{\varphi x}{F_3(x)}$$

ec. ec. ec. ec

E sostituendo questi valori gli uni negli altri

$$(z) \ldots F(x) = A_0 + \cfrac{\varphi x}{A_1 + \cfrac{\varphi x}{A_2 + \cfrac{\varphi x}{A_3 + \cfrac{\varphi x}{A_4 + \text{ec.}}}}}$$

Tale sarà dunque la forma della generazione tecnica della funzione $F(x)$, impiegando la funzione φx per misura, e non considerando che i *rapporti inversi* di questa misura. Se, invece di prendere i rapporti inversi di φx con ciascuna delle funzioni successive $f_0 x, f_1 x, f_2 x$, ec., si fossero adoprati dei *rapporti diretti*, avremmo ottenuto un'altra generazione tecnica della quale non è questo il punto di occuparci. (*Vedi* Sraia).

23. Per meglio fissare le idee, supponiamo che la funzione $F(x)$ sia $\sqrt{(a+x)}$, e che la *misura* φx sia semplicemente x. Eseguendo le operazioni indicate di sopra troveremo, partendo da

$$F(x) = \sqrt{(a+x)},$$

$$A_0 = \sqrt{(a+\dot{x})} = \sqrt{a},$$

ciò che darà subito

$$F_1(x) = \frac{x}{\sqrt{(a+x)} - \sqrt{a}},$$

a motivo di

$$F(x) - A_0 = f_0 x$$

e di

$$\frac{x}{f_0 x} = F_1(x).$$

Facendo $x=0$ nel valore di $F_1(x)$, dobbiamo ottenere quello di A_1, ma siccome questo valore diventa $\frac{0}{0}$, in questo caso, bisogna cominciare a cercare di dargli un'altra forma. Ora, moltiplicando i due termini di $F_1(x)$ per $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}$, otteniamo

$$F_1(x)=\frac{x[\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}]}{(a+x)-a}=\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a},$$

ciò che diventa, facendo $x=0$,

$$F_1(\dot{x})=A_1=2\sqrt{a}.$$

Passando da questi valori a quelli di f_1x e di $F_2(x)$, avremo, a motivo di,

$$f_1x=F_1(x)-A_1,$$
$$f_1x=\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}-2\sqrt{a},$$
$$=\sqrt{(a+x)}-\sqrt{a};$$

donde

$$F_2(x)=\frac{x}{\sqrt{(a+x)}-\sqrt{a}}.$$

Ciò che darà ancora, moltiplicando i due termini per $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}$

$$F_2(x)=\sqrt{(a+x)}+\sqrt{a}$$

e

$$F_2(\dot{x})=A_2=2\sqrt{a}.$$

Continuando nella medesima maniera, si vede facilmente che si otterrebbe all'*infinito*, $A_3=2\sqrt{a}$, $A_4=2\sqrt{a}$, ec., ec., e che la generazione di $\sqrt{(a+x)}$, è

$$\sqrt{(a+x)}=\sqrt{a}+\cfrac{x}{2\sqrt{a}+\cfrac{x}{2\sqrt{a}+\cfrac{x}{2\sqrt{a}+\text{ec.}}}}$$

frazione continua di cui il numero dei termini è *infinito*.

Se facciamo $a=1$ e $x=1$, questa espressione diventa

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\text{ec.}}}}}}$$

Essa ci dà allora la valutazione generale della quantità $\sqrt{2}$, e basta di costruire i *mediatori* di questa frazione continua (15) per ottenere le frazioni successive alternativamente minori e maggiori di $\sqrt{2}$.

24. Dopo aver riconosciuto la forma (z) della generazione tecnica di qualunque funzione in *frazione continua*, ci rimane da dare la determinazione gene-

rale delle quantità A_0, A_1, A_2, ec., che entrano in questa frazione. Questo è quello che faremo servendoci del *metodo dei coefficienti indeterminati* (*Vedi* Coefficienti), per dare un nuovo esempio della fecondità di questo metodo.

$F(x)$ essendo una funzione qualunque di x, e φx un'altra funzione egualmente qualunque presa per misura, abbiamo generalmente, A_0, A_1, A_2, ec. essendo de' coefficienti i di cui valori sono conosciuti (*Vedi* Serie),

$$F(x)=A_0+A_1\varphi x+A_2\varphi x^2+A_3\varphi x^3+A_4\varphi x^4+\text{ec.}$$

Ma possiamo fare successivamente, A'_0, A'_1, A'_2, ec., A''_0, A''_1, A''_2, ec. A'''_0, A'''_1, A'''_2, ec., essendo dei coefficienti indeterminati.

$$\left.\begin{array}{l} A_1\varphi x+A_2\varphi x^2+A_3\varphi x^3+\text{ec.}=\dfrac{\varphi x}{A'_0+A'_1\varphi x+A'_2\varphi x^2+A'_3\varphi x^3+\text{ec.}} \\[2ex] A'_1\varphi x+A'_2\varphi x^2+A'_3\varphi x^3+\text{ec.}=\dfrac{\varphi x}{A''_0+A''_1\varphi x+A''_2\varphi x^2+A''_3\varphi x^3+\text{ec.}} \\[2ex] A''_1\varphi x+A''_2\varphi x^2+A''_3\varphi x^3+\text{ec.}=\dfrac{\varphi x}{A'''_0+A'''_1\varphi x+A'''_2\varphi x^2+A'''_3\varphi x^3+\text{ec.}} \\[2ex] \text{ec.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right\}\ldots(b).$$

Queste espressioni sostituite le une nelle altre ci danno

$$(c)\ldots F(x)=A_0+\cfrac{\varphi x}{A'_0+\cfrac{\varphi x}{A''_0+\cfrac{\varphi x}{A'''_0+\text{ec.}}}}.$$

Così, si tratta di ottenere i valori delle quantità indeterminate A_0, A'_0, A''_0, ec.

Ora, dividendo la prima eguaglianza per φx, e rovesciando i rapporti; abbiamo

$$A'_0+A'_1\varphi x+A'_2\varphi x^2+\text{ec.}=\frac{1}{A_1+A_2\varphi x+A_3\varphi x^2+\text{ec.}}$$

e, questa eguaglianza essendo indipendente da qualunque valore particolare di x, dando ad x il valore che rende $\varphi x=0$, avremo

$$A'_0=\frac{1}{A_1}$$

e quindi

$$A'_1\varphi x+A'_2\varphi x^2+\text{ec.}=\frac{1}{A_1+A_2\varphi x+\text{ec.}}-\frac{1}{A_1}$$

$$=-\frac{A_2\varphi x+A_3\varphi x^2+A_4\varphi x^3+\text{ec.}}{A_1A_1+A_1A_2\varphi x+A_1A_3\varphi x^2+\text{ec.}}.$$

Sostituendo questi valori nella seconda eguaglianza, dopo averla primieramente divisa per φx, otterremo

$$A''_0+A''_1\varphi x+A''_2\varphi x^2+\text{ec.}=-\frac{A_1A_1+A_1A_2\varphi x+A_1A_3\varphi x^2+\text{ec.}}{A_2+A_3\varphi x+A_4\varphi x^2+\text{ec.}},$$

e quest' ultima dovendo sussistere egualmente qualunque sieno i valori di x faremo come sopra $\varphi x = o$, e troveremo

$$A''_o = -\frac{A_1 A_1}{A_2}.$$

Il valore di A''_o essendo così determinato, sottraendolo dai due membri dell' ultima eguaglianza, avremo

$$A''_1\varphi x + A''_2\varphi x^2 + \text{ec.} = -\frac{A_1A_1 + A_1A_2\varphi x + \text{ec.}}{A_2 + A_3\varphi x + \text{ec.}} + \frac{A_1A_1}{A_2} =$$

$$= -\frac{A_1[(A_2A_2 - A_1A_3)\varphi x + (A_2A_3 - A_1A_4)\varphi x^2 + \text{ec.}]}{A_2A_2 + A_2A_3\varphi x + A_2A_4\varphi x^2 + A_2A_5\varphi x^3 + \text{ec.}}$$

il che possiamo mettere sotto la forma

$$A''_1\varphi x + A''_2\varphi x^2 + \text{ec.} = -\frac{A_1B_3\varphi x + A_1B_4\varphi x^2 + \text{ec.}}{A_2A_2 + A_2A_3\varphi x + A_2A_4\varphi x^2 + \text{ec.}}$$

facendo per abbreviare

$$\left.\begin{array}{l} A_2A_2 - A_1A_3 = B_3 \\ A_2A_3 - A_1A_4 = B_4 \\ A_2A_4 - A_1A_5 = B_5 \\ \quad\text{ec.} \qquad\quad \text{ec.} \\ A_2A_{(n-1)} - A_1A_n = B_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (d).$$

Se sostituiamo quest' ultimo valore nella terza dell'eguaglianze (b), dopo averla divisa per φx, troveremo

$$A'''_o + A'''_1\varphi x + \text{ec.} = -\frac{A_2A_2 + A_2A_3\varphi x + A_2A_4\varphi x^2 + \text{ec.}}{A_1B_3 + A_1B_4\varphi x + A_1B_5\varphi x^2 + \text{ec.}},$$

nella quale facendo $\varphi x = o$ avremo

$$A'''_o = -\frac{A_2A_2}{A_1B_3},$$

continuando come sopra avremo ancora

$$A_1'''\varphi x + A'''_2\varphi x^2 + \text{ec.} = -\frac{A_2A_2 + A_2A_3\varphi x + \text{ec.}}{A_1B_3 + A_1B_4\varphi x + \text{ec.}} + \frac{A_2A_2}{A_1B_3} =$$

$$= -\frac{A_2[(A_3B_3 - A_2B_4)\varphi x + (A_4B_3 - A_2B_5)\varphi x^2 + \text{ec.}]}{A_1B_3B_3 + A_1B_3B_4\varphi x + A_1B_3B_5\varphi x^2 + \text{ec.}},$$

ovvero

$$A'''_1\varphi x + A'''_2\varphi x^2 + \text{ec.} = -\frac{A_2C_4\varphi x + A_2C_5\varphi x^2 + \text{ec.}}{A_1B_3B_3 + B_1B_3B_4\varphi x + \text{ec.}},$$

facendo egualmente per abbreviare

$$\left.\begin{array}{l} B_3A_3 - A_2B_4 = C_4 \\ B_3A_4 - A_2B_5 = C_5 \\ B_3A_5 - A_2B_6 = C_6 \\ \quad\text{ec.} \qquad\quad \text{ec.} \\ B_3A_{n-1} - A_2B_n = C_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (d),$$

con l'aiuto di questo valore, troveremo, procedendo sempre nella medesima maniera

$$A''''_0 = -\frac{A_1 B_3 B_5}{A_2 C_4}.$$

Finalmente, continuando la medesima operazione, e facendo successivamente

$$\left.\begin{array}{l} C_4B_4 - B_3C_5 = D_5 \\ C_4B_5 - B_3C_6 = D_6 \\ C_4B_6 - B_3C_7 = D_7 \\ \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ C_4B_{n-1} - B_3C_n = D_n \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (d),$$

$$\left.\begin{array}{l} D_5C_5 - C_4D_6 = E_5 \\ D_5C_6 - C_4D_7 = E_7 \\ D_5C_7 - C_4D_8 = E_8 \\ \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \\ D_5C_{n-1} - C_4D_n = E_n \\ \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (d)$$

troveremo

$$A^{V}_0 = -\frac{A_2 C_4 C_4}{A_1 B_3 D_5},$$

$$A^{VI}_0 = -\frac{A_1 B_3 D_5 D_5}{A_2 C_4 E_6},$$

$$A^{VII}_0 = -\frac{A_2 C_4 E_6 E_5}{A_1 B_3 D_5 F_7}.$$

ec. ec.

Esaminando le espressioni delle quantità A'_0, A''_0, A'''_0, ec., si vede facilmente che prendendo i loro prodotti due a due, all'eccezione però del primo, questi prodotti hanno una legge di formazione degna di osservazione.

$$A''_0 A'''_0 = \frac{A_1 A_2}{B_3},$$

$$A'''_0 A''''_0 = \frac{A_2 B_3}{C_4},$$

$$A''''_0 A^{V}_0 = \frac{B_3 C_4}{D_5},$$

$$A^{V}_0 A^{VI}_0 = \frac{C_4 D_5}{E_6}.$$

ec. ec.

La costruzione di queste quantità prova evidentemente che la forma la più semplice della frazione continua che dà la generazione di $F(x)$ sarebbe quella ove i coefficienti A'_0, A''_0, ec. entrassero così due a due; ma se dividiamo succes-

sivamente ciascuna frazione integrante pel suo denominatore, l'espressione (c) diverrà

$$F(x) = A_0 + \cfrac{\frac{1}{A'_0}\varphi x}{1 + \cfrac{\frac{1}{A'_0 A''_0}\varphi x}{1 + \cfrac{\frac{1}{A''_0 A'''_0}\varphi x}{1 + \text{ec.}}}},$$

ovvero semplicemente

$$(e) \ldots F(x) = M_0 + \cfrac{M_1 \varphi x}{1 + \cfrac{M_2 \varphi x}{1 + \cfrac{M_3 x}{1 + \cfrac{M_4 x}{1 + \text{ec.}}}}}.$$

I coefficienti M_0, M_1, M_2, ec. essendo dati dalle espressioni

$$\left.\begin{array}{ll} M_0 = & A_0 \\ M_1 = & A_1 \\ M_2 = & -\dfrac{A_2}{A'} \\ M_3 = & \dfrac{B_3}{A_1 A_2} \\ M_4 = & \dfrac{C_4}{A_2 B_3} \\ M_5 = & \dfrac{D_5}{B_3 C_4} \\ M_6 = & \dfrac{E_6}{C_4 D_5} \\ \text{ec.} & \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (f).$$

Così conoscendo i coefficienti dello sviluppo in serie di una funzione qualunque, possiamo sempre, con l'aiuto delle precedenti formule, sviluppare questa medesima funzione in frazione continua, il che dà una generazione interamente differente della serie e sempre più convergente.

25. Per ottenere i valori successivi della funzione $F(x)$ i quali risultano dalla somma di uno, due, tre, ec. termini della frazione continua, bisogna necessariamente modificare le forme de' mediatori (5); facendo perciò

$$\begin{array}{ll} P_0 = M_0 & Q_0 = 1 \\ P_1 = P_0 + M_1 \varphi x & Q_1 = Q_0 \\ P_2 = P_1 + M_2 \varphi x . P_0 & Q_2 = Q_1 + M_2 \varphi x . Q_0 \\ P_3 = P_2 + M_3 \varphi x . P_1 & Q_3 = Q_2 + M_3 \varphi x . Q_1 \\ P_4 = P_3 + M_4 \varphi x . P_2 & Q_4 = Q_3 + M_4 \varphi x . Q_2 \\ \text{ec.} \quad \text{ec.} & \text{ec.} \quad \text{ec.} \\ P_m = P_{m-1} + M_m \varphi x . P_{m-2} & Q_m = Q_{m-1} + M_m \varphi x . Q_{m-2} \end{array}$$

Le frazioni successive alternativamente minori e maggiori di $F(x)$ saranno

$$\frac{P_0}{Q_0},\quad \frac{P_1}{Q_1},\quad \frac{P_2}{Q_2},\quad \frac{P_3}{Q_3},\ \text{ec.}$$

26. Avanti di proseguire, applichiamo le precedenti formule ad alcuni casi particolari. Si abbia prima di tutto $F(x)=(1+x)^m$.

Lo sviluppo di $(1+x)^m$ in serie è per la formula del Newton

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\text{ec.}$$

Abbiamo perciò in questo caso

$$A_0=1$$
$$A_1=m,$$
$$A_2=\frac{m(m-1)}{1\,.\,2},$$
$$A_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3},$$
$$\text{ec.}\qquad\text{ec.}$$
$$A_n=\frac{m(m-1)(m-2)\,.\,.\,.\,.\,(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,(n-1)},$$

e di più la funzione ςx, presa per misura, è semplicemente x.

Costruiamo le quantità generali B_n, C_n, D_n, E_n, ec. (d) troveremo, impiegando per abbreviare la notazione delle fattorielle (*vedi* questa parola)

$$B_n=\frac{(n-2)m^{2|1}\,.\,m^{n-1|-1}}{1^{2|1}\,.\,1^{n|1}},$$

$$C_n=\frac{2(3-n)m^{2|1}\,.\,m^{2|-1}\,.\,m^{n-1|-1}}{1^{2|1}\,.\,1^{3|1}\,.\,1^{n|1}},$$

$$D_n=\frac{(n-3)(4-n)(2+m)m^{2|1}m^{2|1}m^{2|-1}m^{2|-1}m^{n-2|-1}}{1^{2|1}\,.\,1^{3|1}\,1^{4|1}\,.\,1^{n|1}},$$

$$\text{ec}\qquad\text{ec.}$$

con l'aiuto di queste quantità, le espressioni (f) daranno

$$M_0=1$$
$$M_1=m$$
$$M_2=\frac{(1-m)}{1\,.\,2}$$
$$M_3=\frac{(1+m)}{2\,.\,3}$$
$$M_4=\frac{(2-m)}{2\,.\,3}$$
$$M_5=\frac{(2+m)}{2\,.\,5}$$
$$M_6=\frac{(3-m)}{2\,.\,5}$$
$$M_7+\frac{(3+m)}{2\,.\,7}$$
$$\text{ec.}\qquad\text{ec.}$$

di cui la legge è evidente.

Digitized by Google

Così lo sviluppo del binomio $(1+x)^m$ in frazione continua è

$$(1+x)^m = 1 + \cfrac{mx}{1 + \cfrac{\frac{(1-m)x}{2.1}}{1 + \cfrac{\frac{(1+m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2-m)x}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{(2+m)x}{2.5}}{1 + \text{ec.}}}}}}.$$

Allorchè m è un nnmero intero positivo o negativo, la frazione continna ha sempre un numero finito di termini; in tntti gli altri casi, questo nnmero è infinito.

27. Si abbia per secondo esempio, $F(x) = \log x$, log indicando il logaritmo naturale di x. Si ha la serie (*Vedi* Logaritmo)

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \text{ec.}$$

In questo case, la funzione φx è $x-1$, e i coefficienti A_1, A_2, ec., sono la serie delle frazioni $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ec., di maniera che si ha in generale

$$A_n = \frac{1}{n}$$

Formando le quantità B_n, C_n, D_n, ec., si ottiene

$$\log x = \cfrac{(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.3}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{2}{2.3}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{2}{2.5}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{3}{2.5}(x-1)}{1 + \text{ec.}}}}}}}.$$

28. Prendiamo per ultimo esempio $F(x) = e$, e essendo la *base* dei logaritmi naturali il di cui sviluppo in serie è

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{ec.}$$

In questo caso particolare $\varphi x = 1$, e il coefficiente generale

$$A_n = \frac{1}{1^{n|1}}.$$

Troveremo

$$B_n = \frac{n-2}{1^{2|1} \cdot 1^{n|1}},$$

$$C_n = \frac{3-n}{1^{3|1} \cdot 1^{n|1}},$$

$$D_n = \frac{(3-n)(4-n)}{1^{2|1} \cdot 1^{3|1} \cdot 1^{4|1} \cdot 1^{n|1}},$$

$$E_n = \frac{(4-n)(n-5)}{1^{2|1} \cdot 1^{2|1} \cdot 1^{3|1} \cdot 1^{4|1} \cdot 1^{5|1} \cdot 1^{n|1}},$$

ec ec.

e quindi

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{\frac{1}{2}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.3}}{1 - \cfrac{\frac{1}{2.3}}{1 + \cfrac{\frac{1}{2.5}}{1 - \cfrac{\frac{1}{2.5}}{1 + \text{ec.}}}}}}}.$$

29. È importante di fare osservare che la generazione di una quantità ottenuta, col mezzo delle frazioni continue, e con i processi che abbiamo esposto, è essenzialmente differente dalla *trasformazione* delle serie in frazioni continue data dall'Eulero nella sua introduzione all'analisi infinitesimale. Questa trasformazione non produce alcuna generazione nuova o distinta da quella che è operata dalla serie essa stessa, come potremo assicurarcene rammentandoci in questo punto del metodo dell' Eulero.

X essendo una funzione qualunque sia

$$X = a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\eta}{f + \text{ec.}}}}}}$$

la sua generazione in frazione continua.

Prendendo successivamente la somma di uno, due, tre, ec., termini di questa frazione, si avrà

$$a \qquad = a$$

$$a + \frac{\alpha}{b} \qquad = \frac{ab+\alpha}{b}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\varphi}{c}} \qquad = \frac{abc+\varphi\alpha+\alpha c}{bc+\varphi}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\varphi}{c + \cfrac{\gamma}{d}}} \qquad = \frac{abcd+\varphi\alpha d+\alpha cd+\gamma\alpha b+\alpha\gamma}{bcd+\varphi d+\gamma b}$$

ec. ec.

Egli è evidente che queste frazioni successive, prendendo $\frac{a}{1}$ per la prima, sono alternativamente minori e maggiori di X; ma prendendo le differenze di ciascuna di queste frazioni con quella che la segue, si vede facilmente che la differenza fra la prima e la seconda è $\frac{\alpha}{b}$; che la differenza fra la seconda e la terza è $\frac{\alpha\varphi}{b(bc+\varphi)}$; fra la terza e la quarta: $\frac{\alpha\varphi\gamma}{(bc+\varphi)(bcd+\varphi d+\gamma b)}$; ec., ec.: così possiamo esprimere il valore della frazione continua per un seguito di termini in questa maniera

$$X = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\varphi}{b(bc+\varphi)} + \frac{\alpha\varphi\gamma}{(bc+\varphi)(bcd+\varphi d+\gamma b)} - \text{ec.}$$

Serie di cui il numero dei termini sarà infinito o finito, secondo che la frazione si estenderà o non si estenderà all' infinito.

Supponendo, per semplicizzare, il primo termine a eguale a zero, la frazione continua si trova dunque espressa da una *serie* di cui i termini sono alternativamente positivi e negativi; ed è reciprocamente facilissimo di trasformare un seguito qualunque di termini alternativi in una frazione continua il di cui valore sia eguale alla somma della serie proposta, mentre, sia infatti questa serie.

$$X = A - B + C - D + E - F + \text{ec.}$$

paragonandola con la serie generale della frazione continua, avremo le eguaglianze

$$A = \frac{\alpha}{b}$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\varphi}{bc+\varphi}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\alpha\gamma}{bcd+\varphi d+\gamma b}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc+\varphi)}{bcde+\varphi de+\gamma be+\delta bc+\varphi\delta}$$

ec. ec.

Donde si ricaverà

$$\alpha = Ab$$

$$\varphi = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

$$\eta = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

$$\sigma = \frac{DFfg}{(D-E)(E-F)}$$

ec. ec.

Avendo così trovato i valori dei numeratori α, φ, γ, δ, ec., possiamo prendere arbitrariamente i denominatori b, c, d, e, ec., ma perchè questi numeri, essendo interi, diano dei valori interi ad α, φ, γ, δ, ec., si fa

$b = 1$	donde viene	$\alpha = A$
$c = A - B$;		$\varphi = B$
$d = B - C$;		$\gamma = AC$
$e = C - D$;		$\delta = BD$
$f = D - E$;		$\eta = CE$
ec.		ec.

Così, si ha

$$X = A - B + C - D + E - F + \text{ec.}$$

e potremo esprimere il valore di X per mezzo di una frazione continua, come segue.

$$X = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D + \cfrac{CE}{D - E + \cfrac{DF}{E - F + \text{ec.}}}}}}}$$

Se tutti i termini della serie fossero numeri frazionarii come

$$X = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \text{ec.}$$

si avrebbero per α, φ, γ, δ, $\varkappa$, ec. i seguenti valori

$$\alpha = \frac{b}{A}$$

$$\varphi = \frac{Abc}{B-A}$$

$$\gamma = \frac{B^2cd}{(B-A)(C-B)},$$

$$\delta = \frac{C^2de}{(C-B)(D-C)}$$

$$\varkappa = \frac{D^2ef}{(D-C)(E-D)}$$

ec. ec.

Ora si prendano al solito arbitrariamente i denominatori b, c, d, e, ec. e perchè questi numeri, essendo interi, diano dei valori interi ad α, φ, γ, δ, ec., si fa

$b = A$;	donde viene	$\alpha = 1$
$c = B - A$;		$\varphi = AA$
$d = C - B$;		$\gamma = BB$
$e = D - C$;		$\delta = CC$
ec.		ec.

quindi sostituendo si otterrebbe la frazione continua

$$X = \cfrac{1}{A + \cfrac{AA}{B - A + \cfrac{BB}{C - B + \cfrac{CC}{D - C + \text{ec.}}}}}$$

30 Tali sono le trasformazioni dell' Eulero. Ora, prendendo, nella prima i valori successivi della frazione continua, si ha

$$\frac{A}{1} = A$$

$$\cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B}} = A - B$$

$$\cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C}}} = A - B + C$$

ec. ec.

Vale a dire che questi valori sono identici con quelli che danno i termini della serie proposta, e che conseguentemente le trasformazioni in questione non sono di alcuna utilità.

31. Per meglio provare la differenza delle frazioni continue delle quali abbiamo dato le leggi n.° 24 e 25 con queste ultime, proponiamoci di esprimere in frazione continua la semicirconferenza del circolo di cui il raggio è l' unità. Questo numero, indicandolo per π, è dato dalla serie (*Vedi* Circolo n.° 43)

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{ec.}$$

Servendoci ora delle formule dell' Eulero, facciamo $A = 1$, $B = 3$, $C = 5$, $D = 7$, ec., ed avremo

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + \text{ec.}}}}}}}$$

ed è questa la famosa frazione di Brounker. I suoi valori successivi, sono, riducendoli in frazioni decimali

somma di 1 termine	1
2	0,6666666
3	0,8666666
4	0,7238095
5	0,8347205
6	0,7440115
7	0,8209347
ec	ec.

Donde si vede che sette termini non danno un solo decimale esatto.

Riprendiamo ora le formule del numero 25 e facciamo

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = -\frac{1}{3},\ A_3 = \frac{1}{5},\ A_4 = -\frac{1}{7},\ A_5 = \frac{1}{9},\ \text{ec.}$$

prendendo di più la misura φx per *unità*. Costruiamo le quantità (*d*) B_n, C_n, D_n, ec. e con queste quantità, troveremo

$$M_0 = 0,\ M_1 = 1,\ M_2 = \frac{1}{3},\ M_3 = \frac{4}{3.5},$$

$$M_4 = \frac{9}{5.7},\ M_5 = \frac{16}{7.9},\ M_6 = \frac{25}{9.11},$$

$$M_7 = \frac{36}{11.13},\ M_8 = \frac{49}{13.15},\ \text{ec.}$$

in generale

$$M_y = \frac{(y-1)^2}{(2y-3)(2y-1)},$$

donde

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{\cfrac{3.5}{1+\cfrac{9}{\cfrac{5.7}{1+\cfrac{16}{\cfrac{7.9}{1+\text{ec.}}}}}}}}}}$$

frazione continua i di cui valori successivi sono

somma di	1 termine	1,0000000
	2	0,7500000
	3	0,7916666
	4	0,78433120
	5	0,7855855
	6	0,7853657
	7	0,7854037
	ec.	ec.

Ora, abbiamo veduto (Circolo n.° 41) che il valore di π è 3,1415926 . . . . Donde

$$\frac{1}{4}\pi = 0,7853981 \ldots\ldots$$

Così la somma di sei termini non differisce, in *meno*, dal vero valore che di meno 3 *cento millesimi*, e la somma di 7 termini non differisce, in *più*, che di meno di 1 *cento millesimo*, approssimazione di già ben superiore al rapporto d'Archimede. La generazione prodotta qui per mezzo della frazione continua differisce dunque essenzialmente da quella che dà la serie; poichè come l'abbiamo dimostrato di sopra, la frazione di Brouuker dà risultamenti identici con quelli di questa serie.

32. La teoria delle frazioni continue, considerata sotto il punto di vista generale che abbiamo indicato, forma una parte importantissima della scienza dei numeri, poichè abbiamo potuto vedere, che queste frazioni costituiscono un modo universale di generazione tecnica spesso più semplice che gli sviluppi in serie, e sempre preferibile sotto il rapporto della convergenza. Ora completeremo diversi punti essenziali di questa teoria, ed esamineremo ciò che chiamasi frazioni continue periodiche, di cui fin qui non abbiamo parlato.

33. X esprimendo una quantità qualunque, la forma la più generale della sua generazione tecnica in frazione continua è

$$X = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \cfrac{b_4}{a_5 + \text{ec.}}}}}}$$

nella quale le frazioni parziali $\frac{b_0}{a_1}$, $\frac{b_1}{a_2}$, $\frac{b_2}{a_3}$, ec. hanno il nome di *frazioni integranti*, che conserveremo loro.

Se prendiamo successivamente la somma di a_0 con una, due, tre, ec. ec. frazioni integranti, otterremo le riduzioni consecutive.

$$a_0 + \frac{b_0}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + b_0}{a_1},$$

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2}} = \frac{a_0 a_1 a_2 + b_0 a_2 + b_1 a_0}{a_1 a_2 + b_1}$$

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3}}} = \frac{a_0 a_1 a_2 a_3 + b_0 a_2 a_3 + b_1 a_0 a_3 + b_2 a_1 a_0 + b_0 b_2}{a_1 a_2 a_3 + b_1 a_3 + b_2 a_1},$$

ec. = ec.

alle quali possiamo dare le seguenti forme, più adattate a rendere sensibile la costruzione del numeratore e del denominatore di ciascuna somma, per mezzo dei numeratori e dei denominatori delle precedenti somme;

$$\frac{a_1 a_0 + b_0}{a_1}$$

$$\frac{a_2(a_1 a_0 + b_0) + b_1 a_0}{a_2 a_1 + b_1}$$

$$\frac{a_3[a_2(a_1 a_0 + b_0) + b_1 a_0] + b_2(a_1 a_0 + b_0)}{a_3(a_2 a_1 + b_1) + b_2 a_1}$$

ec. . . . . ec.

Formando dunque due serie delle quantità P_0, P_1, P_2, ec Q_0, Q_1, Q_2, per mezzo della legge semplicissima di costruzione

$$\left.\begin{array}{ll}
P_0 = a_0 & Q_0 = 1 \\
P_1 = a_1 P_0 + b_0 & Q_1 = a_1 Q_0 \\
P_2 = a_2 P_1 + b_1 P_0 & Q_2 = a_2 Q_1 + b_1 Q_0 \\
P_3 = a_3 P_2 + b_2 P_1 & Q_3 = a_3 Q_2 + b_2 Q_1 \\
P_4 = a_4 P_3 + b_3 P_2 & Q_4 = a_4 Q_3 + b_3 Q_2 \\
\text{ec.} = \text{ec.} & \text{ec.} = \text{ec.} \\
P_y = a_y P_{y-1} + b_{y-1} P_{y-2} & Q_y = a_y Q_{y-1} + b_{y-1} Q_{y-2}
\end{array}\right\} \ldots (a_1)$$

avremo evidentemente

$$\frac{P_0}{Q_0} = a_0,$$

$$\frac{P_1}{Q_1} = a_0 + \frac{b_0}{a_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} = a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2}},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

In generale, $\frac{P_y}{Q_y}$ sarà il valore dato dalle y prime frazioni integranti, o il valore della frazione continua non facendo conto di tutto ciò che segue il denominatore a_y.

Ora le quantità successive $\frac{P_0}{Q_0}$, $\frac{P_1}{Q_1}$, $\frac{P_2}{Q_2}$, ec., che chiameremo *frazioni principali* sono alternativamente minori e maggiori del valore totale X della frazione continua, ed è essenziale prima di tutto, di potere determinare il grado d'approssimazione che si ottiene allorchè si sceglie una qualunque di queste frazioni pel valore approssimato di X.

34 Se prendiamo la differenza di ciascuna frazione principale con quella che la segue immediatamente, troveremo

$$\frac{P_0}{Q_0} - \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_0Q_1 - P_1Q_0}{Q_0Q_1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1} - \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{Q_1Q_2},$$

$$\frac{P_2}{Q_2} - \frac{P_3}{Q_3} = \frac{P_2Q_3 - P_3Q_2}{Q_2Q_3},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

e in generale

$$\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} - \frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_{y-1}Q_y - P_yQ_{y-1}}{Q_{y-1}Q_y}.$$

Queste differenze possono servire di *limiti* per valutare il grado d'approssimazione di ciascuna frazione principale, mentre il valore totale X essendo compreso fra $\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}}$ e $\frac{P_y}{Q_y}$, si ha necessariamente

$$\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} - \frac{P_y}{Q_y} > \frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} - X.$$

Digitized by Google

Così prendendo $\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}}$ per valore approssimato di X, l'errore *in più* o in *meno* sarà più piccolo di

$$\frac{P_{y-1}Q_y - P_y Q_{y-1}}{Q_{y-1}\,Q_y}$$

35. I numeratori della serie delle differenze principali consecutive hanno fra loro delle relazioni che è necessario di conoscere. Consideriamo le due differenze successive.

$$\frac{P_{y-2}}{Q_{y-2}} - \frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} = \frac{P_{y-2}\,Q_{y-1} - P_{y-1}\,Q_{y-2}}{Q_{y-2}\,Q_{y-1}},$$

$$\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} - \frac{P_y}{Q_y} = \frac{P_{y-1}Q_y - P_y Q_{y-1}}{Q_{y-1}\,Q_y},$$

e osserviamo che dalla legge di costruzione (a) si ha

$$P_y = a_y\,P_{y-1} + b_{y-1}P_{y-2}$$
$$Q_y = a_y\,Q_{y-1} + b_{y-1}\,Q_{y-2}$$

Se moltiplichiamo la prima di queste uguaglianze per Q_{y-1}, e la seconda per P_{y-1}, verrà

$$P_y\,Q_{y-1} = a_y\,P_{y-1}\,Q_{y-1} + b_{y-1}\,P_{y-2}\,Q_{y-1}$$
$$P_{y-1}\,Q_y = a_y\,P_{y-1}\,Q_{y-1} + b_{y-1}\,P_{y-1}\,Q_{y-2}$$

donde sottraendo la prima eguaglianza dalla seconda,

$$P_{y-1}\,Q_y - P_y\,Q_{y-1} = b_{y-1}\,[P_{y-1}Q_{y-2} - P_{y-2}\,Q_{y-1}]$$

eguaglianza che potremo mettere sotto la forma

$$P_{y-1}\,Q_y - P_y\,Q_{y-1} = -b_{y-1}\,[P_{y-2}\,Q_{y-1} - P_{y-1}\,Q_{y-2}]\,.$$

Risulta da questa espressione che il numeratore di una differenza qualunque è eguale al numeratore della differenza precedente, preso con un segno contrario e moltiplicato pel numeratore dell'ultima frazione integrante impiegata. Indicando per D_y il numeratore di una differenza, abbiamo dunque la relazione generale.

$$D_y = -b_{y-1}\,D_{y-1}\,,$$

e, quindi, le eguaglianze

$$D_{y-1} = -b_{y-2}\,D_{y-2}\,,$$
$$D_{y-2} = -b_{y-3}\,D_{y-3}$$

. . . . . .

$$D_3 = -b_2 D_2,$$
$$D_2 = -b_1 D_1,$$

di cui l'ultima si riduce a

$$D_2 = -b_1 X - b_0,$$

a motivo di

$$D_1 = P_0Q_1 - P_1Q_0 = a_0a_1 - a_1a_0 - b_0.$$

Sostituendo i valori di D_2 in quello di D_3, poi quello di D_3 in quello di D_4, e così di seguito, otterremo per la costruzione assoluta di D_y, l'espressione

$$D_y = (-1)^y . b_0 . b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_{y-1}$$

il che ci dà per la differenza generale

$$\frac{P_{y-1}}{Q_{y-1}} - \frac{P_y}{Q_y} = (-1)^y . \frac{b_0 . b_1 . b_2 . b_3 \ldots . b_{y-1}}{Q_{y-1} Q_y} \ldots\ldots (b).$$

Allorchè tutti i numeratori delle frazioni integranti sono eguali fra loro, questa differenza generale è semplicemente, b indicando il numeratore comune,

$$(-1)^y . \frac{b^y}{Q_{y-1} Q_y}.$$

Facendo $b = 1$, il che propriamente succede nelle frazioni continue numeriche, si ottiene per l'espressione generale della differenza fra due frazioni principali consecutive

$$(-1)^y . \frac{1}{Q_{y-1} Q_y},$$

come l'abbiamo già dimostrato (n.° 18)

36. Queste relazioni generali essendo stabilite, procediamo all'esame delle frazioni continue periodiche, vale a dire delle frazioni continue composte di un numero determinato di frazioni integranti che si riproducono nel medesimo ordine all'infinito. Tali sono, per esempio, le frazioni

$$\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \text{ec.}}}}} \qquad \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{ec.}}}}},$$

di cui la prima non ha per periodo che una sola frazione integrante $\frac{1}{a}$, e la seconda due frazioni $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$. Qualunque sia il numero delle frazioni integranti di un periodo, il valore totale della frazione continua è, come lo vedremo, una quantità irrazionale del secondo grado.

Indichiamo con x il valore incognito della frazione continua periodica ad una sola frazione integrante $\frac{1}{a}$, o poniamo

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \text{ec.}}}}$$

Alcuna differenza finita non potendo esistere fra i valori della frazione continua presa partendo dalla prima, o dalla seconda frazione integrante, abbiamo evidentemente ancora

$$x = \frac{1}{a+x},$$

donde

$$ax + x^2 = 1,$$

equazione del secondo grado che dà per valore di x

$$x = -\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+4)}.$$

Sia per esempio, $a = 2$, si ha

$$x = -1 + \frac{1}{2}\sqrt{8} = -1 + \sqrt{2}.$$

Così

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ec.}}}}}$$

Sia ancora $a = 6$; il che dà $x = -3 + \sqrt{10}$, avremo egualmente

$$\sqrt{10} = 3 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \text{ec.}}}}}$$

37. Indichiamo sempre con x il valore della frazione continua a periodi di due frazioni integranti $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, avremo, tagliando la frazione dopo il primo periodo,

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}};$$

donde

$$x = \frac{b+x}{ab+ax+1};$$

e quindi

$$ax^2 + abx = b,$$

equazione del secondo grado, dalla quale si ricava

$$x = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left[\frac{ab^2+4b}{4a}\right]}.$$

Dunque

$$\sqrt{\left[\frac{ab^2+4b}{4a}\right]} = \frac{b}{2} + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{ec.}}}}}$$

Nel caso, per esempio, di $a=2$, $b=4$, si avrebbe

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \text{ec.}}}}}$$

Ed è facile vedere che seguendo il medesimo metodo si riporterebbe ad una quantità irrazionale del secondo grado il valore di una frazione continua periodica qualunque.

38. Reciprocamente, una quantità irrazionale del secondo grado essendo data, possiamo sempre svilupparla in frazione continua periodica. Ecco prima di tutto il processo conosciuto. Sia proposto $\sqrt{11}$; il valore di questa radice essendo compresa fra 3 e 4, poniamo

$$\sqrt{11} = 3 + \frac{1}{A},$$

e prendiamo da questa equazione il valore di A, il che somministra

$$A = \frac{1}{\sqrt{11}-3}.$$

Moltiplicando i due termini del secondo membro per $\sqrt{11}+3$, verrà

$$A = \frac{\sqrt{11}+3}{2},$$

a motivo che $(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3) = 11-3^2 = 2$. Ora, il valore del numeratore del secondo membro essendo fra $3+3=6$, e $4+3=7$, quello di A è fra $\frac{6}{2}$ e $\frac{7}{2}$; esso dà 3 più una frazione che indicheremo per $\frac{1}{B}$, ponendo

$$A = \frac{\sqrt{11}+3}{2} = 3 + \frac{1}{B},$$

avremo dunque di già

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{B}};$$

ma

$$\frac{1}{B}=\frac{\sqrt{11}+3}{2}-3$$

e per conseguenza

$$B=\frac{2}{\sqrt{11}-3}.$$

Moltiplicando i due termini della frazione per $\sqrt{11}+3$, verrà

$$B=\frac{2(\sqrt{11}+3)}{2}=\sqrt{11}+3,$$

donde potremo porre

$$B=\sqrt{11}+3=6+\frac{1}{C};$$

così

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{C}}}.$$

L' ultima equazione dando

$$\frac{1}{C}=\sqrt{11}+3-6=\sqrt{11}-3,$$

e

$$C=\frac{1}{\sqrt{11}-3},$$

si vede che il valore di C è il medesimo di quello di A, di modo che partendo da A, o da C, non possiamo trovare che la serie dei medesimi denominatori 3 e 6 all' infinito. Si ha dunque definitivamente

$$\sqrt{11}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{6+\text{ec.}}}}}$$

39. Tutto l' artifizio di questa trasformazione consiste a determinare così i denominatori delle frazioni integranti successive, fino a tanto che si sia trovato per uno di questi denominatori un' espressione identica con quella di un denominatore precedente; si conosce allora tutte le frazioni integranti di un perio-

do, e, per conseguenza, la frazione continua essa medesima. Si troverebbe, in questa maniera, per $\sqrt{6}$, per esempio

$$\sqrt{6} = 2 + \frac{1}{A},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} = 2 + \frac{1}{B}$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{6}-2} = \frac{2(\sqrt{6}+2)}{2} = 4 + \frac{1}{C},$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{6}-2};$$

arrestando il calcolo a C, perchè l'espressione di C è identica con quella di A, si ha

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \text{ec.}}}}}$$

come l'abbiamo trovato di sopra per mezzo dell'operazione inversa, vale dire partendo dalla frazione continua per ottenere il suo valore totale. Prendiamo per ultimo esempio $\sqrt{13}$; ecco il tipo dei calcoli:

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{1}{A},$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{13}-3} = \frac{\sqrt{13}+3}{4} = 1 + \frac{1}{B},$$

$$B = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3} = 1 + \frac{1}{C},$$

$$C = \frac{3}{\sqrt{13}-2} = \frac{\sqrt{13}+2}{3} = 1 + \frac{1}{D},$$

$$D = \frac{3}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{4} = 1 + \frac{1}{E},$$

$$E = \frac{4}{\sqrt{13}-3} = \sqrt{13}+3 = 6 + \frac{1}{F},$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{13}-3}.$$

Il periodo ricomincia ad F, così

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \text{ec.}}}}}}}$$

40. Ecco ora un altro processo molto più semplice, il quale non esige alcun calcolo di trasformazione. Sia N un numero intero qualunque, ma di cui la radice quadrata è irrazionale. Indichiamo con a la parte intera della radice, e con $\frac{1}{z}$ la sua parte frazionaria, avremo

$$\sqrt{N} = a + \frac{1}{z} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (g).$$

Elevando i due membri di questa eguaglianza al quadrato, otterremo l'equazione.

$$(N - a^2)z^2 = 2az + 1\,;$$

o indicando, per maggior semplicità, $N - a^2$ con b,

$$bz^2 = 2az + 1\,;$$

dividendo i due membri di quest'ultima per bz, verrà

$$z = \frac{2a}{b} + \frac{1}{bz}\,;$$

sostituendo nel secondo membro il suo valore dato da questo secondo membro, avremo

$$z = \frac{2a}{b} + \frac{1}{b\left(\frac{2a}{b} + \frac{1}{bz}\right)}$$

$$= \frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{z}}$$

il che darà nella medesima maniera.

$$z = \frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{z}}}}$$

e così di seguito all'infinito.

Sostituendo il valore sviluppato di z in (e), avremo generalmente

$$(h) \ldots\ldots \sqrt{N} = a + \cfrac{1}{\frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \cfrac{1}{\frac{2a}{b} + \cfrac{1}{2a + \text{ec.}}}}}}}$$

Tutte le volte che $\frac{2a}{b}$ sarà un numero intero, la radice $\sqrt{N}$ sarà data da una frazione continua a periodo di due frazioni integranti; in tutti gli altri casi si riporterà alla forma semplicissima

$$(k) \ldots\ldots \sqrt{N} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \text{ec.}}}}}}$$

Sia, per esempio $N = 13$, si ha allora $a = 3$

$$N - a^2 = 13 - 9 = 4 = b;$$

dunque

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \text{ec.}}}}}$$

41. Allorchè le frazioni integranti $\frac{b}{2a}$ sono molto più piccole dell'unità; le frazioni principali consecutive convergono tanto rapidamente verso il valore totale di $\sqrt{N}$, che non esiste verun mezzo più semplice e meno faticoso, per ottenere i valori approssimati di questa quantità, che quello di effettuare i calcoli, d'altra parte sì facili, indicati dall'espressioni (a). Prendiamo per esempio $\sqrt{487}$, il di cui valore intero è 22, il che dà

$$N = 487, \quad a = 22, \quad b = N - a^2 = 487 - 484 = 3,$$

e quindi,

$$\sqrt{487} = 22 + \cfrac{3}{44 + \cfrac{3}{44 + \cfrac{3}{44 + \text{ec.}}}}$$

Paragonando con le formule generali (a) del (n.° 33), abbiamo

$$a_0 = 22,$$
$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \text{ec.} = 44,$$
$$b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = \text{ec.} = 3;$$

donde

$P_0 = 22,$	$Q_0 = 1,$
$P_1 = 971,$	$Q_1 = 44,$
$P_2 = 42790,$	$Q_2 = 1939,$
$P_3 = 1885673,$	$Q_3 = 85448,$
ec	ec . . . . .

Se non si domandassero che sei decimali esatti alla radice, la terza frazione principale

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{42790}{1939}.$$

Sarebbe di già sufficiente, poichè dall'espressioni (n° 34), si ha

$$\frac{P_2}{Q_2} - \sqrt{487} < - \frac{3^3}{1939 \times 85448},$$

il che dà, riducendo in decimali,

$$\sqrt{487} - \frac{P_2}{Q_2} < 0,0000\,0162 \ldots.$$

Ora,

$$\frac{42790}{1939} = 22,06807633 \ldots.$$

Così, siccome i due ultimi decimali soli possono essere troppo piccoli, si ha con sei decimali esatti

$$\sqrt{487} = 22,068076.$$

La quarta frazione principale $\frac{P_3}{Q_3}$, ridotta in decimali, dà

$$\frac{1885673}{85448} = 22,068\ 076\ 490\ 96 \ldots,$$

di cui le nove prime cifre sono esatte. Per assicurarcene, bisogna calcolare Q_4, affine di avere il limite

$$\frac{3^4}{Q_3 \cdot Q_4}.$$

Si trova $Q_4 = 3765529$; e riducendo la differenza in decimali, viene

$$\frac{81}{85448 \times 3765529} = 0,000\ 000\ 000\ 252 \ldots.$$

Questo è il limite dell'errore in *più* che si può commettere, prendendo

$\frac{P_3}{Q_4}$ per il valore di $\sqrt{487}$; si ha dunque, con nove decimali esatti,

$$\sqrt{487} = 22,068\,076\,490.$$

Questo esempio è sufficiente per provare l'utilità delle frazioni continue nell'estrazione delle radici quadrate.

42. Qualunque siano i vantaggi che abbiamo fatti rilevare, l'uso delle frazioni continue, per l'estrazione delle radici, sarebbe ben limitato se esso non potesse estendersi alle radici dei gradi superiori al secondo; ma questa estensione ha luogo, ed esporremo un metodo generale il quale abbraccia gli irrazionali di tutti i gradi. Consideriamo la radice del grado m di un numero intero qualunque N, $\sqrt[m]{N}$; indichiamo con a la più gran potenza m contenuta in questo numero, e con b l'eccesso di N sopra a, avremo

$$\sqrt[m]{N} = \sqrt[m]{(a+b)} = \sqrt[m]{a} \cdot \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}},$$

a essendo una potenza esatta, il fattore $\sqrt[m]{a}$ è un numero intero, così, dobbiamo solamente occuparci della quantità irrazionale $\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Per applicare a questa quantità lo sviluppo in frazione continua del binomio $(1+x)^m$ che abbiamo dato (n.° 26), sostituiamo in questo sviluppo $\frac{1}{m}$ ad m, $\frac{b}{a}$ ad x, ed otterremo fatte tutte le riduzioni

$$(l) \ldots \left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m}} = 1 + \cfrac{b}{ma + \cfrac{(m-1)b}{2 + \cfrac{(m+1)b}{3ma + \cfrac{(2m-1)b}{2 + \cfrac{(2m+1)b}{5ma + \text{ec.}}}}}}$$

espressione di cui la legge è evidente, poichè la serie dei numeratori è

$$b, (m-1)b, (m+1)b, (2m-1)b, (2m+1)b, (3m-1)b, (3m+1)b, \text{ec.}$$

e quella dei denominatori

$$ma, 2, 3ma, 2, 5ma, 2, 7ma, 2, 9ma, 2, \text{ec.}$$

Sceglieremo per esempio $\sqrt[4]{17}$, della quale abbiamo trovato per mezzo di un altro processo (*vedi* Estrazione di radici) che il valore con dieci decimali è

$$\sqrt[4]{17} = 1,0305431848.$$

Il paragone dei due calcoli potrà provare la superiorità del presente metodo.

La parte intera di $\sqrt[4]{17}$ essendo 2, $2^4 = 16$ è la quarta potenza più grande

contenuta in 17, e dobbiamo conseguentemente fare $a=16$, $b=1$; questi valori sostituiti in (l), danno

$$\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{16}\right)}=1+\cfrac{1}{64+\cfrac{3}{2+\cfrac{5}{192+\cfrac{7}{2+\cfrac{9}{320+\text{ec.}}}}}}.$$

Abbiamo dunque, paragonando con le formule (a) del n.° 33.

$$a_0=1,\ a_1=64,\ a_2=2,\ a_3=192,\ a_4=2,\ a_5=320,\ \text{ec.}$$
$$b_0=1,\ b_1=3,\ b_2=5,\ b_3=7,\ b_4=9,\ b_5=11,\ \text{ec.}$$

Costruiamo con questi valori le quantità P_y e Q_y, troveremo

$P_0=$	1	$Q_0=$	1
$P_1=$	65	$Q_1=$	64
$P_2=$	133	$Q_2=$	131
$P_3=$	25861	$Q_3=$	25472
$P_4=$	52653	$Q_4=$	51861
$P_5=$	17081709	$Q_5=$	16824768
ec. =	ec.	ec. =	ec.

Avremo così, per la serie delle frazioni principali alternativamente minori e maggiori della radice domandata,

$$\frac{1}{1},\ \frac{65}{64},\ \frac{133}{131},\ \frac{25861}{25472},\ \frac{52653}{51861},\ \text{ec.}$$

La quinta, ridotta in decimali, dà

$$1,0152715913,$$

quantità il di cui prodotto per 2 è il valore approssimato di $\sqrt[4]{17}$, poichè

$$\sqrt[4]{17}=\sqrt[4]{16}\,.\,\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{16}\right)}=2\sqrt[4]{\left(1+\frac{1}{16}\right)}.$$

Abbiamo dunque, arrestandoci a questa quinta frazione principale,

$$\sqrt[4]{17}=4,\ 030543182 6,$$

valore i di cui otto primi decimali sono esatti.

Prendendo la sesta frazione principale

$$\frac{P_5}{Q_5}=\frac{17081709}{16824768},$$

si troverebbe

$$\sqrt[6]{17} = 2,030543184904 \ldots\ldots$$

Per valutare il limite dell'errore, espresso per mezzo della formula (b), cioè

$$(-1)^8 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{Q_6 Q_8},$$

bisogna calcolare Q_8, che si trova eguale a 34220007, donde si vede che l'errore in *più* è minore di

$$\frac{10395}{16824768 \times 34220007},$$

ove non può cader dubbio che sopra l'undecima cifra decimale. Questa undecima cifra essendo zero, diviene evidente che la decima è troppo forte di un'unità, e che si ha solamente con dieci decimali esatti,

$$\sqrt[6]{17} = 2,0305431848.$$

Formando la settima frazione principale

$$\frac{P_6}{Q_6} = \frac{34742601}{34220007},$$

si troverebbe, per le dodici prime decimali della radice,

$$\sqrt[6]{17} = 2,030543184868.$$

43. La convergenza della frazione continua (l) essendo tanto maggiore quanto b è minore rapporto ad a, spesso è utile di prendere per a non la più gran potenza contenuta nel numero proposto N, ma la più gran potenza immediatamente superiore; b diviene allora negativo, il che rende tutte le frazioni integranti negative, e tutte le frazioni principali maggiori del valore totale verso del quale esse convergono decrescendo continuamente. Sia a la più gran potenza del grado m immediatamente maggiore di N, e b la differenza fra a ed N, avremo

$$\sqrt[m]{N} = \sqrt[m]{(a-b)} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{\left[1 - \frac{b}{a}\right]},$$

e

$$(m) \ldots\ldots \sqrt[m]{\left[1 - \frac{b}{a}\right]} = 1 - \cfrac{b}{ma - \cfrac{(m-1)b}{2 - \cfrac{(m+1)b}{3ma - \cfrac{(2m-1)b}{2 - \text{ec.}}}}}.$$

Basterà di dare il segno — alle quantità b_0, b_1, b_2, ec. nelle formule (a), per poterle applicare alle riduzioni consecutive di questa frazione continua.

Se si trattasse, per esempio, di estrarre la radice cubica da 509, il di cui valore è compreso fra 7 e 8, ma molto più vicino a 8 che a 7, poichè $7^3 = 343$ e

$8^3=512$, si farebbe $a=512$, $b=512-509=3$, e sostituendo questi numeri nella formula (m), si avrebbe

$$\sqrt[3]{\left[1-\frac{3}{512}\right]}=1-\cfrac{3}{1536-\cfrac{6}{2-\cfrac{12}{4608-\cfrac{15}{2-\text{ec.},}}}}$$

facendo nelle espressioni (a)

$$a_0=1,\ a_1=1536,\ a_2=2,\ a_3=4608,\ a_4=2,\ \text{ec.},$$
$$b_0=-3,\ b_1=-6,\ b_2=-12,\ b_3=-15,\ \text{ec.},$$

si otterrebbe

$P_0=1$,	$Q_0=1$,
$P_1=1533$,	$Q_1=1536$,
$P_2=3060$,	$Q_2=3066$,
$P_3=14082084$,	$Q_3=14109696$,
ec.=ec.	ec.=ec.

Nel caso in cui si volesse contentarsi di sei decimali esatti alla radice, si potrebbe arrestarsi alla terza frazione principale.

$$\frac{P_2}{Q_2}=\frac{3060}{3066}=0{,}998043052\ldots\ldots,$$

mentre, per mezzo della formula (b), la differenza fra questa frazione, e il valore totale è minore di

$$(-1)^3\,.\,\frac{-3\times-6\times-12}{Q_2\,Q_3},$$

vale a dire di

$$\frac{3\,.\,6\,.\,12}{3066\,.\,14109696},$$

quantità di cui la prima cifra significativa decimale è del nono ordine

Si ha dunque

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{509}&=\sqrt{512}\times0{,}998043052,\\&=8\times0{,}998043052\\&=7{,}984344416,\end{aligned}$$

o solamente $\sqrt[3]{509}=7{,}984344$: la moltiplicazione per 8 non potendo alterare la sesta decimale.

La terza frazione principale, trattata nella medesima maniera, dà

$$\sqrt[3]{509}=7{,}984344376.$$

Questi esempi ci sembrano sufficienti per far comprendere lo spirito, e l'utilità

del metodo; non ci fermeremo sulle riduzioni che si può far subire alle frazioni continue, per la soppressione dei fattori comuni delle frazioni integranti, nè all'altre semplicizzazioni di calcolo le quali si presentano da se medesime.

44. Le formule generali di trasformazione, che abbiamo riportate (n.i 23 e 24 e quelle riportate alla parola Tecnia) contengono la soluzione del problema tecnico della valutazione di una funzione qualunque per mezzo delle frazioni continue.

Ed è applicandole alle serie semplici o primitive

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \text{ec.},$$

$$1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{ec.}$$

le quali danno respettivamente la generazione del *quarto* della semicirconferenza del circolo il di cui raggio è *uno*, e quella della base dei logaritmi naturali che abbiamo ottenuto dalle due frazioni degne d'osservazione, la prima

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 \atop 2 + \cfrac{4}{3.5 \atop 1 + \cfrac{9}{5.7 \atop 1 + \cfrac{16}{7.9 \atop 1 + \text{ec.}}}}}}$$

e la seconda

$$e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 \atop 1 + \cfrac{1}{2.3 \atop 1 - \cfrac{1}{2.3 \atop 1 + \cfrac{1}{2.5 \atop 1 - \text{ec.}}}}}},$$

le quali si possono riportare alle forme più semplici

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{9 + \text{ec.}}}}}} \qquad e = 1 + \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 - \text{ec.}}}}}}$$

Ma queste formule di trasformazione, di cui i dati sono i coefficienti dello sviluppo della frazione proposta in serie, secondo le potenze progressive φx, φx^2, φx^3, ec., di un'altra funzione qualunque φx della variabile x, non sono le più generali che si possono ottenere, mentre lo sviluppo più generale in serie è quello che procede secondo la facoltà progressiva φx, $\varphi x^{2|s}$, $\varphi x^{3|s}$, ec., della funzione arbitraria φx, presa per *misura*, nella valutazione della funzione proposta, e di cui la forma è

$$Fx = A_0 + A_1\varphi x + A_2\varphi x^{2|s} + A_3\varphi x^{3|s} + A_4\varphi x^{4|s} + \text{ec} \ldots\ldots \text{(I)}$$

Faremo in questo punto conoscere le formule di trasformazione, che sono state recentemente ottenute per questa serie universale: y essendo un numero intero qualunque, indichiamo generalmente per a_y il valore della variabile x dato dall'equazione

$$\varphi(x+ys) = 0,$$

e formiamo con i coefficienti A_0, A_1, A_2, ec., della serie (I) una serie di quantità B_3, B_4, B_5, per mezzo della costruzione generale

$$B_y = A_2\left[A_{y-1}\left(\frac{\varphi(x+s)-(y-2)\varphi(a_2+s)}{\varphi(x+(y-1)s)}\right) + \right.$$

$$\left. + (y-2)A_y\varphi(a_2+s)\right] - A_1 A_y.$$

Formiamo inoltre altre serie di quantità C_4, C_5, C_6, ec.; D_5, D_6, D_7, ec.; E_6, E_7, E_8, ec, ec., ec., per mezzo delle costruzioni generali, ed avremo la serie .... (II)

$$C_y = B_3\left[A_{y-1}\left(\frac{\varphi(x+2s)-(y-3)\varphi(a_3+2s)}{\varphi(x+(y-1)s)}\right) + (y-2)A_y\varphi(a_3+2s)\right] -$$

$$-\left[A_2 + A_3\varphi(a_3+2s)\right]B_y,$$

$$D_y = C_4\left[B_{y-1}\left(\frac{\varphi(x+3s)-(y-4)\varphi(a_4+3s)}{\varphi(x+(y-1)s)}\right) + (y-3)B_y\varphi(a_4+3s)\right] -$$

$$-\left[B_3 + B_4\varphi(a_4+3s)\right]C_y,$$

$$E_y = D_5\left[C_{y-1}\left(\frac{\varphi(x+4s)-(y-5)\varphi(a_5+4s)}{\varphi(x+(y-1)s)}\right) + (y-4)C_y\varphi(a_5+4s)\right] -$$

$$-\left[C_4 + C_5\varphi(a_5+4s)\right]D_y,$$

$$F_y = E_6\left[D_{y-1}\left(\frac{\varphi(x+5s)-(y-6)\varphi(a_6+5s)}{\varphi(x+(y-1)s)}\right) + (y-5)D_y\varphi(a_6+5s)\right] -$$

$$-\left[D_5 + D_6\varphi(a_6+5s)\right]E_y,$$

ec. = ec. . . . . .

Calcolando, con l'aiuto di queste quantità la nuova serie avremo . . . (III)

$$M_0 = A_0,$$
$$M_1 = A_1,$$
$$M_2 = -\frac{A_2}{A_1 + A_2\varphi(a_2+s)},$$
$$M_3 = \frac{B_3}{\left[A_1 + A_2\varphi(a_2+s)\right]\left[A_2 + A_3\varphi(a_3+2s)\right]}_{(x=a_3)}$$
$$M_4 = \frac{C_4}{\left[A_2 + A_3\varphi(a_3+2s)\right]\left[B_3 + B_4\varphi(a_4+3s)\right]}_{(x=a_4)}$$
$$M_5 = \frac{D_5}{\left[B_3 + B_4\varphi(a_4+3s)\right]\left[C_4 + C_5\varphi(a_5+4s)\right]}_{(x=a_5)}$$
$$M_6 = \frac{E_6}{\left[C_4 + C_5\varphi(a_4+4s)\right]\left[D_5 + D_6\varphi(a_5+5s)\right]}_{(x=a_6)}$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Gl'indici $(x=a_3)$, $(x=a_5)$, $(x=a_6)$ indicano i valori a_4, a_5, a_6, ec., che bisogna dare alla variabile x in ciascuna di quest' ultime quantità, le quali danno definitivamente

$$(\text{IV}) \ldots F x = M_0 + \cfrac{M_1\varphi x}{1 + \cfrac{M_2\varphi(x+s)}{1 + \cfrac{M_3\varphi(x+2s)}{1 + \cfrac{M_4\varphi(x+3s)}{1 + \text{ec.}}}}}.$$

Quando la funzione arbitraria φx è semplicemente la variabile x, la serie diventa

$$F x = A_0 + A_1 x + A_2 x^{2|s} + A_3 x^{3|s} + A_4 x^{4|s} + \text{ec.} \ldots (\text{V}),$$

vale a dire che essa procede secondo le fattorielle progressive della variabile.

In questo caso particolare si ha $a_y = -ys$; mentre l'equazione

$$x + ys = 0$$

dà $x = -ys$, e tutte le formule precedenti prendono una forma molto più semplice; le quantità ausiliarie B_y, C_y, D_y, ec., si costruiscono allora per mezzo delle espressioni . . . . . (VI)

$$A_2\left[A_2 - A_2 s\right] - A_1 A_3 = B_3,$$
$$A_2\left[A_3 - 2A_3 s\right] - A_1 A_4 = B_4,$$
$$A_2\left[A_4 - 3A_4 s\right] - A_1 A_5 = B_5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_2\left[A_{y-1} - (y-2)A_y s\right] - A_1 A_y = B_y.$$

$$B_3\left[A_3-2A_4s\right]-\left[A_2-A_3s\right]B_4=C_4,$$
$$B_3\left[A_4-3A_5s\right]-\left[A_2-A_3s\right]B_6=C_6,$$
$$B_3\left[A_5-4A_6s\right]-\left[A_2-A_3s\right]B_7=C_6,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$B_3\left[A_{y-1}-(y-2)A_ys\right]-\left[A_2-A_3s\right]B_y=C_y.$$

$$C_4\left[B_6-2B_5s\right]-\left[B_3-B_4s\right]C_5=D_6,$$
$$C_4\left[B_5-3B_6s\right]-\left[B_3-B_4s\right]C_6=D_6,$$
$$C_4\left[B_4-4B_7s\right]-\left[B_3-B_4s\right]C_7=D_7,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_4\left[B_{y-1}-(y-3)B_ys\right]-\left[B_3-B_4s\right]C_y=D_y.$$

$$D_4\left[C_6-2C_6s\right]-\left[C_4-C_6s\right]D_6=E_6,$$
$$D_4\left[C_6-3C_7s\right]-\left[C_6-C_6s\right]D_7=E_7,$$
$$D_5\left[C_7-4C_8s\right]-\left[C_4-C_5s\right]D_8=E_8,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$D_6\left[C_{y-1}-(y-4)C_ys\right]-\left[C_4-C_6s\right]D_y=E_y.$$

$$E_6\left[D_4-2D_7s\right]-\left[D_3-D_6s\right]E_7=F_7,$$
$$E_6\left[D_7-3D_8s\right]-\left[D_3-D_4s\right]E_8=F_8,$$
$$E_6\left[D_8-4D_9s\right]-\left[D_6-D_6s\right]E_9=F_9,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_6\left[D_{y-1}-(y-5)D_ys\right]-\left[D_3-D_4s\right]E_y=F_y.$$

ec. . . . . ec. . . . . =ec.

Se con queste quantità si forma . . . . . (VII)

$$M_0=A_0,$$
$$M_1=A_1,$$
$$M_2=-\frac{A_2}{A_1-A_2s},$$

$$M_3 = \frac{B_3}{(A_1 - A_2 s)(A_2 - A_3 s)},$$

$$M_4 = \frac{C_4}{(A_2 - A_3 s)(B_3 - B_4 s)},$$

$$M_5 = \frac{D_5}{(B_3 - B_4 s)(C_4 - C_5 s)},$$

$$M_6 = \frac{E_6}{(C_4 - C_5 s)(D_5 - D_6 s)},$$

$$M_7 = \frac{F_7}{(D_5 - D_6 s)(E_6 - E_7 s)},$$

$$M_8 - \frac{G_8}{(E_6 - E_7 s)(F_7 - F_8 s)},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.} \ldots\ldots,$$

si avrà

$$\text{(VIII)} \ldots\ldots Fx = M_0 + \cfrac{M_1 x}{1 + \cfrac{M_2(x+s)}{1 + \cfrac{M_3(x+2s)}{1 + \cfrac{M_4(x+3s)}{1 + \text{ec.}}}}}$$

Per dare almeno un' esempio d' applicazione, proponiamoci di ridurre in frazione continua la funzione esponenziale $(1+a)^x$, il di cui sviluppo in serie per mezzo delle fattorielle è

$$1 + ax + \frac{a^2}{1.2} x^{2|-1} + \frac{a^3}{1.2.3} x^{3|-1} + \frac{a^4}{1.2.3.4} x^{4|-1} + \text{ec.},$$

abbiamo

$$s = -1, \text{ e } A_0 = 1, \; A_1 = a, \; A_2 = \frac{a^2}{1.2}, \; A_3 = \frac{a^3}{1.2.3}, \text{ec.}$$

sostituendo questi valori nelle formule (VI), otterremo

$$B_y = \frac{(y-2)a^{y+1}(1+a)}{1^{2|1}.1^{y|1}},$$

$$C_y = -\frac{(y-3)a^{y+3}(1+a)}{1^{3|1}\,1^{y|1}},$$

$$D_y = -\frac{(y-3)(y-4)a^{y+7}(1+a)^3}{1^{2|1}.1^{3|1}.1^{4|1}.1^{y|1}},$$

$$E_y = -\frac{(y-4)(y-5)a^{y+14}(1+a)^6}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}.1^{4|1}.1^{5|1}.1^{y|1}},$$

$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

Digitized by Google

Con quest' ultimi valori troveremo

$$M_0 = 1,$$
$$M_1 = a,$$
$$M_2 = -\frac{a}{2+a},$$
$$M_3 = \frac{a(1+a)}{(2+a)(3+a)},$$
$$M_4 = -\frac{a}{(2+a)(3+a)},$$
$$M_5 = \frac{a(1+a)}{(2+a)(5+3a)},$$
$$M_6 = -\frac{a}{(2+a)(5+3a)},$$
$$M_7 = \frac{a(1+a)}{(2+a)(7+3a)},$$
$$M_8 = -\frac{a}{(2+a)(7+3a)},$$
$$M_9 = \frac{a(1+a)}{(2+a)(9+4a)},$$
$$\text{ec.} = \text{ec.}$$

La legge di queste quantità è evidente. La frazione continua cercata è perciò

$$(1+a)^x = 1 + \cfrac{ax}{1 - \cfrac{\frac{a}{2+a}(x-1)}{1 + \cfrac{\frac{a(1+a)}{(2+a)(3+a)}(x-2)}{1 - \cfrac{\frac{a}{(2+a)(3+a)}(x-3)}{1 + \text{ec.}}}}}$$

ovvero, riportandola alla forma generale (a),

$$(1+a)^x = 1 + \cfrac{ax}{1 + \cfrac{a(x+1)}{(2+a) + \cfrac{a(1+a)(x-2)}{(3+a) - \cfrac{a(x-3)}{(2+a) + \text{ec.}}}}}$$

Quest' espressione presenta uno sviluppo del tutto nuovo delle potenze del binomio, e che, per alcuni valori particolari di a e di x, può dare delle frazioni continue molto più convergenti di quelle che abbiamo ottenuto di sopra.

45. A lord Brouncker, cancelliere d' Inghilterra dobbiamo l' invenzione delle frazioni continue numeriche, egli vi arrivò cercando di trasformare le espressioni indefinite dell' Wallis per la quadratura del circolo. In seguito se ne servì l'Huygens, ed esse furono ben tosto oggetto di ricerche dei più celebri geometri. Daniele Bernoulli, Eulero, Lambert, Lagrange e Legendre perfezionarono successivamente la loro teoria, e le impiegarono in questioni importanti. Eulero e Lambert soprattutto considerarono queste nuove funzioni in una maniera generale o algebrica, ed arrivarono a vere riduzioni delle serie in frazioni continue. In seguito non si è fatto che riprodurre o sviluppare i processi che gli appartengono. Finalmente di recente il signor Wronski, nella seconda sezione della sua *Philosophie de la technie*, ha definitivamente classato le frazioni continue nel numero degli algoritmi tecnici, provando che esse danno sempre una generazione differente dalla serie e molto più convergente. Egli ha, per così dire, esaurito la loro teoria, in quest' opera, considerandole ancora più generalmente che non l'abbiamo fatto ai numeri 22 e 24, e dando tutte le leggi che le regolano. Le belle espressioni (d) ed (f) gli appartengono, almeno nella loro forma sistematica, mentre il processo di riduzione che esse contengono era di già stato trovato dall' Eulero. Ma la lunghezza di questo articolo ci forza a rimandare all' opera del signor Wronski quelli dei nostri lettori che volessero approfondire la teoria delle frazioni continue. In altre parti di questo dizionario vedremo usi importantissimi di queste frazioni.

CONTORNO (*Geom.*) Parola che alcune volte si usa per indicare il perimetro di una figura.

CONTRAPPESO (*Mec.*). Nome generico che vien dato a tutti i pesi i quali servono di ausiliari ad una forza motrice. Nella maggior parte dei moti alternativi, il motore produce solamente l'abbassamento del mobile, e l' elevazione si fa per mezzo di un *contrappeso* o *vice versa*.

CONTRARMONICO (*Algebra*). Tre numeri si dicono in *proporzione contrarmonica*, quando la differenza tra il primo ed il secondo sta alla differenza tra il secondo ed il terzo nel rapporto inverso del primo di questi numeri al terzo: così i numeri A, B, C saranno in proporzione contrarmonica, se si avrà

$$A-B : B-C :: C : A \ldots\ldots (1).$$

Questa proporzione ha preso il nome di *proporzione contrarmonica* per contrapposto della *proporzione armonica*, che ha luogo quando il rapporto delle differenze è eguale al rapporto diretto dei numeri, vale a dire quando si ha

$$A-B : B-C :: A : C.$$

Se la considerazione delle proporzioni contrarmoniche è più curiosa che utile, lo stesso non può dirsi delle proporzioni armoniche, delle quali abbiamo data altrove un' interessante applicazione. *Vedi* Armonico.

Dei tre numeri A, B, C, che sono in proporzione contrarmonica, il secondo prende il nome di *medio contrarmonico*, e si ottiene dall' eguaglianza

$$B = \frac{A^2 + C^2}{A + C},$$

che facilmente si deduce dalla proporzione (1). Così, se si domandasse quale è il medio contrarmonico tra 6 e 3, bisognerebbe fare in questa eguaglianza $A = 6$, $C = 3$, e si troverebbe $B = 5$.

CONTRASCARPA (*Fortificazione*). Si dà questo nome alla parete d'un'opera di fortifirazione che guarda la campagna. Nelle piazze forti, questa parete è rivestita di muro; nelle opere di campagna non è che una semplice scarpa di terra. *Vedi* Fortificazione.

CONTRAZIONE della vena fluida. (*Idraul.*). Sotto questo nome viene indicata la specie di ristringimento che prova un getto d'acqua che sgorga da un serbatoio per mezzo di un orifizio, e di cui l'effetto è di diminuire la quantità d'acqua che sgorgherebbe in un tempo determinato, se questo fenomeno non avesse luogo.

Per rendere sensibile la contrazione di una vena fluida, si prende un vaso trasparente che in una delle sue pareti porti un orifizio pel quale può aver luogo l'afflusso dell'acqua, e si mescola al liquido della polvere fine colorata, come della segatura di legno, ovvero si producono dei piccoli depositi galleggianti nel liquido, come arcade, a cagion d'esempio, salando un poco l'acqua, e gettandovi alcune goccie di nitrato d'argento; si scorgono ad una piccola distanza dell'orifizio, a due o tre centimetri, per un'apertura di un centimetro di diametro, delle molecole fluide dirigersi da tutte le parti, dal fondo, come dai lati, e dalla parte superiore verso l'orifizio, descrivendo delle linee curve e tendenti tutte al centro di quello. Poscia quando vi sono vicine, vi si precipitano con moto accelerratissimo.

Questa convergenza di direzione, che hanno le molecole al loro avvicinarsi all'orifizio, continuano pure ad averla quando esse l'hanno oltrepassato, e ad una distanza facilmente visibile all'orecchio: e ne resulta un ristringimento sensibile nel getto. Basta il far uscire dell'acqua sotto un carico piuttosto sensibile, e per un piccolo orifizio, per iscorgere questo ristringimento del getto fluido a qualche distanza dall'orifizio. Il getto forma una specie di cono o di piramide troncata, la gran base della quale è l'orifizio, e la piccola è al di fuori del vaso: ed è ciò che chiamasi in idrodinamica la *contrazione della vena fluida*.

Così nello sgorgo dell'acqua da un serbatoio per un orifizio praticato nella parete, havvi un punto nel getto fluido in cui la sezione dello sgorgo è più piccola che quella dell'orifizio stesso. Ricerche fatte con una pazienza ed una sagacità meravigliosa da Poncelet e Lesbros han fatto conoscere, con esattezza matematica, le leggi della contrazione della vena fluida per tutti i casi i più importanti. Ma senza entrare in queste particolarità, ci limiteremo al pratico risultamento, cioè che lo stringimento della vena fluida equivale presso a poco al terzo della superficie dell'orifizio.

La considerevole diminuzione che la contrazione della vena fluida cagiona nello sgorgo dell'acqua pegli orifizi praticati nelle pareti d'un serbatoio, puossi rendere meno considerevole, accomodando a questi orifizi dei piccoli tubi addizionali.

Se il tubo addizionale è cilindrico, e che l'acqua esca a *piena bocca*, vale a dire riempiendo interamente l'orifizio di sgorgo, il che avviene abitualmente quando la lunghezza del tubo è due o tre volte il suo diametro, e che il raricc è eguale a più diametri dell'orifizio d'uscita; allora invece di una differenza d'un terzo tra la dispensa teorica e la reale, come superiormente, non si ha che una differenza minore d'un quinto.

I tubi addizionali conici convergenti, vale a dire più larghi dell'orifizio del serbatoio, e che vanno diminuendo verso l'esterno, aumentano vieppiù la dispensa di sgorgo. I loro effetti d'altronde variano col variare della loro inclinazione, ma non si hanno per anco dati positivi sulle differenze che ne risultano. L'angolo di convergenza il più favorevole sembra esser quello di 12 a 13 gradi. In questo caso sembra non aver luogo che una diminuzione al più del 5 al 6 per cento sulla dispensa teorica.

Se s' impiegano tubi conici nel senso opposto, vale a dire accomodando la loro base minore al serbatoio e la maggiore par conseguenza esteriormente, tali tubi che, in questo caso, si chiamano tubi conici divergenti presentano un fenomeno singolare. La dispensa dell' acqua che per essi avviene, è maggiore della dispensa teorica.

Sembra che una tale proprietà fosse conosciuta dai Romani. Alcuni cittadini autorizzati di prendere dell' acqua dai pubblici serbatoi, accomodavano all' orifizio de' tubi conici divergenti, ed aumentavano per tal modo fraudolentemente la loro concessione. Una legge proibiva l' uso di tali tubi addizionali, a meno che non fossero situati a 50 piedi dal serbatojo.

Un tubo addizionale conico divergente, avendo in lunghezza nove volte il diametro della base minore, ed un dilatamento di 5 gradi circa, può dare una dispensa d' acqua presso a poco due volte e mezzo più grande di quella che somministrerebbe l' orifizio semplice praticato nelle pareti del serbatoio, ed una volta e mezzo più grande della dispensa teorica. *Vedi* per tutto ciò che riguarda la teoria dello sgorgo delle acque, la parola Sgorgo dei Fluidi.

CONVERGENTE. (*Geom.*) Si chiamano *rette convergenti* in geometria quelle che s' incontrano in un punto, o che sufficientemente prolungate s' incontrerebbero.

I *raggi convergenti*, in diottrica, sono quelli che, passando da un mezzo in un altro, si rompono, o si refrangono avvicinandosi l' uno all' altro, in maniera da incontrarsi nel medesimo punto o *fuoco*. *Vedi* Lente Microscopio.

CONVERGENTE (*Alg.*). Si chiamano *serie convergenti*, la serie nella quali il valore della somma di un numero qualunque di termini differisce tanto meno dal valore della somma totale dei termini, quanto questo numero di termini è maggiore. Nel caso contrario, si chiamano *serie divergenti*. Per esempio, la serie

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+ \text{ ec. . . . all'infinito,}$$

la quale, allorchè $x = \frac{1}{2}$, esprime la generazione della quantità 2, o che dà

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \ldots \text{ ec.}$$

è una *serie convergente*, perchè le somme successive

$$1$$

$$1 + \frac{1}{2}$$

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{1}{4}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{1}{8}$$

ec. ec.

si avvicinano continuamente al valore totale 2.

Ma se in questa medesima serie, si fa $x = 2$, essa diventa

$$1+2+4+8+16+32+64+ \text{ ec.}$$

vale a dire una *serie divergente*, poichè le somme successive

$$1$$
$$1+2$$
$$1+2+4$$
$$1+2+4+8$$
$$\text{ec.} \quad \text{ec.}$$

differiscono continuamente dal valore totale della serie che in questo caso è -1.

Il carattere principale delle serie convergenti è dunque che la *differenza* fra la somma di un numero qualunque di termini e il valore totale della serie può diventare tanto piccola quanto vogliamo, vale a dire minore di qualunque grandezza data prendendo questo numero continuamente più grande, così:

1.° Tutte le serie di cui i termini essendo alternativamente positivi e negativi diminuiscono all'infinito, sono *serie convergenti*. Infatti, sia

$$a-b+c-d+e-f+g-h+\text{ ec.} \ldots\ldots$$

una tal serie, se rappresentiamo con N il suo valore totale o la quantità dalla quale essa viene generata, avremo

$$N=a-b+c-d+e-f+g-h+\text{ ec} \ldots\ldots$$

Ora, prendendo un numero qualunque di termini, per esempio

$$a-b+c-d+e$$

e indicando la loro somma con M, avremo ancora

$$N=M-\left[f-g+h-i+k-l+\text{ ec.} \ldots\right].$$

Ma i termini andando diminuendo, le differenze successive

$$f-g,\ h-i,\ k-l,\ \ m-n,\ \text{ec.} \ldots$$

sono, all'infinito, quantità positive, e conseguentemente la somma di tutte queste differenze, o ciò, che equivale al medesimo, la somma di tutti i termini, cominciando da f, è essa medesima una quantità positiva; se l'indichiamo con P, l'eguaglianza precedente diverrà

$$N=M-P.$$

Prendendo ora un termine di più, e facendo

$$a-b+c-d+e-f=M'$$

avremo ancora

$$N=M'+\left[g-h+i-k+l-m+\text{ ec.} \ldots\right],$$

ovvero

$$N=M'+P'$$

rappresentando con P' la quantità positiva eguale alla somma delle differenze positive

$$g-h,\ i-k,\ l-m,\ n-o,\ \text{ec.}$$

Così il valore di N è compreso fra quelli di M e di M' poichè abbiamo

$$N>M \quad \text{e} \quad N<M'.$$

La differenza fra M ed M′ essendo il termina f, segue da ciò che precede che la differenza fra N ed M è più piccola di f, vale a dire, prendendo la cosa più generalmente, che la somma di m primi termini della serie non differisce dalla somma totale che di una quantità minore del $(m+1)^{imo}$ termine: dunque la serie è convergente, poichè questo termine può diventare tanto piccolo quanto vogliamo prendendo m sufficientemente grande.

2.° Una serie di cui tutti i termini sono positivi è *convergente* quando questi termini diminuiscono all'infinito, poichè sia

$$N = a+b+c+d+e+f+g+h+ \text{ ec.}$$

una tal serie; se facciamo

$$a+b+c+d+e = M$$

$$a+b+c+d+e+f = M'$$

avremo

$$N = M+f+g+h+i+ \text{ ec.}$$

$$N = M'+g+h+i+k+ \text{ ec.}$$

donde $N>M$ e $N>M'$; ma M′ differisce meno da N di M poichè abbiamo ancora $M'>M$, dunque la differenza fra N e la somma di un numero di termini può diventare tanto piccola quanto vorremo, prendendo questo numero sufficientemente grande.

3.° Tutte le serie i di cui termini vanno sempre crescendo sono *divergenti*.

Per quanto una serie sia divergente, quando essa non è stata formata da un seguito di termini presi arbitrariamente, ma che essa esprime la generazione di una funzione di una quantità variabile, per valori particolari di questa variabile, possiamo sempre trasformarla in serie convergente; sia

$$Fx = A_0+A_1fx+A_2fx^2+A_3fx^3+A_4fx^4+ \text{ ec.} \ldots (1)$$

una serie divergente, Fx essendo una funzione qualunque di x, e fx un'altra funzione egualmente qualunque della medesima variabile, e sia

$$Fx = B_0+B_1\varphi x+B_2\varphi x^2+B_3\varphi x^3+B_4\varphi x^4+ \text{ ec.} \ldots (2)$$

la serie trasformata convergente, φx essendo una funzione arbitraria di x.

Supponiamo che l'equazione $fx=0$ dia $x=a$, e costruiamo le funzioni fx, fx^2, fx^3, ec. con le potenze successive di $x-a$, avremo (*Vedi* Serie), indicando con un punto situato sopra $\dot{x}$ che bisogna fare $x=a$, dopo aver preso le differenziali,

$$fx = f\dot{x} + \frac{df\dot{x}}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \text{ ec.}$$

$$fx^2 = f\dot{x}^2 + \frac{df\dot{x}^2}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}^2}{dx^2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \text{ ec.}$$

$$fx^3 = f\dot{x}^3 + \frac{df\dot{x}^3}{dx} \cdot \frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2f\dot{x}^3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} + \text{ ec.}$$

ec. ec.

Ma poichè facendo $x=a$ si ha $fx=0$, tutte le quantità nelle quali entra fx si riducono a zero dopo le differenziazioni, così abbiamo in generale

$$d^n fx^m = 0$$

fintanto che n è minore di m; sottraendo dunque dagli sviluppi precedenti i termini che diventano *zero* e sostituendo quindi nell'eguaglianza (1), avremo

$$Fx = A_0 + A_1 df\dot{x}\,\frac{(x-a)}{1}$$

$$+\left[A_1 d^2 f\dot{x} + A_2 d^2 f\dot{x}^2\right]\cdot\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}$$

$$+\left[A_1 d^3 f\dot{x} + A_2 d^3 f\dot{x}^2 + A_3 d^3 f\dot{x}^3\right]\cdot\frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$+\text{ ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

Prendendo la funzione arbitraria φx in modo che sia $\varphi x = 0$, e facendo $x=a$ avremo egualmente

$$Fx = B_0 + B_1 d\varphi\,\dot{x}\,\frac{(x-a)}{1}$$

$$+\left[B_1 d^2\varphi\,\dot{x} + B_2 d^2\varphi\,\dot{x}^2\right]\cdot\frac{(x-a)^2}{1\,.\,2}$$

$$+\left[B_1 d^3\varphi\,\dot{x} + B_2 d^3\varphi\,\dot{x}^2 + B_3 d^3\varphi\,\dot{x}^3\right]\cdot\frac{(x-a)^3}{1\,.\,2\,.\,3}$$

$$+\text{ ec.} \qquad\qquad \text{ec.}$$

Dunque paragonando i due sviluppi otterremo

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = B_0 \\ A_1 df\dot{x} = B_1 d\varphi\,\dot{x} \\ A_1 d^2 f\dot{x} + A_2 d^2 f\dot{x}^2 = B_1 d^2\varphi\,\dot{x} + B_2 d^2\varphi\,\dot{x}^2 \\ A_1 d^3 f\dot{x} + A_2 d^3 f\dot{x}^2 + A_3 d^3 f\dot{x}^3 = B_1 d^3\varphi\,\dot{x} + B_2 d^3\varphi\,\dot{x}^2 + B_3 d^3\varphi\,\dot{x}^3 \\ \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right\} \quad (3)$$

equazioni di condizione per mezzo delle quali potremo determinare le quantità B_0, B_1, B_2, ec., con l'aiuto dei coefficienti A_0, A_1, A_2, ec.

Per applicare queste formule, si abbia la serie generale

$$Fx = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + A_3(x-a)^3 + \text{ ec.}$$

nella quale a è una quantità data, tale che quando abbiamo $x > a+1$, questa serie diventa divergente; A_0, A_1, A_2, ec. essendo numeri finiti qualunque. Si avrà ancora

$$fx = (x-a).$$

La funzione φx dovendo essere scelta in modo che essa divenga *zero* facendo $x=a$ diamole la forma

$$(x-a)\,.\,(fx)^m$$

fx essendo una funzione arbitraria di x, e m un numero arbitrario, e per prendere la funzione la più semplice, facciamo

$$fx = n+x \quad e \quad m = -1$$

avremo

$$\varphi x = (x-a) \times (n+x)^{-1};$$

in questa maniera la serie trasformata (2) sarà

$$Fx = B_0 + B_1 \frac{x-a}{n+x} + B_2 \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^2 + B_3 \left(\frac{x-a}{n+x}\right)^3 + \text{ec.},$$

e potrà divenire convergente, qualunque sia il valore di x, per mezzo delle quantità arbitrarie n.

Sostituiamo nelle equazioni di condizione (3) in luogo di fx e φx i loro valori particolari trovati sopra ed otterremo

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = B_0 \\ A_1(n+a)^1 = B_1 \\ A_2(n+a)^2 = B_2 - B_1 \\ A_3(n+a)^3 = B_3 - 2B_2 + B_1 \\ A_4(n+a)^4 = B_4 - 3B_3 + 3B_2 - B_1 \\ A_m(n+a)^m = B_m - \frac{m-1}{1} B_{m-1} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} B_{m-2} \\ \qquad - \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} B_{m-3} + \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots (4)$$

Renderemo più chiara questa teoria per mezzo di alcuni esempi numerici.

I. Lx indicando il logaritmo naturale di x, si ha la serie conosciuta.

$$Lx = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \text{ec.}$$

la quale è divergente allorchè x è maggiore di 2; per trasformarla in una serie convergente, facciamo

$$a = 1 \quad e \quad n = 1$$

abbiamo di più

$$A_0 = 0,\ A_1 = 1,\ A_2 = -\frac{1}{2},\ A_3 = \frac{1}{3},\ A_4 = -\frac{1}{4},\ \text{ec.}$$

il che darà sostituendo in (4)

$$B_0 = 0,\ B_1 = 2,\ B_2 = 0,\ B_3 = \frac{2}{3},\ B_4 = 0,\ B_5 = \frac{2}{5},\ \text{ec.}$$

Così la serie trasformata sarà

$$Lx = 2\left\{\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \text{ec.}\right\}$$

la quale è convergente per tutti i valori positivi di x.

II. Prendiamo per secondo esempio lo sviluppo

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + x^6 - \text{ec} \ldots\ldots$$

che diviene divergente quando x non è minore dell' unità. Avremo $a=0$ e

$$A_0=1,\quad A_1=-1,\quad A_2=1,\quad A_3=-1,\quad A_4=1,\ \text{ec.}$$

Conservando in tutta la sua generalità la quantità arbitraria n, otterremo

$$B_0=1,\quad B_1=-n,\quad B_2=n^2-n,\quad B_3=-n^3+2n^2-n,\quad \text{ec.}$$

e per conseguenza,

$$\frac{1}{1+x}=1-n.\frac{x}{n+x}+n(n-1).\frac{x^2}{(n+x)^2}-n(n-1)^2\frac{x^3}{(n+x)^3}$$

$$+n(n-1)^3.\frac{x^4}{(n+x)^4}-n(n-1)^4.\frac{x^5}{(n+x)^5}+\text{ec.}\ldots$$

Per $x=1$, in cui la serie proposta diviene il seguito singolare

$$1-1+1-1+1-1+1-1+1-\text{ec.},\ \text{ec.}$$

della quale i geometri si sono tanto occupati, la serie trasformata è

$$1-\frac{n}{n+1}+\frac{n(n-1)}{(n+1)^2}-\frac{n(n-1)^2}{(n+1)^3}+\frac{n(n-1)^3}{(n+1)^4}-\text{ec.}\ldots$$

la quale, per qualunque valore positivo di n è una serie convergente che dà il valore $\frac{1}{2}$.

Dobbiamo al signor Wronski queste trasformazioni e le belle leggi dalle quali esse derivano (*vedi* Filosofia della Tecnia, *seconda sezione*); esse provano evidentemente che una serie qualunque ha, in se medesima, nel numero infinito dei suoi termini, un valore determinato rigoroso, senza aver bisogno di veruna quantità complementaria come diversi geometri lo hanno creduto, poichè con l'aiuto di questi medesimi termini, per quanto divergente sia, essa dà sempre una serie convergente. (*Vedi* Serie).

Possiamo riportare tutte le serie infinite dei numeri determinati, delle quali non si conosce le serie generali corrispondenti, alle formule precedenti, osservando che per una tal serie

$$N_0+N_1+N_2+N_3+N_4+\text{ec.}$$

Si può ammettere una serie generale

$$Fx=A_0+A_1fx+A_2fx^2+A_3fx^3+A_4fx^4+\text{ec.}$$

supponendo che questa provenga dalla serie generale per un valore determinato della variabile x. Questa ipotesi arbitraria dà le relazioni ($\dot{x}$ indicando il valore determinato di x)

$$N_0=A_0,\quad N_1=A_1f\dot{x},\quad N_2=A_2f\dot{x}^2,\quad N_3=A_3f\dot{x}^3,\ \text{ec.}$$

dalle quali si ricava

$$A_0=N_0,\ A_1=\frac{N_1}{f\dot{x}},\ A_2=\frac{N_2}{f\dot{x}^2},\ A_3=\frac{N_3}{f\dot{x}^3},\ \text{ec.}$$

Conoscendo così i coefficienti della serie generale, potremo determinare il suo valore corrispondente al valore x, e questo valore particolare della serie sarà necessariamente quello della serie infinita proposta. Rimandiamo all'opera di già citata dal signor Wronski, non potendo qui che indicare una teoria, di cui i limiti di questo dizionario non ci permettono di esporre i principii superiori.

Siccome per impiegare con sicurezza uno sviluppo analitico, non vi è bisogno che di assicurarci delle regolarità della serie che lo esprime, vale a dire di ben determinare la legge secondo la quale si formano tutti i suoi termini, bisogna accuratamente discutere la convergenza delle serie numeriche, per dedurne dei valori approssimati della quantità da cui esse derivano; e non possiamo nemmeno contare interamente sopra queste determinazioni, che quando siamo in caso di assegnare i limiti della differenza che può trovarsi fra esse, ed il vero valore. Perchè l'approssimazione sia comoda e sicura, è necessario che questa differenza diminuisca rapidamente a misura che essa comprende un maggior numero di termini, e che possa rendersi minore di qualunque grandezza data, per quanto piccola sia questa grandezza. È evidente che queste condizioni non potrebbero essere adempite che nel caso in cui tutti i termini della serie proposta andassero diminuendo, poichè è necessario che ciascun termine non cangi il risultamento che per differenze continuamente più piccole. Per questi motivi abbiamo creduto utile in aumento a quanto abbiamo esposto di sopra di aggiungere la seguente discussione del signor D'Alembert, sopra la convergenza delle serie risultanti dallo sviluppo delle potenze di un binomio, il che viepiù servirà a dare un'idea esatta di questa teoria.

Si abbia il binomio $(1+x)^m$, la sua espressione analitica essendo messa sotto la forma

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}x^3+\;.\;.\;.\;.\;.$$

$$+\frac{m(m-1)(\;.\;.\;.\;.\;(m-n+2)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-1)}x^{n-1}+\frac{m(m-1)\;.\;.\;.\;.\;(m-n+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,n}x^n+\text{ec.}$$

fa vedere che il rapporto fra due termini consecutivi qualunque è $\frac{m-n+1}{n}x$; così, perchè questi termini vadano diminuendo, bisogna, astrazione fatta dal segno dei numeri $m-n+1$ ed x, che si abbia

$$\frac{m-n+1}{n}x<1$$

Conviene osservare che il numero m rimane il medesimo in tutta l'estensione della serie, ma che il numero n, necessariamente intero, aumenta da un termine all'altro, e può diventare tanto grande quanto vorremo, quando la serie non ha fine, il che è supposto qui, ove principalmente abbiamo in veduta lo sviluppo delle potenze negative o frazionarie.

La prima conseguenza che si presenta è, che la quantità

$$\frac{m-n+1}{n}=\frac{m+1}{n}-1,$$

la quale esprime il rapporto dei coefficienti consecutivi delle potenze di x, si

avvicina continuamente a -1, poichè la frazione $\frac{m+1}{n}$ avendo un numeratore costante e un denominatore sempre più grande, diventa continuamente più piccola. Segue da ciò che il rapporto dei termini consecutivi della serie precedente tende sempre più a ridursi a $-x$, e che per conseguenza, qualunque sieno i suoi primi termini, questa serie deve sempre finire per essere divergente, quando il valore di x supera l'unità; non possiamo dunque servircene che quando $x<1$.

Consideriamo prima di tutto il caso in cui m è positivo, e facciamo $x=\frac{1}{a}$, $a>1$; la convergenza non comincerà che quando il rapporto dei due termini consecutivi divenendo <1; i termini formeranno una progressione decrescente: questo seguirà quando

$$\frac{m-n+1}{na}<1, \quad \text{ovvero} \quad 1>\frac{m-n+1}{na},$$

condizione che si trasforma successivamente in

$$na>m-n+1, \quad na+n>m+1$$

ovvero

$$n(a+1)>m+1$$

e infine

$$n>\frac{m+1}{a+1}.$$

Ma siccome al secondo termine, $n=1$, la convergenza si manifesterà fin dal principio della serie, quando avremo $a>m$, poichè allora il numero $\frac{m+1}{a+1}$ sarà una frazione.

Sia per esempio,

$$m=\frac{9}{2}, \quad x=\frac{10}{11},$$

donde

$$a=\frac{11}{10}, \quad \frac{m+1}{a+1}=\frac{\frac{9}{2}+1}{\frac{11}{10}+1}=\frac{55}{21};$$

qui la convergenza non ha luogo che allorchè $n>2$, vale a dire al quarto termine.

Se m fosse negativa, la quantità $\frac{m-n+1}{na}$ diverrebbe $\frac{-m-n+1}{na}$, e facendo astrazione dal segno del numero $-m-n+1$, la condizione relativa alla convergenza si cangerebbe in

$$1>\frac{m+n-1}{na}, \quad na>m+n-1,$$

$$na-n>m-1, \quad \text{donde} \quad n>\frac{m-1}{a-1}.$$

In questo caso la convergenza non può cominciare che tardissimo

Sia per esempio, $m=2$, $x=\frac{99}{100}$, viene

$$a=\frac{100}{99}, \quad e \quad n>99$$

i 100 primi termini delle serie formeranno perciò una progressione crescente.

Dopo aver trovato il termine ove la serie comincia ad essere convergente, e avanti del quale non possiamo arrestarci, conviene cercare i limiti dell' approssimazione; ed a ciò arriviamo molto semplicemente per le serie numeriche, per mezzo di un processo messo in uso pel primo dal D'Alembert.

Farò in primo luogo osservare che il rapporto di due termini consecutivi della serie proposta,

$$\frac{m-n+1}{n}x=\left(\frac{m+1}{n}-1\right)x=-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$$

Le due ultime espressioni provano che questo rapporto cangia di segno quando siamo arrivati al termine ove $\frac{m+1}{n}<1$, non considererò perciò la serie che al di là di questo termine, per non operare che sulla parte ove la legge dei segni è definitivamente fissata, e supporrò di più che x sia negativo, acciocchè il rapporto dei termini consecutivi avendo il segno $+$ sieno tutti del medesimo segno. Ciò premesso indicando con N il termine

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots m-n+2}{1.2\ldots\ldots n-1}x^{n-1}$$

che è l' n^{simo}, la serie proposta prenderà la forma

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x.\left(1-\frac{m+1}{n+1}\right)x+\text{ec.}\ldots(a)$$

dalla quale si rileva evidentemente che tutti i suoi termini, eccettuato i due primi, saranno maggiori di quelli della progressione per quoziente

$$N+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+N\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x.\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x+\text{ec.}$$

e che tutti eccettuato il primo saranno minori di quelli della progressione

$$N+Nx+Nx.x+\text{ec.}$$

La somma dei termini della serie (a) sarà dunque compresa fra le somme o piuttosto limiti di queste due progressioni; e siccome la ragione della prima è $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$, e quella della seconda x, i loro limiti respettivi sono:

$$\frac{N}{1-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x} \quad e \quad \frac{N}{1-x}$$

Tali sono i limiti in più e in meno, delle diverse approssimazioni che somministra la serie (*a*); l'errore sarà per conseguenza al di sotto della loro differenza, espressa da

$$\frac{N\left(\frac{m+1}{n}\right)x}{(1-x)\left[1-\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x\right]} = \frac{N(m+1)x}{(1-x)(n+(m-n+1)x)}.$$

Si vede assai facilmente, nella prima forma di questa espressione che essa può ridursi a quel grado di piccolezza che vorremo, prendendo n continuamente più grande; poichè il numeratore può diminuire indefinitamente, pel decrescimento del fattore $\frac{m+1}{n}$ e il denominatore, sopprimendovi ancora quest' ultima frazione, non può cadere al di sotto di $(1-x)^2$, quantità invariabile per tutti i termini della serie.

Impiegando, per esempio, la formula del binomio, per estrarre la radice del numero 2 messo sotto questa forma: $\frac{9-1}{4}$, avremo

$$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{9-1} = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

In questo caso $m = \frac{1}{2}$; x essendo di già supposto negativo, basta di sostituirvi $\frac{1}{9}$ e se vogliamo fermarci al termine in cui $n = 10$, verrà

$$N = \frac{1.1.3.5.7.9.11.13.15.17}{2.4.6.8.10.12.14.16.18.20} \cdot \frac{1}{9^{10}} = 0,00000\ 00000\ 03;$$

i limiti del resto della serie che esprime il valore di $\left(1-\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$, saranno dunque

$$\frac{N}{1-\frac{1}{9}\left(1-\frac{3}{20}\right)}, \qquad \frac{N}{1-\frac{1}{9}},$$

e l'errore commesso, sarà minore di

$$\frac{N.\frac{3}{2}.\frac{1}{9}}{\left(1-\frac{1}{9}\right)\left[10+\left(\frac{1}{2}-9\right)\frac{1}{9}\right]} = \frac{3.9\,N}{8.163} = 0,00000\ 00000\ 0006;$$

e non resta più che da moltiplicare questo numero per $\frac{3}{2}$, per ottenere il limite dell' approssimazione, relativamente al valore di $\sqrt{2}$.

Se m fosse negativo e >1, l'ordine di grandezza delle due progressioni per quoziente, alle quali ho paragonato la serie (a), sarebbe inverso; mentre il rapporto del termine N a quello che lo segue, essendo allora $\left(\frac{m-1}{n}+1\right)x$, supera il rapporto espresso solamente da x; ma la serie (a) rimarrebbe sempre compresa fra le progressioni, e se ne troverebbero i limiti come sopra.

Ho supposto che tutti i termini della serie (a) fossero del medesimo segno, perchè questo è il caso più semplice; ma esso non ha più luogo allorchè le quantità $\frac{m+1}{n}-1$ ed x sono di segni differenti, quando m è positiva, e le quantità $-\left(\frac{m-1}{n}+1\right)$ e x, quando m è negativa. In queste due circostanze, i termini della serie (a) sono alternativamente affetti dal segno $+$ e dal segno $-$

Per abbreviare, rappresenterò allora la serie (a) con

$$N-Px+Qx^2-Rx^3+Sx^4-Tx^5+\text{ec};$$

essa si divide nelle seguenti:

$$N+Qx^2+Sx^4+\text{ec.}=K$$
$$-(Px+Rx^3+Tx^5+\text{ec.})=L,$$

di cui tutti i termini sono del medesimo segno, e di cui si troverebbero i limiti, nella medesima maniera che abbiamo trovato quelli della serie (a), sostituendo al rapporto $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)x$, il rapporto $\left(1-\frac{m+1}{n}\right)^2x^2$, a motivo che i termini son presi qui di due in due.

Siano k e k' i limiti della serie K, l ed l' quelli della serie L; di maniera che

$$K>k \text{ e } <k', \qquad L>l \text{ e } <l':$$

se si sottrae dal più piccolo dei limiti di K, il più grande di quelli di L, avremo evidentemente

$$K-L<k'-l;$$

e facendo il contrario, si troverà

$$K-L>k-l'.$$

Non mi fermerò a sviluppare il calcolo; ma farò osservare che quando i termini di una serie sono in parte positivi e in parte negativi, non possiamo niente dedurre dal paragone dei limiti corrispondenti di ciascuna delle sue parti; infatti non servirebbe a niente sapere qui che $k'>K$, e $l'>L$; mentre ignorando la grandezza di questi eccessi, non si saprebbe neppure se $k'-l'$ è al di sopra o al di sotto di $K-L$. Del rimanente, in questo caso, la serie proposta essendo equivalente a

$$N-[(Px-Qx^2)+(Rx^3-Sx^4)+\text{ec.}],$$

e a

$$N-Px+[(Qx^2-Rx^3)+(Sx^4-Tx^5)+\text{ec.}],$$

è visibilmente $>N$ e $<N-Px$, se essa è convergente.

Quando possiamo disporre a piacere della quantità x, è facile di rendere tanto convergente quanto vogliamo una serie

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ ec.},$$

nella quale il rapporto dei coefficienti consecutivi A e B, B e C, ec. non è capace di crescere all' infinito, quantunque d' altra parte questi coefficienti vadano continuamente aumentando. Ciò vedesi paragonando la serie proposta con una progressione per quoziente, come l' abbiamo fatto precedentemente; e si prova con questo mezzo che esiste sempre un valore di x che può rendere il primo termine superiore alla somma di tutti gli altri.

Infatti, siano Nx^n+Px^{n+1} i termini nei quali il rapporto dei coefficienti consecutivi $\frac{P}{N}$, ha il più gran valore; se r indica questo rapporto, e che si formi la progressione per quoziente

$$A+Arx+Ar^2x^2+Ar^3x^3+\text{ ec.},$$

tutti i coefficienti Ar, Ar^2, Ar^3, ec. delle potenze di x, supereranno i coefficienti B, C, D, ec., poichè r supera $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, ec.; e mettendo da parte il primo termine A, si troverà che la somma dei termini

$$Arx+Ar^2x^2+Ar^3x^3+\text{ ec.}$$

supererà quella dei termini

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ ec.}$$

della serie proposta. Ora

$$Arx+Ar^2x^2+Ar^3x^3+\text{ ec.}=\frac{Arx}{1-rx},$$

espressione della quale possiamo rendere il valore tanto piccolo quanto vorremo, dando ad x un valore conveniente; poichè se si prende $x=\frac{1}{rq}$, verrà

$$\frac{Arx}{1-rx}=\frac{A}{q-1},$$

quantità che diminuirà continuamente, a misura che daremo a q dei valori sempre più considerabili.

La somma di tutti i termini della serie proposta, a partire dal secondo, essendo minore di $\frac{A}{q-1}$, potrà dunque rendersi tanto piccola quanto vorremo, e in quel rapporto che vorremo, col primo termine A.

Se si avesse per esempio, la serie

$$2(10)^2x+4(10)^4x^2+6(10)^6x^3+8(10)^8x^4+\text{ ec.},$$

di cui la legge è tale, che due termini consecutivi sono espressi in generale da

$$2n(10)^{2n}x^n+2(n+1)(10)^{2n+2}x^{n+1},$$

si troverebbe che il rapporto dei coefficienti di questi termini è

$$\frac{n+1}{n}(10)^2;$$

Ora facendo successivamente

$$n=1,\ n=2,\ n=3,\ \text{ec.}$$

la quantità $\frac{n+1}{n}$ diviene

$$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \text{ec.};$$

il suo più gran valore è perciò 2, e 200 è per conseguenza il più considerabile dei rapporti che vi sono fra due termini consecutivi. Prendendo $r=200$, $x=\frac{1}{200q}$, e indicando sempre con A il primo termine, la somma di tutti gli altri sarà minore di $\frac{A}{q-1}$, e per conseguenza minore del primo termine A, fin da quando faremo solamente $q=2$, il che suppone $x=\frac{1}{400}$.

Per quanto possa essere ioteso il metodo di sopra indicato per rendere le serie convergenti, ve ne sono però alcune delle quali non si potrebbe correggere la divergenza; queste sono quelle nelle quali il rapporto dei coefficienti va sempre crescendo. La serie

$$1+1.2x+1.2.3.x^2+1.2.3.4x^3+\text{ec.},$$

offre un esempio di questo caso

Due termini consecutivi qualunque vi sono espressi da

$$1.2.3\ldots(n+1)x^n+1.2.3\ldots(n+2)x^{n+1}$$

e il loro rapporto, eguale a $(n+2)x$, aumenta continuamente col numero n, il quale non ammette alcun limite: qualunque fosse per conseguenza la piccolezza del valore che si assegnerebbe ad x, siccome questo valore sarebbe il medesimo in tutta la serie, la quantità $(n+2)x$ finirebbe sempre per superare l'unità, e crescerebbe ancora indefinitamente.

Questo esempio basta per far conoscere che non dobbiamo appoggiarci, che con molta riserva sopra le serie, allorchè abbiamo per oggetto di arrivare a valori approssimati.

CONVERSIONE. (*Alg.*). Antica parola per mezzo della quale si esprimeva la proporzione risultante dalle differenze fra gli *antecedenti* e i *conseguenti* di due rapporti uguali paragonati ai conseguenti. Così avendo la proporzione

$$A : B :: C : D$$

la proporzione derivata

$$A-B : B :: C-D : D$$

si chiamava *proporzione per conversione*. *Vedi* Proporzione.

CONVERSO (*Geom.*) *Proposizioni converse* o *reciproche*. *Vedi* Proporzione.

CONVERTIBILI (*Alg.*). Si chiamano *convertibili* ed anche *reciproche* quelle equazioni nelle quali nulla si cangia ponendo $\frac{1}{x}$ in luogo di x.

Tali sono per esempio

$$x^4+3x^3+5x^2+5x^2+3x+1=0$$

e

$$x^6-5x^5-2x^4+3x^3+5x-1=0.$$

Vedi Equazioni reciproche.

CONVESSO (*Geom.*). *La superficie convessa* è la superficie esterna di un corpo tondo. Questa parola è particolarmente in uso nella diottrica, e nella catottrica. Vedi Specchi.

COORDINATE (*Geom.*) Nome comune dato alle *ascisse* e alle *ordinate* di un punto. *Vedi* Ascissa.

COPERNICO (Niccolò), l'illustre e celebre rinnovatore del vero sistema del mondo, nacque a Thorn in Prussia il 19 Febbrajo 1473, da una famiglia ragguardevole, secondo la maggior parte de' suoi biografi, o da un paesano servo chiamato Zoperniek, secondo ciò che ne narra Zernecke autore della *Cronaca di Thorn*, Berlino, 1727. Figlio di un gentiluomo o di un servo, Copernico si è acquistata tal gloria che formerà l'ammirazione della più remota posterità: di queste due circostanze peraltro la prima è più verisimile; l'educazione elevata che il giovine Copernico ricevè nella casa paterna, ove apprese le lettere greche e latine, prima di andare a Cracovia a terminare i suoi studj, non sembra conciliabile collo stato disgraziato e miserabile della classe da cui si è preteso che sia uscito. Comunque ciò sia, Copernico si applicò dapprima alla filosofia e alla medicina, ed ottenne in quest'ultima scienza il grado di dottore. Fu allora che con maggior libertà si diede alle matematiche, per le quali fino dalla più tenera gioventù aveva mostrato un'ardente passione. Ne fece l'oggetto de' suoi studj più serii, e si applicò nel tempo stesso all'astronomia, scienza nella quale doveva egli un giorno immortalare il suo nome. Il celebre Regiomontano (Giovanni Muller) la professava in quel tempo in Italia con gran reputazione; il giovine Copernico, tratto forse da quella specie di presentimento del suo avvenire che talvolta si rivela ai grandi uomini, risolvette di andare ad ascoltare le lezioni di quel professore, ed in età di ventitrè anni partì per l'Italia, dopo essersi perfezionato nella pittura e nel disegno, onde non perdere niuna cosa di quanto tale gita gli poteva offrire d'istruttivo. Studiò successivamente a Bologna sotto Domenico Maria, e a Roma sotto Regiomontano; e quei due celebri astronomi colpiti dalla sua sagacità, dalla elevatezza delle sue vedute, e dalle estese sue cognizioni, che tanto più notabile rendevano in lui la bontà del suo carattere e la dolcezza de' suoi costumi, lo ammisero nella loro più intima società. Dopo avere seguito con tutto lo zelo del quale era animato le lezioni di quei dotti professori, e dopo essersi reso famigliare l'uso degli strumenti astronomici, Copernico lasciò Roma, ove l'amicizia di Regiomontano gli avea fatto ottenere una cattedra di matematiche, e ritornò in patria ricco dell'istruzione profonda che aveva acquistata e delle osservazioni alle quali aveva potuto darsi sotto il bel cielo dell'Italia, sì favorevole allora alle scienze rinascenti. Il vescovo di Warmia, suo zio, lo provvide di un canonicato nella piccola città di Frauenburg o Fravenberg, ove andò a fissarsi per sempre. Nulladimeno, avendo avuto alcune contese da sostenere ed alcune pretensioni da combattere, non gli venne fatto di goder subito della tranquillità che per quel posto sperava di gustare. Ma le sue ragioni, convalidate dalla sua costanza, prevalsero compiutamente, e fin d'allora la sua vita, la cui laboriosa solitudine doveva esser così utile ai progressi della scienza, fu disturbata da pochi avvenimenti: ei la divise tutta intera fra tre occupazioni principali che erano di assistere agli uffizj divini, di medicare gratuitamente i poveri, e di consacrare il resto del suo tempo a' suoi studj prediletti. » Qualunque nonostante,

» aggiunge uno de' suoi biografi più illustri, fosse il suo allontanamento per gli » affari, non potè riunire l'amministrazione de' beni del vescovado, che a lui fu » più volte affidata, nel tempo che n'era vacante la sede. Questa commissione ri- » chiedeva probità e coraggio: bisognava difendere i diritti del vescovado contro i » cavalieri teutonici allora potentissimi. Copernico non si lasciò nè abbagliare dalla » loro autorità, nè intimorire dalle loro minacce. » Se si narrano queste particolarità che sembrano estranee alla sua gloria, è per mostrare che, in quel carattere, lo spirito di studio e di contemplazione era unito colla fermezza e colla costanza, qualità non meno necessarie dell'ingegno, per combattere e distruggere i pregiudizj consacrati dalla credenza de' secoli.

Nello studio profondo che Copernico aveva fatto delle opere e delle opinioni degli astronomi antichi e moderni, era sempre rimasto maravigliato della estrema complicazione di tutti i loro sistemi, e della poca o niuna simmetria che essi supponevano nell'ordine dell'universo. Prese dunque a rileggere ancora una volta tutti quei sistemi, per istudiarli nuovamente, e vedere se prendendo da ognuno ciò che vi fosse di più verisimile si potesse comporre un nuovo sistema più semplice e più simmetrico di quelli fino allora immaginati. In tale studio comparativo, due furono i sistemi che fermarono principalmente la sua attenzione: quello degli Egiziani, che facevano girare Mercurio e Venere intorno al Sole, ma ponevano Marte, Giove, Saturno e il Sole stesso in moto intorno alla Terra; e quello di Apollonio Pergeo, che scelse il Sole per centro comune di tutti i movimenti planetarj, ma fa che quest'astro giri intorno alla terra come la Luna, sistema che in seguito divenne quello di Tienne Brahé. Queste due opinioni colpirono particolarmente Copernico, perchè per mezzo di esse venivano a rappresentarsi mirabilmente i giri limitati di Mercurio e di Venere intorno al Sole, e a spiegarsi senza difficoltà e senza alcun bisogno di epicicli i loro movimenti alternativamente diretti, stazionarj e retrogradi: vantaggio che quest' ultimo sistema estendeva eziandio ai pianeti superiori. In tal guisa i sistemi astronomici non erano più per esso semplici scherzi dell'immaginazione, diretti a formarsi semplicemente un'idea meccanica dei moti degli astri: ei gli sottoponeva alla rigorosa prova dell'esperienza; aveva trovato le condizioni a cui dovevano soddisfare; e così la parte più difficile della sua scoperta era già fatta. D'altra parte vide che Pitagora ed i filosofi della sua scuola avevano allontanato la terra dal centro del mondo e vi avevano posto il Sole. Gli parve dunque che il sistema di Apollonio sarebbe divenuto più semplice e più simmetrico, supponendo il Sole fisso nel centro, e facendo girare la terra intorno a lui. Aveva veduto altresì che Nicetà, Eraclide ed altri filosofi, sebbene situassero la terra nel centro del mondo, avevano osato di darle un moto di rotazione sopra sè stessa, onde spiegare i fenomeni del levare e del tramontare degli astri, come anche l'alternativa de' giorni e delle notti. Propendeva anco maggiormente ad ammettere l' opinione di Filolao, il quale togliendo la terra dal centro del mondo non le aveva dato soltanto un moto di rotazione sopra sè stessa intorno ad un asse, ma un moto pur anche di circolazione annua intorno al Sole: e, quantunque potesse sembrare allora difficile ed anco assurdo il togliere in tal modo la terra dal centro, per formarne un semplice pianeta; tuttavia, siccome vedeva che gli astronomi che lo avevano preceduto avevano avuto piena libertà d' immaginare ad arbitrio varj circoli nel cielo per rappresentare e spiegare i fenomeni celesti, pensò che a lui pure sarebbe stato permesso d'inventare qualche altra disposizione che stabilisse un ordine più semplice nel movimento degli astri. In questa guisa, combinando i due moti della terra intorno al Sole e intorno a sè stessa, Copernico divenne il fondatore della meccanica celeste, e compose quell' ammirabile sistema che da noi si chiama *Sistema di Copernico*, e che realmente non è che l' ordine vero del sistema planetario nel

quale ci troviamo. Collocò il Sole nel centro dell' universo, e intorno a quell'astro fece girare da occidente in oriente tutti i pianeti nel seguente ordine di distanza: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno; quanto alla Luna, essa continuò a girare di occidente in oriente intorno alla terra, mentre questa era trasportata intorno al Sole. Suppose che la terra girasse nell'intervallo di un giorno da occidente in oriente intorno ad un asse che rimane sempre paralello a sè stesso, e che fa un angolo di circa 23°½ coll'asse dell'ecclittica. Finalmente, dice l' illustre Laplace, tutto questo sistema annunziava quella bella semplicità che si fa ammirare nei mezzi dei quali si serve la natura, ogni volta che siamo abbastanza fortunati da poterli trovare.

Sembra che le idee di Copernico sulla teoria dei pianeti fossero già fissate verso l'anno 1506. Siccome peraltro egli non intendeva di proporre soltanto un'ipotesi che con una certa maggior semplicità spiegasse le apparenze più generali, ma voleva anzi presentare un sistema che con tutto il rigore e nelle più minute particolarità si trovasse d'accordo coi fenomeni più complicati, sentì che per appoggiare il suo sistema gli bisognava primieramente descrivere e calcolare colla massima esattezza tutti i movimenti celesti, e dedurre quindi dalla sua teoria delle tavole che servissero a predirli con tutta la semplicità, con tutta la precisione. Fu questo il lavoro dell' intera sua vita. Si pose a fare osservazioni, e a raccogliere quelle che non poteva procacciarsi da sè, all' oggetto di confermare le sue idee e di trarre da esse la spiegazione più rigorosa e più esatta dei fenomeni che sembravano più indecifrabili, come appunto le stazioni e le retrogradazioni dei pianeti e la precessione degli equinozj. Finalmente, quando gli parve di aver fatto bastanti osservazioni e prove, quando si fu assicurato della verità delle sue scoperte, imprese ad esporne il complesso in un' opera divisa in sei libri, che intitolò: *De orbium coelestium revolutionibus.*

Tale opera celebre, nella quale depose il frutto di tanti studj e meditazioni, ed in cui sottopose ad un' idea sola tutta l'astronomia, sembra che fosse già terminata verso l'anno 1530. Ma Copernico esitò lungo tempo a darla alla luce. Il grido delle sue idee erasi già sparso in Europa; i suoi discepoli e i suoi amici le facevano circolare; gli astronomi più celebri desideravano con impazienza di vederle sviluppate; veniva stimolato a pubblicarle; egli resisteva, attendeva ancora, correggeva ogni giorno i dati che gli somministravano osservazioni più esatte, aggiungeva ciò che nuove riflessioni gli avevano fatto conoscere; infine, uopo è il dirlo, temeva di esporre la sua quiete, abbandonandosi al giudizio de' suoi contemporanei, e questo timore era per mala sorte fondato. Infatti, mentre i dotti più ragguardevoli si dichiaravano in favore di quanto conoscevano delle sue idee, la moltitudine, di cui combattevano i pregiudizj, si elevava contro d' esse. Il suo sistema si considerò come un ammasso di assurdi e di chimere. Si giunse perfino a porre in derisione lo stesso Copernico in una commedia, come Socrate lo era stato altre volte da Aristofane; se non che il carattere rispettabile del moderno astronomo, e forse più che altra cosa il silenzio che rotto non avea fino allora, lo preservarono dall' insulto, e colui che l'avea provocato non ne raccolse che disprezzo. Ma Copernico incominciava a invecchiare: comprese, soggiunge il biografo celebre che di sopra abbiamo citato, che tardando più a lungo la pubblicazione delle sue ricerche, lasciava all' ignoranza un campo più libero, e che l'esposizione di verità sì evidenti, accompagnate da prove sì numerose e palpabili, sarebbe il miglior mezzo di confutare l'accusa di assurdi, nome con cui si qualificavano le sue opinioni. Parmise dunque a' suoi amici di pubblicare il suo libro, cui dedicò al papa Paolo III; » acciocchè, dice egli a quel pontefice, non » mi si accusi di fuggire il giudizio delle persone illuminate, e perchè l' autorità » della Santità vostra, se ella approva quest' opera, mi difenda dal morso della » calunnia. »

L'opera fu stampata a Norimberga, per cura di Retico, uno de' discepoli di Copernico. La stampa era già terminata, e Retico spediva a Copernico il primo esemplare, allorchè questi, che sempre avea goduto della più perfetta salute, venne improvvisamente assalito da una violenta dissenteria, che fu quasi subito seguita da una paralisia del lato dritto. Nel tempo stesso la sua memoria ed il suo spirito s'indebolirono. Il giorno medesimo della sua morte, e soltanto alcun'ora avanti che spirasse, l'esemplare della sua opera, spedito da Retico, arrivò; ei lo vide, lo toccò, ma era allora occupato d'altri pensieri. Morì a' 24 di Maggio 1543 in età di settant'anni, e fu sepolto nella cattedrale di Franenburg. La sua tomba, che non distinguevasi da quella degli altri canonici, fu ornata nel 1581 di un epitaffio latino del vescovo Cromer, il Tito Livio della Polonia. Nel 1800 gli fu eretto un piccolo monumento. La prima opera, in cui siano annunziati i lavori di questo illustre astronomo, è la lettera che Retico pubblicò con questo titolo: *Ad clar. v. d. Jo. Schonerum, de libris revolutionum, eruditiss. viri et mathematici excellentiss. rev. doctaris Nicolai Copernici torunnaei, canonici warmiensis, per quemdam juvenem mathematicae studiosum, narratia prima*, Danzica, 1540, in-4, ristampata con un elogio della Prussia, Basilea, 1541, in-8.

Le opere che abbiamo di Copernico sono le seguenti: I *De revolutianibus orbium coelestium libri VI*; di quest'opera, che collo stabilire i veri fondamenti dell'astronomia fece una completa rivoluzione nella scienza, riporteremo il titolo del frontispizio: *Nicolai Copernici Torinensis, De revolutionibus arbium coelestium libri VI. Habes in hoc opere jam recens nato et edita, studiose lectar, motus stellarum, tam fixarum quam erraticarum, cum ex veteribus tum etiam ex recentibus observationibus restitutos: et novis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam tabulus expeditissimas, ex quibus eosdem ad quodvis tempus quam facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.* Ἀγεωμέτρητος οὐδεὶς εἰσίτω. *Norimbergae apud Joh. Petreium. Anno MDXLIII.* piccolo in-fol. di 196 fogli: ristampata a Basilea, 1566, in-fol. colla lettera di Retico: Niccolò Moller ne fece una nuova edizione con alcune note, cui pubblicò col titolo di *Astronomia instaurata*, Amsterdam, 1617 e 1640, in-4; II *De lateribus et angulis triangulorum*, Vittemberg, 1542, in-4: quest'opera non è che un trattato di trigonometria con tavole dei seni, e trovasi anco nell'opera precedente; III *Theaphylacti scholastici Simocattae epistolae marales, rurales et amatoriae, cum versione latina.* Copernico aveva presentato nel 1521 agli Stati della sua provincia un'opera sulle monete, e si conservavano altresì parecchi suoi trattati manoscritti nella biblioteca dei vescovi di Varmia.

La vita di Copernico è stata scritta da Gassendi e leggesi nell'opera: *Tychonis Brahaei, Copernici, Parbachii, et Regiomantani vitae*, Parigi, 1654, in-4. Si potranno però consultare sulla vita e sugli scritti di questo dotto ancora le seguenti opere: Ticone Brahé, *De disciplinis mathematicis aratio*, Amburgo, 1621; Zernecke, *Chranik von Thorn*, Berlino, 1727, 2ª ediz.; Vossio, *De scientiis mathematicis*, Amsterdam, 1660, in-4; Weidler, *Historia astronomiae*, Vittemberg, 1741, in-4; Adam, *Vitae philosophorum germanorum*, Eidelberga, 1615-20, 4 vol. in-8; Martin, *Biagraphia philosophica*, Londra, 1764, in-8; Delambre, *Histoire de l'astronomie moderne*, Parigi, 1821, 2 vol. in-4; Ghilini, *Teatra degli uamini letterati*, Milano, in-8, senza data, e Venezia, 1647, in-4; Wieland, *Teutscher Merkur' November*, 1776; Giovio, *Elogia doctorum virorum ab avorum memoria publicatis ingenii monumentis illustrium*, Basilea, 1677, in fol.; Boulliaud, *Astronomiae philolaicae prolegomena*, Parigi, 1645, in-fol.; Crasso, *Elogi di uomini letterati*, Venezia, 1656, 2 vol. in-4; ed altre citate da Lalande nella sua *Bibliographie astronomique*, Parigi, 1803, in-4, pag. 595.

COPPA (*Astron.*) Costellazione meridionale posta sull' Idra. Essa contiene trentuna stella nel catalogo di Flamstead, e trovasi presso gli scrittori rammentata coi diversi nomi di *Crater*, *Vas aquarum*, *Scyphus*, *Urna*, *Patera*, *Calix*, *Albatina*, *Poculum Apollinis*, *Bacchi*, *Herculis*, *Demophoontis*, *Achillis*, *Didonis:* in arabo si chiama *elkis* o *alkis*. La principale stella della Coppa non è che della quarta grandezza. Si è preteso che questa costellazione sia il simbolo dell' oblio: secondo i platonici, le anime venendo ad abitare i corpi umani discendono per la porta del Cancro, come nell' uscirne salgono pel Capricorno; ma discendendo verso la terra esse bevono più o meno nella *Coppa* dell' oblio, e così perdono parte di quello stato celeste del quale godevano.

COPPOLA (Niccolò), matematico e sacerdote italiano nato a Palermo, passò in Spagna e morì a Madrid nel 1697. Le sue opere, scritte tutte in lingua spagnuola, gli acquistarono molta fama: eccone i titoli in italiano: I *Risoluzione geometrica delle due proporzioni*, Madrid, 1690, in-4; II *Certezza delle operazioni della trisezione dell' angolo e formazione dell' eptagono*, ivi, 1692, in-4; III *Chiave geometrica del risultato e della dimostrazione della trisezione dell' angolo per mezzo delle linee commensurabili del quadrato*, ivi, 1693, in-4; IV *Forma e misura de' cieli*, ivi, 1694, in-4.

CORANCEZ (Luigi Alessandro Oliviero de), nato a Parigi nel 1770, senza trascurare gli studj letterarj, occupossi specialmente ne' suoi primi anni, e con un ardore affatto particolare, di quelli che sono inerenti alle matematiche e in generale alle scienze astratte. Ebbe a maestro nella scuola politecnica il celebre Lagrange, quando questi esponeva la sua teoria delle funzioni analitiche, creata appunto per quella scuola. Corancez seguì questo corso con un' assiduità e con un profitto che notare il fecero dal professore e gli meritarono i suoi elogi, tanto più pregiabili in quanto che il sommo geometra non n' era prodigo. Ci duole di non poter seguitare Corancez nelle molte, difficili e delicate commissioni che affidate gli furono dal governo e nelle quali spiegò un' abilità ammirabile; ma molto più ci duole di non poter seguitarlo nei molti ed importanti scritti da lui pubblicati sopra soggetti non concernenti le matematiche, e pei quali rimanderemo il lettore all' articolo che su questo dotto ha inserito Prouy nel *Supplimento* alla *Biografia universale*. Ci limiteremo pertanto a rammentare di Corancez: I una *Memoria analitica*, rimasta inedita, sul modo di distinguere il numero delle radici reali e delle radici immaginarie delle equazioni, della quale Lacroix e Lagrange fecero un rapporto vantaggiosissimo inserito nel *Moniteur* del mese di Luglio 1811; II *Recherches sur la résolution des équations*, stampate nel 1815 nel fascicolo X del *Giornale* della scuola politecnica; III *Théorie du mouvement de l' eau dans les vases*, Parigi, 1830, in-8. Quest'opera è divisa in quattro sezioni: la prima tratta del moto di oscillazione dell' acqua in un vaso senza orifizio, e nel quale rimane sempre contenuta; la seconda tratta del moto dell' acqua nei vasi aventi un orifizio; la terza, semplicemente analitica, contiene l'integrazione di alcune equazioni a differenze parziali; la quarta finalmente è destinata alle applicazioni delle formule della terza alla teoria del moto delle onde. Corancez fece in quest' opera una felice applicazione del metodo analitico che Fourier aveva immaginato per ottenere gl' integrali di cui fece uso nella sua *Théorie de la chaleur*. Corancez, morì il 2 Luglio 1832 colpito improvvisamente da un attacco di cholera-morbus, mentre la scienza molto ancora si aspettava dalla profondità de' suoi talenti e dall' estensione delle sue cognizioni.

CORDE (*Mec.*). Le corde delle quali si fa un grand'uso nelle macchine, si compongono di *fili* chiamati *fili* commettitori, e di cui il diametro varia da 1 a 5 millimetri. Sono essi fabbricati con filamenti di canapa di diversa lunghezza. I fili commettitori fatti coi filamenti più lunghi o di prima qualità, hanno 8 millimetri di

circonferenza; quelli fatti con filamenti di seconda qualità hanno 10 millimetri, e quelli con filamenti di terza, 14 millimetri. Le più piccole corde si chiamano *cordicine*, e sono composte di due piccoli fili attorcigliati o *commessi* insieme. Quelle che sono composte di tre fili si chiamano *merlini* o *funi*. Si chiama *funicolo* o *cordone* l'unione di molti fili commessi, ed il numero di tali fili può variare da due a sessanta. Molti cordoni o funicoli commessi formano una *corda semplice* o *canopo*, e molti canapi compongono un *gherlino* o *piccolo gomena*.

Le corde più adoperate nella costruzione e negli usi meccanici sono i *cordini* le *corde a mano*, i *funicchi* o *corde da burbera*, le *zagonelle* (così dette dai romani), le *alzoie*, ossiano canapi adoperati per rimontare le barche nei fiumi, e i *conapi poco torti* per allacciature.

I cordini sono, come dicemmo superiormente, piccole corde composte di tre fili, e servono ad allincare le pietre nella costruzione dei muri.

Le corde a mano sono composte di quattro funicoli formato ognuno di sei fili commettitori; il loro diametro medio è di 17 millimetri.

Le corde da burbera sono anch'esse formate di quattro funicoli, ma ciascuno di questi ha sette fili, il loro diametro medio è di 27 millimetri.

Le zaganelle hanno 34 millimetri di diametro, e sono composte di quattro funicoli di 10 fili ognuno.

Il diametro delle alzaie, o piccoli canapi, varia; ed eccone le dimensioni dei principali.

Diametri	47 —	54 —	66 —	81 —	milli.
Numero dei funicoli.	4 —	4 —	4 —	4	
Numero dei fili di ogni funicolo . . .	40 —	60 —	72 —	90	

Le alzaie o canapi di 81 millimetri di diametro sono i più forti che s'impiegano nelle costruzioni.

I canapi meno torti servono per legare le pietre.

Secondo il Coulomb non si debbono mai caricare le corde al di là dei 40 chilogrammi per ogni filo che le compone, benchè i detti fili potessero sostenere da 40 a 50 chilogrammi senza rompersi. Le corde bagnate perdono quasi il terzo della loro forza; e la resistenza, a diametro eguale, è pressochè, per le corde incatramate, i $\frac{2}{3}$ o i $\frac{3}{4}$ di quella delle corde naturali o bianche.

Dietro esperienze fatte dal Duhamel la resistenza delle corde bianche, alla rottura, sarebbe proporzionale al quadrato del diametro; ma essa aumenta in un rapporto un poco maggiore del loro peso sotto l'unità di lunghezza, e del numero dei fili commettitori di cui esse si compongono. Se si chiama d il diametro di una tal corda, espresso in centimetri, si potrà secondo il Navier (*Note sull'Architetturo Idraulico* del Belidor) rappresentare la forza necessaria per romperla con 400 chilogrammi $\times d^2$. La qualità della canapa e le circostanze della fabbricazione possono far variare di $\frac{1}{5}$ questo valore in più o in meno; così se una corda di 8 centimetri di diametro potrà, in seguito della formula, sopportare 400 chilogrammi $\times 84$, ovvero 33600 chilogrammi; e secondochè la sua fabbricazione sarà stata eseguita con ogni diligenza, o che la materia non sia di prima qualità essa potrà sopportare 39200 chilogrammi, ovvero 28000 chilogrammi soltanto.

Questi diversi risultamenti s' applicano d' altronde alle corde fabbricate secondo l' antico metodo. Quelle che sono fabbricate secondo i processi introdotti dall' Hubert nell' arsenale della marina di Rochefort, oltre ch' esse hanno maggiore flessibilità, offrono ancora un aumento di resistenza, che cresce proporzionalmente al numero dei fili commettitori.

Per meglio intendere ciò, convien sapere che nell' antico metodo di fabbricare le corde, i fili che le componevano erano inegualmente tesi. Puossi rappresentare una corda siffatta come il risultamento di fili paralelli torti insieme e senza potere strisciare gli uni sugli altri, in modo tale che i fili che sono alla superficie descrivono una via più lunga, e sono più tesi di quelli che stanno al centro, e i quali rimangono compressi.

» Supponiamo dice Dupin (*Corso di meccanica*) che si tiri una corda così fabbricata, con forze applicate alle sue due estremità; l' effetto di tali forze sarà di agire per allungarla. Le fibre del centro, trovandosi compresse, le forze che ora a' impiegano tenderanno a far loro riprendere il primitivo stato, e lungi di provare resistenza dal lato di questi fili, esse saranno al contrario favoreggiate dalla compressione di già esistente. Non resteranno adunque più, per opporsi all' allungamento della corda, che le sole fibre esteriori, e quelle che vi stanno immediatamente vicine.

» Così nell'antico modo di fabbricare le corde non havvi mai che una sola parte dei fili d'ogni corda, la quale si opponga all' allungamento ed alla rottura: e questi fili vi si oppongono inegualmente. Se dunque non sono capaci che di un certo grado di allungamento, quando per l' effetto di nuove forze, i fili che si trovano all' esterno della corda acquistano questo grado di allungamento, si troncano prima che i fili interni abbiano per anco acquistato la loro massima resistenza. Schiantati i primi fili esteriori, lo strato che trovasi poscia il più lontano dal centro, deve rompersi; e così avverrà di seguito fino al centro della corda.

» Tenendo conto di queste resistenze successive si è conosciuto tutto il vantaggio che avrebbesi quando i fili che compongono una corda si trovassero tutti egualmente tesi all' atto della fabbricazione della medesima. Per questo mezzo tutti i fili resisterebbero ad una volta all' allungamento; e si conosce che un tal effetto avrebbe tanta maggior efficacità, quando la corda fosse più grossa, poichè allora la differenza di allungamento tra i fili esteriori e gl' interni sarà assai più grande.

» Tale è il principio dietro il quale gl'inglesi hanno immaginato le loro nuove macchine per la fabbricazione delle corde; macchine che i nostri ingegneri più abili hanno riprodotto con modificazioni tutte proprie, e colle quali hanno ottenuto risultamenti di molta importanza per la marina francese.

» Colle macchine che il barone Lair ed Hubert fecero eseguire nei porti di Brest e di Rochefort si fabbricano corde che hanno maggior forza delle antiche, ciò che rende gli arredi dei vascelli più leggeri, in quanto che si conserva la stessa forza alle corde, diminuendo il loro diametro, e per conseguenza anche la dimensione delle carrucole impiegate a manovrare queste corde; e con ciò si alleggerisce di molto l' alberatura dei vascelli.

» Egli è a desiderarsi che nei nostri porti di commercio si adottino questi nuovi principii per la fabbricazione delle corde, stando certi che otterranno si ad un tempo dei vantaggi tanto dal lato dell' economia quanto da quello della forza. »

Torna utile qualche volta di conoscere il peso delle corde il cui diametro è stabilito: si troverà nell' una o nell' altra di queste formule.

Se vuolsi sapere il peso in *libbre*, si prenderà il quinto del quadrato della

circonferenza della corda espresso in pollici; e il risultamento sarà in libbra il peso di cinque piedi di lunghezza di queste corda. Così se la circonferenza della corda è di sette pollici, si prenderà il quinto di 49 ovvero 9, 8, il peso dei cinque piedi di questa corda, sarà di 9 libbre e $^{8}/_{5}$.

Se vuolsi sapere il peso in chilogrammi, si prenderà il quadrato della circonferenza espresso in centimetri; e moltiplicando questo numero per 0,0826 si avrà il peso di un metro di corda. Così a cagion d'esempio, se la circonferenza ha 19 centimetri, si moltiplicherà 361 per 0,0826, e il risultamento 2,98 sarà il peso in chilogrammi di un metro di questa corda.

Passiamo ora all'attrito e alla rigidezza della corde. Hachette riassume come ora vedremo alcune esperienze fatte su questo argomento dal Rondelet.

Una corda passa sul cilindro di un verricello o sulla gola di una carrucola, l'asse della quale è orizzontale, e si sospendono all'estremità di detta corda due pesi eguali. Se la corda fosse senz'alcuna rigidezza e perfettamente flessibile, la direzione dei due tratti di detta corda sarebbe verticale; ma a cagione della rigidezza essi tratti si allontaneranno dalla verticale. Se la rigidezza è considerabile, la corda non farà un intero giro sul cilindro del verricello; ed avendo fissato uno dei capi della corda in modo che il primo tratto sia in una direzione verticale, si sospende all'altro capo un peso P, che obbliga il secondo tratto della corda a prendere come il primo, una direzione verticale. Allora la corda si applica sopra una semicirconferenza del cilindro del verricello, ed il peso P si prende per *misura della rigidezza della corda.*

Supponendo che la corda che passa sulla gola di una carrucola o sul cilindro di un verricello orizzontale sia tesa da due pesi eguali P e P′, attaccati ai due capi di queste corda; e aggiungendo un peso Q all'uno dei due capi per rompere l'equilibrio dei pesi P e P′; una parte di questo peso Q è impiegata a vincere la rigidezza della corda. Ma la rigidezza è piccolissima per rispetto al peso totale Q, per cui puossi trascurare; e si prende questo peso addizionale per la *misura d'attrito.*

La rigidezza e l'attrito d'una corda dipendono da tre elementi:

1.° Dalla natura della corda e dal suo grado di torcimento;
2.° Dal diametro del cilindro sul quale si ravolge;
3.° Dal peso che essa sostiene ad ognuna delle sue estremità.

In quanto concerne alla rigidezza delle corde, ecco i risultamenti più importanti dell'espierenze del Rondelet.

Il diametro del vericello orrizzontale sul quale passa la corda assoggettata all'esperienza è di 0^{m}, 325. I due tratti della corda sono verticali, ed abbracciano una semicirconferenza dal verricello. L'uno dei capi della corda essendo fissato, si appende all'altro il peso che piega la corda sul verricello. Il peso varia, come si vede dalla tavola seguente, secondo le grossezze e i diametri della corde.

Diametri		Pesi che piegano la corda	
29	millimetri	22	chilogrammi
34	"	36	"
41	"	55	"
47	"	65	"
54	"	96	"
71	"	122	"

Ecco frattanto il riassunto dell' esperienze del Rondelet, relativamente all'attrito delle corde. Quest' esperienze furono fatte con un cilindro di frassino di 111 millimetri di diametro ed una corda di 5 millimetri di diametro. Si sospese un peso di o chilogrammi, 979 (2 libbre francesi) ad uno dei capi della corda; e si attaccò all'altro capo il più piccolo peso capace di muovere il primo. La tavola seguente indica la corrispondenza di quest'ultimo peso, e del numero dei giri della corda sul cilindro.

Numero dei giri	Chilogrammi
1/2	3,01
1 1/2	7,10
2 1/2	16,98
3 1/2	40,63
4 1/2	87,92

Si è osservato che i numeri della *colonna dei giri* formano una progressione aritmetica della quale la ragione è 1, mentre i numeri della colonna dei pesi differiscono di poco da una progressione geometrica, di cui la ragione sarebbe di 1,54, elevato al quadrato. Questo termine 1,54 si ottiene dividendo il primo numero 3 chilogr. 01, per 1 chilogrammo, 958, doppio del peso o chilogrammi 979, che determina il movimento della corda. Questo calcolo è stato verificato mediante altre esperienze.

Si attaccò ad uno dei capi della corda un peso di 2 chilogrammi, 937 (6 libbre francesi), e si trovò che per fargli equilibrio, quando non havvi che un mezzo giro, occorreva un peso di 17 chilogrammi, 62 (36 libbre francesi), e che per un giro e mezzo occorrevano 163 chilogrammi, 95, (332 libbre francesi). La ragione geometrica verrà data perciò mediante la divisione di 17 chilogrammi, 62 per due volte 2 chilogrammi, 937, ovvero 5 chilogrammi, 87, ciò che dà 3 chilogrammi, di cui il quadrato è 9. Il secondo termine della progressione sarà dunque: 17,62×9 = 158, chilogrammi, 58: ma l'esperienza diede invece 163,95.

Si applicò ad un capo della corda rivolta ad un cilindro di 325 millimetri di diametro un peso di 7 libbre, e si trovò che per farvi equilibrio, occorreva attaccare all'altro capo un peso di 44 libbre per un mezzo giro, e di 442 libbre per un giro e mezzo. Seguitando la regola, quest' ultimo numero sarebbe

$$44 \times \left(\frac{44}{2\times 7}\right)^2 = 439.$$

Si applicò un peso di 100 libbre ad una delle estremità di un capo del canapo di 27 linee di diametro, ed è occorso, per cominciare a sollevarlo, di attaccare all' altra estremità un peso di 367 libbre. Dietro la regola precedente si troverebbe che la corda, facendo un giro e mezzo sul verricello, il peso capace di far equilibrio al peso di 100 libbre sarebbe di 1468 libbre; dopo due giri e mezzo questo peso sarebbe di 5000 libbre circa.

Queste esperienze basteranno per dare un'esatta idea degli effetti prodotti dall'attrito delle corde sui verricelli dell'argano. Più la grossezza delle corde aumenta, dice l'Hachette, più si aumenta il diametro dei verricelli, sui quali esse si ravvolgono. Nella pratica si determina il diametro del verricello che spetta ad una data grossezza, supponendo che le rigidezze delle corde siano in ragione diretta dei quadrati dei loro diametri, e nei rapporti inversi dei diametri dei verricelli: dimodochè la rigidezza per una corda d'un diametro C che si ravvolge sopra un verricello di un

diametro D, essendo $\frac{C^2}{D}$, sarebbe essa per un'altra corda di un diametro c, che si ravvolgesse sopra un altro verricello d'un diametro d, $\frac{c^2}{d}$.

Le rigidezze delle corde dei diametri C, c non cangiano quand'esse si ravvolgono sul verricello di diametro D, e l'altra sul verricello di diametro d, se si ha $\frac{C^2}{D} = \frac{c^2}{d}$; e se i diametri dei verricelli sono proporzionali ai quadrati dei diametri delle corde. Si segue la stessa regola per determinare i diametri delle carrucole, e le grossezze delle corde che girano sulle gole delle medesime.

Ciò che abbiamo detto fin qui basta per la pratica la più generale. Tuttavolta, siccome questo soggetto è della massima importanza, ci teniamo in dovere di riportare la seguente teoria dedotta dall'esperienze del Coulomb.

I calcoli della meccanica sono stati fatti supponendo che le corde siano ridotte ad un filo inestensibile e perfettamente flessibile; ma nella pratica le corde avendo dei diametri spesso assai grandi, ed una tensione tanto più considerabile, quanto esse sono più grosse, i risultamenti del calcolo non sono applicabili senza grandi modificazioni. Per poter valutare queste correzioni, l'Amontons, nel 1699, fece dell'esperienze dirette per determinare come la tensione delle corde era funzione del loro diametro. Ma, essendosi servito di cordicelle invece che di corde, i suoi risultamenti non erano punto applicabili alla pratica, e dobbiamo al Coulomb il metodo per poter valutare esattamente qual'è la forza necessaria per vincere la tensione di una corda di una grossezza determinata. Egli cominciò a servirsi di un apparecchio simile a quello dell'Amontons; ma per poter valutare la tensione di una corda che passa nella gola di una puleggia, impiegò il seguente apparecchio, che sembra il migliore di tutti quelli ai quali possiamo ricorrere.

Sopra due cavalletti solidamente stabiliti di sei piedi di altezza, riposano due pezzi di legno squadrati, sopra i quali sono applicati due regoli di quercia diritti e puliti. Sopra questi regoli, bene allivellati, si pone un cilindro di guajaco o di qualunque altro legno di un diametro e di un peso determinato. Con l'aiuto di cordicelle di due linee di diametro, e delle quali la tensione non è eguale a $\frac{1}{30}$ di quella della corda di sei fili, si sospendono da ciascun lato del cilindro dei pesi di 50 libbre. Con questo mezzo, si produce sopra i regoli una pressione determinata. Aggiungendo successivamente da ciascun lato del cilindro dei leggeri contrappesi, si determina qual'è la forza necessaria per dare al cilindro un moto continuo insensibile, vale a dire per vincere il suo attrito. Si trova così che l'attrito dei cilindri rotolando sopra piani orizzontali, è in ragione diretta delle pressioni, e in ragione inversa del loro diametro. (*Vedi* Attrito). L'attrito dei cilindri essendo determinato, si cerca qual è il peso addizionale che può produrre un moto continuo insensibile, quando corde di una dimensione determinata, e caricate di pesi dati, sono piegate sopra i cilindri; e sottraendone la parte del peso destinata a vincere l'attrito dei cilindri, è evidente che il resto sarà la forza necessaria per piegare la corda sopra il cilindro.

Digitized by Google

TAVOLA DELL' ESPERIENZE FATTE DAL COULOMB NELL' ANNO 1781.

PER DETERMINARE LA TENSIONE DEI CORDAMI

Corde impiegate nelle esperienze	Specie di legno diametri e pesi dei cilindri	Pesi sospesi da ciascun lato del cilindro	Pesi addizionali per superare l' attrito del cilindro e la tensione delle corde	Pressione dei cilindri	Attrito dei cilindri	Tensione della corda eguale alla differenza fra il peso addizionale e l'attrito del cilindro	
						Secondo il metodo del Coulomb	Secondo il metodo dell'Amontons
		libbre	libbre	libbre	libbre	libbre	libbre
Corda bianca N.° 3. di 30 fili	Olmo di 12 pol. di diam. che pesa 100 libbre	190	5	315	1, 5	3, 5	4, 4
		300	11	721	3, 6	7, 4	10, 4
		500	20	1130	5, 6	14, 4	16, 4
Medesima corda	Guajaco di 6. pol. di diam. che pesa 50 lib.	200	16	466	2, 8	13, 2	14, 8
Corda bianca N.° 2, di 15 fili	Guajaco di 6 pol. di diam. pesante 50 libbre	208	11	461	2, 8	8, 2	7, 4
		500	24	1074	6, 4	17, 6	17, 8
Corda bianca N.° 1, di 6 fili	Guajaco di 6 pol. di diam. pesante 50 libbre	200	6	456	2, 7	3, 3	3

Si vede da questa tavola che il metodo dell' Amontons e quello del Coulomb danno presso a poco i medesimi risultamenti. Il Coulomb attribuisce le differenze le più grandi a non essere il grado del logoro il medesimo nelle corde alle esperienze corrispondenti.

Con l' aiuto di quest' esperienze, si determina la forza necessaria per piegare una corda intorno di un cilindro, allorchè il moto di questo è insensibile, ma affine di poterle applicare alla pratica, era necessario di cercare se i risultamenti restavano i medesimi nel caso di una velocità finita. Il Coulomb ha trovato per risultamento dell' esperienze fatte in questo caso, che in qualunque macchina di rotazione il rapporto di rotazione all' attrito può sempre supporsi costante, e l' influenza della velocità è troppo piccola per avervi riguardo. La resistenza che bisogna vincere per piegare una corda sopra un cilindro è rappresentata dalla formula

$$\frac{d^y}{D}(n+n'T)$$

nella quale d^y è una potenza del diametro d della corda, D il diametro del cilindro, n e n' delle quantità costanti determinate dall' esperienza, e T la tensione della corda.

In quanto all' esponente y il suo valore dipende principalmente dallo stato delle corde, e trovasi compreso tra i limiti $y=2$, e $y=1$, dimodochè si ha $y=2$ per le grosse corde nuove, $y=1,5$ per le corde semi usate, $y=1$ per funicelle sottilissime e debolissime Se trattasi di corde impeciate, sembra dietro l'esperienze, che in luogo di supporre la rigidezza proporzionale alla potenza y del diametro, sia più esatto supporla proporzionale al numero dei fili di torsione, dei quali la corda è composta, tanto più che l' esperienza ha provato non variare sensibilmente l' esponente y, nelle corde impeciate, qualunque sia il loro grado di uso. L' esperienze pure hanno fatto manifesto che la velocità del moto aumentava un poco la rigidezza, ma che l' aumento non era molto sensibile perchè necessitasse di tenerne conto nella pratica, specialmente ove si tratti di tensioni considerabili.

Ecco frattanto altri risultamenti dell' esperienze disposti in modo da renderne facili l' applicazioni. L' esperienza aveva luogo sopra un albero di un metro di diametro.

Indicazione delle corde sottoposte all' esperienza	Diametro delle corde uguale a d	Pesi delle corde per ogni metro di lunghezza
		chil.
N. 1. Corda bianca di 30 fili di torcimento	0^m, 0200	0, 2834
N. 2. Corda bianca di 15. fili	0^m, 0144	0, 1448
N. 3. Corda bianca di 6. fili	0^m, 0088	0, 0522
N. 4. Corda impeciata di 30 fili	0^m, 0236	0, 3326
N. 5. Corda impeciata di 15 fili	0^m, 0168	0, 1632
N. 6. Corda impeciata di 6. fili	0^m, 0096	0, 0693

Numeri delle corde	Rigidezza costante $=d^y \times n$ chil.	Rigidezza per ogni chil. di carico $=d^y \times n'$ chil.
1	0, 22246	0, 0097
2	0, 06351	0, 0055
3	0, 01090	0, 0024
4	0, 3496	0, 0061
5	0, 1059	0, 0061
6	0, 02120	0, 0026

Si vede da questa tavola che una corda bianca di 30 fili di torcimento, di cui il diametro è $0^m,02$, e che soffre in una macchina una tensione eguale ad un certo numero di chil. che noi chiamamo q, produce per la sua rigidezza, quand'essa si ravvolge sopra un albero, di cui il diametro è r, una velocità espressa in chilogrammi da

$$\frac{1}{r}(0,222+0,0097\times q),$$

il diametro r essendo valutato in *metri*; . . . e così dicesi dell'altre corde.

Per far uso nella pratica di questi risultamenti converrà cominciare dal calcolare la rigidezza di quella fra le corde comprese nella data tavola, che più si ravvicinerà, sia per la sua composizione che per la sua grossezza, a quelle che si vorrà sperimentare, dando ad r ed a q i valori che hanno luogo nelle macchine che si vogliono calcolare, dipoi, se trattasi di una corda bianca, il cui diametro sia $=d$, si moltiplicherà il risultamento pel rapporto $\left(\frac{d'}{d}\right)^y$, prendendo per y un numero compreso tra 1 e 2 conformemente a ciò che si disse più alto.

Per esempio, supponiamo che si voglia calcolare la rigidezza di una corda bianca e nuova di un diametro $r=0^m,045$, e che sopporti una tensione $Q=5000$ chilogrammi. Si paragonerà alla prima corda della tavola, il diametro della quale è $d=0^m,02$, e che si ravvolge sopra un albero di un metro di diametro. La sua rigidezza si trova dunque espressa da

$$\frac{1}{0,45}(0,0222+0,0097\times 5000)\times\left(\frac{0,04}{0,02}\right)^y.$$

Si farà $y=2$ poichè trattasi di una corda nuova, e si troveranno 435 chilogrammi. Questa cifra esprime l'eccedente di forza da impiegare per la rigidezza.

Per secondo esempio, si calcolerà la rigidezza di un canapo di 120 fili di torsione, che si ravvolge sopra un albero d'un diametro $r=0^m,54$, facendo uno sforzo $q=3916$ chilogrammi. Confrontando questo canapo a quello di 30 fili di torcimento della tavola, si troverà la sua rigidezza rappresentata da

$$\frac{1}{0,54}\left(0,35+0,1255\times 3916\times\frac{120}{30}\right)=367 \text{ chilogrammi},$$

che esprime la rigidezza cercata.

Aggiungeremo di più le seguenti riflessioni: L'esperienze hanno insegnato che le corde bianche imbevute d'acqua avevano una rigidezza sensibilmente maggiore delle secche, soprattutto quando erano un poco grosse. L'aumento avviene principalmente sulla frazione costante $d^2 \times n$ dell'espressione della rigidezza della corda, e che volendo aver riguardo a questa circostanza, si duplicheranno nella tavola i numeri che la rappresentano. La rigidezza delle corde incatramate aumenta un poco, quando la temperatura si abbassa al di sotto del ghiaccio fondente, e un tale aumento avviene pure sulla parte costante. Si è ancora osservato che quando una corda piegava sopra una carrucola, essa aveva bisogno di un certo tempo per riprendere tutta la rigidezza di cui era capace, e che aveva dapprima manifestata.

Le macchine nelle quali le corde sono più generalmente impiegate, essendo l'argano e la puleggia, conviene ricorrere a queste parole per vedere come si è potuto applicare al calcolo delle macchine, i risultamenti somministrati dall'esperienze. (*Vedi* Puleggia e Argano). Di più si potrà ancora consultare *la teoria delle macchine semplici del Coulomb.*

Corde vibranti. *Vedi* Vibrazione.

CORDE CONTINUE o PERPETUE. (*Mec.*) Si chiamano così quelle corde di cui le due estremità sono riunite, e le quali passano sopra pulegge o cilindri per trasmettere il moto dall'uno all'altra.

CORDE (*Geom.*) Linee rette di cui ciascuna unisce le due estremità di un arco. *Vedi* Nozioni Preliminari e Circolo.

CORDE DI CONTATTO. Risolveremo in questo punto alcuni problemi sopra le corde di contatto.

Problema I. *Trovare l'espressione analitica della corda compresa nel circolo.* Siano

$$y = Ax + B \ldots\ldots\ldots (1),$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \ldots (2),$$

l'equazioni le più generali del circolo e della linea retta (*Vedi* Applicazione *dell'algebra alla Geometria*) nelle quali indichiamo con le medesime coordinate che queste linee hanno dei punti comuni. Si cercheranno le coordinate di questi punti comuni come segue.

Il valore di y dato dall'equazione (1) si sostituisce nell'equazione (2), e si trova dopo avere ordinato rapporto ad x,

$$x^2(1+A^2) - 2[a - A(B-b)]\,x = R^2 - [a^2 + (B-b)^2],$$

donde

$$x = \frac{a - A(B-b)}{1+A^2} \pm \frac{\sqrt{R^2(1+A^2) - [Aa + (B-b)]^2}}{1+A^2}$$

e

$$y = \frac{B + A(Ab+a)}{1+A^2} \pm \frac{A\sqrt{R^2(1+A^2) - [Aa + (B-b)]^2}}{1+A^2},$$

tali sono in generale i valori dei punti d'incontro di un circolo e di una secante.

La corda intercetta dalla circonferenza ha evidentemente per espressione

$$C = \sqrt{(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2},$$

x' e x'', y' e y'' rappresentando i valori corrispondenti ai segni + e — nei valori generali di x e di y.

Ora

$$x'-x''=\frac{2\sqrt{R^2(1+A^2)-[Aa+(B-b)]^2}}{1+A^2},$$

$$y'-y''=\frac{2A\sqrt{R^2(1+A^2)-[Aa+(B-b)]^2}}{1+A^2}.$$

Elevando al quadrato e sostituendo troveremo fatte tutte le ridozioni

$$C=\pm\frac{2}{\sqrt{1+A^2}}\sqrt{R^2(1+A^2)-[Aa+(B-b)]^2}\ldots.(3).$$

Possiamo determinare B assoggettando la retta a certe condizioni, per esempio di passare per un punto dato (a', b'). Queste coordinate dovendo soddisfare alla relazione

$$y=Ax+B;$$

avremo

$$b'=Aa'+B,\quad \text{donde}\quad B=b'-Aa'$$

sostitoendo questi valori nell' equaziooe (3), avremo

$$C=\pm\frac{2}{\sqrt{1+A^2}}\sqrt{R^2(1+A^2)-[A(a-a')-(b-b')]^2}.$$

Allorchè C ha un valore dato, l'equazione sviluppata

$$A^2-2\frac{(a-a')(b-b')}{(a-a')^2-\left[R^2-\frac{C^2}{4}\right]}A+\frac{(b-b')^2-\left[R^2-\frac{C^2}{4}\right]}{(a-a')^2-\left[R^2-\frac{C^2}{4}\right]}=0\ldots(4)$$

dà la soluzioone del segoente problema.

Condurre per un punto dato una secante tale, che la parte compresa nel circolo sia eguale ad una lunghezza data.

Infatti, i due valori trovati di sopra per x ed y si ridurranno ad uno solo, allorquando il radicale sarà nullo: dunque

$$R^2(1+A^2)-[Aa+(B-b)]^2=0\ldots.(5),$$

sarà l'equazione finale che esprime che la secaote ed il cirsolo non hanno che un solo punto comune, vale a dire che esprime le condizioni di tangeoza.

Sostitueodo nell' eqnazioone (5) il valore di B ricavato come sopra si ottiene

$$R^2(1+A^2)-[A(a-a')-(b-b')]^2=0\ldots.(6)$$

sviloppando e ordinsodo vieoe

$$A^2[R^2-(a-a')^2]+2A(a-a')(b-b')+R^2-(b-b')^2=0$$

e finalmente

$$A^2-2\frac{(a-a')(b-b')}{(a-a')^2-R^2}A+\frac{(b-b')^2-R^2}{(a-a')^2-R^2}=0$$

ora paragonando quest' equazione con l' equaziooe (n.° 4) si riconosce con faci-

lità che le secanti, le quali godono della proprietà domandata, devono essere tangenti al circolo il di cui raggio è $\sqrt{R^2-\frac{C^2}{4}}$ concentrico al primo, vale a dire descritto con un raggio eguale alla perpendicolare abbassata dal centro sopra una corda eguale a C: mediante questa osservazione con facilità se ne eseguisce la costruzione.

Dall'equazione (n.° 5) si deduce ancora

$$R=\pm\frac{Aa+(B-b)}{\sqrt{1+A^2}}$$

donde si riconosce l'espressione della perpendicolare abbassata dal punto (a, b) sopra la linea di cui l'equazione è

$$y=Ax+B:$$

dunque la tangente è perpendicolare all'estremità del raggio.

Problema II. *Trovare sopra la linea che unisce i centri di due circoli dati un punto tale, che conducendo per questo punto una secante comune ai due circoli, le corde intercette da essi siano eguali fra loro e ad una lunghezza data.*

Dal valore generale

$$C=\pm\frac{2}{\sqrt{1+A^2}}\sqrt{R^2(1+A^2)-[A(a-a')-(b-b')]^2}$$

Si vede che, per un secondo circolo di cui le coordinate del centro fossero a_1, b_1, e il raggio R_1, la corda intercetta dalla medesima secante sarà

$$C'=\pm\frac{2}{\sqrt{1+A^2}}\sqrt{R_1^2(1+A^2)-[A(a_1-a')-(b_1-b')]^2}.$$

Se poniamo l'origine degli assi al centro del primo circolo, l'asse delle x passando pel centro del secondo, e d'altra parte il punto cercato dovendo trovarsi sopra quest'asse, avremo

$$a=0,\quad b=0,\quad b_1=0,\quad b'=0;$$

finalmente, se indichiamo con $2l$ la lunghezza, troveremo facilmente i valori

$$A=\pm\frac{\sqrt{R^2-l^2}}{\sqrt{a'^2-(R^2-l^2)}},$$

$$A=\pm\frac{\sqrt{R_1^2-l^2}}{\sqrt{(a'-a_1)^2-(R_1^2-l^2)}}.$$

Eguagliando questi valori, e per abbreviare, ponendo

$$\sqrt{R^2-l^2}=h,\quad \sqrt{R_1^2-l^2}=h',$$

si avrà

$$\pm\frac{h}{\sqrt{a'^2-h^2}}=\pm\frac{h'}{\sqrt{(a'-a_1)^2-h'^2}}$$

donde si ricava

$$a' = \frac{h}{h \pm h'} d$$

$d = a$, indicando la distanza dei centri.

Da ciò questa costruzione. Si cerchi sopra la linea dei centri due punti tali, che le loro distanze a ciascuno dei centri siano fra loro come le lunghezze h e h', e per questi punti si conduca ad uno dei circoli una secante tale che la corda intercetta sia di una lunghezza 2C: la corda intercetta nell' altro circolo sarà della medesima lunghezza.

I due seguenti problemi, come pure quello che precede, sebbene eguali ad altri risoluti nella teoria dei contatti, ho creduto risolverli nuovamente con alcune modificazioni, stantechè essi determinano con facilità l' equazione delle corde di contatto.

Problema I. *Essendo date due circonferenze concentriche da tutti i punti* P *dell' interno* (Tav. *LXXXIV*, fig. 8) *si conducano le tangenti* tPt', *e per tutti i punti* t *e* t' *le tangenti alla circonferenza esterna* Mt, Mt': *trovare il luogo geometrico dei punti d' incontro di queste tangenti.*

Siano

$$q^2 + p^2 = r^2 \ldots\ldots (1),$$

$$y^2 + x^2 = R^2 \ldots\ldots (2);$$

l' equazioni dei circoli dati, l' origine degli assi essendo situata al loro centro. La tangente tPt' avrà per equazione (*Vedi* Contatto n.° 12.)

$$yq + xp = r^2 \ldots\ldots (3),$$

y ed x essendo le coordinate correnti di questa linea considerata come corda dell' altra circonferenza.

Da un' altra parte questa corda, rapporto alle tangenti tM, t'M avrà per equazione

$$by + ax = R^2 \ldots\ldots (4).$$

Queste due equazioni dovendo dare i medesimi valori per x e per y, se le risolviamo rapporto ad y e che si eguaglino i coefficienti, troveremo

$$y = -\frac{p}{q} x + \frac{r^2}{q},$$

$$y = -\frac{a}{b} x + \frac{R^2}{b};$$

donde

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \ldots\ldots (5),$$

$$\frac{r^2}{q} = \frac{R^2}{b} \ldots\ldots (6).$$

Eliminando finalmente fra le tre equazioni (1), (5), e (6) le indeterminate p e q si trova

$$a^2 + b^2 = \frac{R^4}{r^2},$$

equazione di un circolo concentrico ai circoli dati, e di cui il raggio è una terza proporzionale ai loro raggi, che potremo costruire come segue.

Si conduca la tangente rs parallela all'asse delle x, e il punto I, ove le tangenti rI ed sI s'incontrano, determinerà il raggio cercato OI: infatti il triangolo rettangolo Ols dà

$$\overline{Os}^2 = OH \times OI,$$

donde

$$OI = \frac{R^2}{r}.$$

Problema II. *Condurre una tangente comune ai due circoli.*

È evidente che la secante sarà tangente nel medesimo tempo ai due circoli i di cui raggi sono h e h'. In generale se supponiamo $2l = 0$ (Problema 2°), troveremo

$$a' = \frac{R}{R \pm R'} d.$$

Dunque, per condurre la tangente comune ai due circoli, si cerchi sopra la linea che unisce i centri i due punti tali, che il rapporto delle loro distanze a ciascuno dei centri sia il medesimo che quello dei raggi, e per questi punti si conducano le due tangenti ad uno dei circoli: esse saranno ancora tangenti all'altro.

Questa costruzione è facilissima (*Tav.* LXXXIV, *fig.* 9) si conduca un raggio qualunque OI e il diametro parallelo I' O' I''; si unisce II', II'', i punti T_1 T_2 sono i punti cercati. Il punto interno corrisponde al segno +; questi punti hanno ricevuto il nome di *centri di similitudine* dei circoli, perchè i raggi vettori condotti da questi punti alle circonferenze sono proporzionali ai raggi

Se il secondo circolo fosse situato in una maniera qualunque nel piano, a_1 e b_1 essendo le coordinate del centro, sarebbe facile di determinare le coordinate dei centri di similitudine. Infatti le coordinate non essendo altra cosa che le proiezioni sopra gli assi di una lunghezza determinata d, se indichiamo con v l'inclinazione delle linee dei centri sopra l'asse delle x, avremo

$$x = \frac{R}{R \pm R'} d \cos v, \qquad y = \frac{R}{R \pm R'} d \operatorname{sen} v;$$

ma poichè la linea dei centri passa per l'origine e per il punto di cui le coordinate sono a_1, b_1, avremo

$$\operatorname{tang} v = \frac{b_1}{a_1},$$

donde

$$\operatorname{sen} v = \frac{\frac{b_1}{a_1}}{\sqrt{1 + \frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{b_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{b_1}{d}$$

$$\cos v = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b_1^2}{a_1^2}}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_1}{d},$$

per conseguenza

$$x = \frac{R}{R \pm R'} a_1, \qquad y = \frac{R}{R \pm R'} b_1.$$

Abbiamo trovato sopra per la corda dei punti di contatto delle due tangenti condotte pel punto a, b, al circolo $x^2+y^2=r^2$ l'equazione

$$by+ax=r^2.$$

Se si sostituisce ad a, $\frac{R}{R \pm R'} a_1$, e a b, $\frac{R}{R \pm R'} b_1$, e r con R, avremo

$$b_1 y + a_1 x = R(R \pm R'),$$

equazione della corda di contatto dei punti di tangenza determinati dalla tangente comune al circolo, di cui il centro è all'origine.

$$\text{Se } b_1 = 0, \qquad x = \frac{R(R \pm R')}{a_1}.$$

Per la corda di contatto di un secondo circolo, di cui l'equazione è

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=R'^2,$$

si trova egualmente l'equazione

$$(b-b_1)(y-b_1)+(a-a_1)(x-a_1)=R'^2$$

a e b essendo le coordinate del punto donde le due tangenti sono condotte.

Sostituendo a b ed a i loro valori, si ottiene fatta ogni riduzione

$$b_1(y-b_1)+a_1(x-a_1)=\mp R'(R' \pm R),$$

corda di contatto della tangente comune sopra il secondo circolo.

$$\text{Se } b_1 = 0, \qquad x = \frac{a_1^2 \mp R'(R' \pm R)}{a_1}.$$

CORDIER (Niccolò), prete nato ad Hâvre nel 1682, fu per più di quarant'anni professore d'idrografia a Dieppe, ove morì nel 1766. Si ha di lui un'opera molto pregiata intitolata: *Instruction des pilotes*, divisa in tre parti, cioè: il *Pilotage*, le *Tables de déclination*, e il *Journal de navigation*. Suo padre fu anch'esso autore di varie operette di navigazione assai stimate al suo tempo.

CORDOVA (Alfonso di), astronomo e medico, nato a Siviglia, viveva sotto il regno di Ferdinando e Isabella. Compiè e corresse il famoso almanacco perpetuo dell'ebreo Abram Zacuth, intitolato: *Almanach perpetuum solis*, e lo fece stampare nel 1496, in-4. Abbiamo pure dello stesso Cordova alcune *Tavole astronomiche* in latino, Venezia, 1517, in-4.

CORMONTAINGNE, celebre ingegnere francese, nacque sulla fine del secolo XVII, e morì il 20 di Ottobre 1752, in età di quasi 60 anni. Entrato nel 1713 nel corpo degl'ingegneri, ne percorse tutti i gradi, e fu finalmente creato maresciallo di campo. Rivolse interamente i suoi studj all'arte di fortificare le piazze, e le grandi opere che sotto il regno di Luigi XV aggiunte vennero alle fortezze di Metz e di Thionville furono costrutte dietro i suoi progetti e sotto la sua direzione. Se non creò un sistema particolare, perfezionò quello di Vauban introducendovi un gran numero di importanti miglioramenti. Le sue opere spesso ristampate, ma sempre con infiniti errori e alterazioni, non furono ristabilite

nel loro testo che di recente, per cura degl'ingegneri Bayart, Fourcroy e Lafitte, che le pubblicarono, insieme con altri scritti inediti dello stesso autore, in tre volumi intitolati: I *Mémorial pour l'attaque des places, ouvrage posthume de Cormontaingne, maréchal-de-champ, directeur des fortifications des places de la Moselle, ec., édition autographe, enrichie d'additions tirées des autres manuscrits de l'auteur*, Parigi, 1806, in-8; II *Mémorial pour la défense des places, faisant suite au Mémorial pour l'attaque*, ivi, 1806, in-8; III *Mémorial pour les fortifications permanente et passagère*, ivi, 1809, in-8. Questi tre volumi compiono il *Manuel de l'officier de génie*.

CORNETTO ACUSTICO (*Acustica*). Strumento destinato a trasmettere i suoni all'orecchio, aumentando la loro intensità. Il cornetto acustico rende all'orecchio un servigio simile a quello che gli occhiali prestano agli occhi.

COROLLARIO. Si chiama così una conseguenza dedotta da una proposizione stabilita e dimostrata. Così dopo avere stabilito per esempio, che i tre angoli di un triangolo sono eguali a due angoli retti, se ne deduce come Corollario, che due triangoli nei quali i due angoli dell'uno sono eguali ai due angoli dell'altro, hanno i loro tre angoli eguali ciascuno a ciascuno.

CORONA AUSTRALE. (*Astron.*). Costellazione meridionale posta tra il Sagittario e l'Altare. Trovasi rammentata dagli scrittori coi diversi nomi di *Corona austrina*, *Corolla notia*, *Sertum australe*, *Caduceus*, *Orbiculus capitis*, *Corona Sagittarii*, *Rota Ixionis*. Dicono i poeti che Bacco pose questa corona nel cielo in onore di sua madre Semele: altri dicono che questa corona è quella che fu conferita a Corinna di Tebe, celebre poetessa che riportò cinque volte la vittoria su Pindaro. La stella principale di questa costellazione non è che di quinta grandezza.

CORONA BOREALE (*Astron.*). Costellazione settentrionale composta di ventuna stella nel Catalogo britannico. Trovasi rammentata negli scrittori coi nomi di *Corona Ariadnae*, *Cretica*, *Gnossia*, *Corona Vulcani*, *Amphitrites*, *Thesei*, *Minois*, *Diadema coeli*, *Oculus*. La stella più bella di questa costellazione è di seconda grandezza, ed è specialmente chiamata: *Gnossia*, *Gemma*, *Margarita*, *Pupilla*, *Rosa aperta*, *Lucida Coronae*; gli Arabi la chiamano *Mumir*.

Suppongono i poeti che questa costellazione rappresenti la corona d'Arianna, che insegnò a Teseo la maniera di uscire dal labirinto di Creta, donde le venne il nome di *Gnossia* e di *Cretica*. Abbandonata Arianna nell'isola di Nasso, fu sposata da Bacco; e questo Dio pose in cielo la corona che Vulcano aveva dato a Venere, e Venere ad Arianna. Questa costellazione è posta tra Ercole, Boote, e il Serpentario, come osserva Ovidio:

> . . . . . *Utque perenni*
> *Sidere clara foret, sumptam de fronte coronam*
> *Immisit coelo. Tenues volat illa per auras;*
> *Dumque volat, gemmae subitas vertuntur in ignes;*
> *Consistuntque loco, specie remanente coronae,*
> *Qui medius nixique genu est, anguemque tenentis.*
> METAM. *Lib.* VIII, *vers.* 177.

> *Bacchus amat flores: Baccho placuisse coronam*
> *Ex Ariadnaeo sidere nosse potes.*
> FAST. *Lib.* V, *vers.* 345.

Altri vogliono che questa corona sia quella che Teseo ricevè da Anfitrite, quando si gettò in mare per cercare la perla di Minosse. Dupuis sostiene che

questa costellazione rappresenta la famosa Proserpina degli antichi, e che il Serpentario che le rimane sotto è il loro Plutone.

CORONELLI (Marco Vincenzo), geografo nato a Venezia, entrò giovanissimo ne' minori conventuali. La fama che presto si acquistò nelle matematiche lo fece chiamare in Francia per costruirvi i due grandi globi che si vedono nella biblioteca reale. Il loro diametro è di dodici piedi meno un mezzo pollice: ma, a motivo dei grandi progessi che modernamente ha fatto la geografia, tali globi si ammirano oggigiorno più per la bellezza della loro esecuzione che per la loro utilità. Coronelli gli terminò nel 1683, e nel 1685 tornò in patria, ove fu creato cosmografo della repubblica, e, quattro anni dopo, professore di geografia. Morì a Venezia nel Dicembre 1718, dopo aver pubblicato un gran numero di opere, e più di quattrocento carte geografiche. I più importanti de' suoi lavori sono i seguenti: I *Atlante Veneto*, Venezia, 1690, in-fol.; II *Portolano del mare mediterraneo*, ivi, 1698, in-fol.; III *Isolario, descrittione geografico-istorica, sacro-profana, antico-moderna, naturale e poetica, ec.*, Ivi, 1696, 2 vol. in-foglio.

CORPO. Questa parola in *geometria* indica la medesima cosa di solido. *Vedi* Solido.

CORPO di tromba. (*Idraul.*). Si dà questo nome nelle trombe idrauliche, alla parte del tubo nel quale lo stantuffo si muove.

CORRENTE D'ACQUA. (*Idraul.*). Nome generico di una data quantità d'acqua la quale si muove con una velocità e in una direzione qualunque.

L'acqua non può essere applicata come forza motrice alle macchine che quando essa è in moto. Nel suo stato di riposo essa è una massa inerte, come tutti gli altri corpi materiali, incapace a servire di motore, e che può tutto al più rendere il moto che gli sarebbe comunicato da una forza estranea. La gravità è il principio d'azione dell'acqua corrente; ed è allorchè essa è trasportata dal suo peso da un punto verso un'altro meno elevato, che essa acquista una forza impulsiva, l'intensità della quale dipende nello stesso tempo dalla massa mobile e dalla sua velocità. Gl'immensi servizii che questo motore naturale ha reso all'industria, avanti l'invenzione delle macchine a vapore, quelli che essa dovrà ancora rendere, malgrado queste potenti macchine, le quali non potrebbero essere sostituite con vantaggio in tutte le località, ci determinano a presentare tutte le formule pratiche le più recenti, dalle quali dipende il moto delle acque.

Le diverse circostanze che accompagnano il moto dell'acque correnti dipendono dalla natura del letto che le contiene. Quando questo letto è un canale scavato dalla mano dell'uomo, presenta generalmente un medesimo declivio ed una medesima sezione trasversale in tutte le sue parti, e conduce, per conseguenza, un medesimo volume d'acqua in tutta la sua lunghezza. Quando al contrario questo letto è irregolare come quello dei fiumi, i volumi d'acqua della medesima lunghezza non sono più eguali, e la velocità della corrente varia con la larghezza e la profondità delle differenti parti del suo letto. Le leggi del moto dell'acque essendo più semplici ed offrendo meno difficoltà nei canali artificiali che nei letti dei fiumi, esamineremo prima di tutto quello che spetta a questi canali.

Moto delle acque nei canali

1. Si chiama *declivio assoluto* di un canale la differenza di livello delle sue due estremità, e *declivio* propriamente detto quello che è relativo all'unità di lunghezza. Per esempio, se la differenza di livello delle due estremità di un ca-

nale lungo 100 metri è di dieci metri, il suo declivio assoluto sarà di 10 metri, e il suo declivio propriamente detto, di $\frac{10}{100} = 0^m,1$, ossia *di un centimetro per metro.*

Per avere il declivio propriamente detto, basta di conoscere il declivio assoluto di una porzione del canale o la differenza di livello dalle due estremità di questa porzione, poichè chiamando l la lunghezza, d la differenza di livello, e p il declivio per l'unità di lunghezza, si ha evidentemente $p = \frac{d}{l}$.

Possiamo ancora determinare questo declivio propriamente detto, che indicheremo semplicemente in tutto ciò che segue col nome di *declivio*, per mezzo dell'angolo d'inclinazione della corrente d'acqua con la linea orizzontale. Infatti supponiamo che la retta AE (*Tav.* LXXXV, *fig.* 1.) rappresenti la direzione dell'acqua o l'*asse* della corrente, se per un punto qualunque A di questa linea si conduce una retta orizzontale AB, e per un altro punto C, una retta verticale CB, CB sarà la differenza di livello dei due punti A e C, e indicando AC per l e BC per d, avremo come sopra, per il declivio p, $p = \frac{d}{l}$; ma i indicando l'angolo d'inclinazione BAC, abbiamo ancora

$$1 : \text{sen}\, i = l : d,$$

donde $\text{sen}\, i = \frac{d}{l}$, e per conseguenza, $p = \text{sen}\, i$.

Sapendo, per esempio, che l'angolo i è di 5° 10′, si cercherà nelle tavole il logaritmo del seno di 5° 10′, e il numero corrispondente a questo logaritmo, dal quale bisognerà prima d'ogni altra cosa sottrarre 10 unità per tener conto del raggio delle tavole, sarà il declivio domandato. Si ha perciò

$$\text{Log sen}\,(5^\circ\, 10') = 8{,}9544991.$$

e

$$8{,}9544991 - 10 = -2 + 0{,}9544991;$$

il numero che corrisponde alla parte positiva del logaritmo è 9,0053, quello che corrisponde alla parte negativa è 100, ed abbiamo, dividendo il primo per l'ultimo, $p = 0^m,09$, vale a dire che il declivio è presso a poco, di 9 centimetri.

2. Si chiama *sezione* di un canale e di una corrente d'acqua in generale l'area della sezione della massa di acqua colante per un piano perpendicolare al suo asse. NM perpendicolare alla corrente AC è l'altezza di questa sezione. Indicando la sezione con S, l'altezza NM con h e la larghezza del fondo con e, avremo $S = eh$, se il canale è rettangolare; se egli è in pendio o trapezioidale, si avrà $S = \frac{1}{2}(e + e')h$, e' indicando la lunghezza superiore della sezione; ovvero ancora $S = (e + th)h$, t indicando il pendio delle pareti laterali o il rapporto della loro base alla loro altezza.

Si chiama *perimetro bagnato* della sezione, la parte del suo contorno che è a contatto con le pareti del letto, vale a dire col fondo e i lati laterali. Questo perimetro indicandolo per P, ha per espressione $P = e + 2h$ nei canali rettangolari e $P = e + 2h\sqrt{t^2 + 1}$, nei canali a trapezio.

3. La gravità essendo la sola forza che agisce sopra una massa d'acqua ab-

bandonata a se medesima in un canale, questa massa d'acqua non può muoversi che nel caso in cui la sua superficie superiore non sia punto orizzontale, mentre nel caso contrario ciascuna molecola è egualmente compressa in tutti i sensi e rimane in equilibrio. (*Vedi* Idrodinamica), ma quando la superficie superiore è inclinata, una molecola qualunque presa da questa superficie sostiene, nella direzione del lato il più elevato, una pressione superiore a quella che la regge dall'altro lato: essa deve perciò muoversi verso quest'ultimo lato con una velocità eguale alla differenza delle pressioni, e segue lo stesso di tutte le molecole situate verticalmente al di sotto di questa prima. Dobbiamo dunque ammettere per principio che *il moto delle molecole di una corrente d'acqua non deriva che dal declivio della sua superficie.*

L'equilibrio o il moto di una massa d'acqua potendo esistere d'altra parte qualunque sieno la forma e l'inclinazione del letto; basta per l'equilibrio che la superficie liquida sia orizzontale, come basta per il moto che essa sia inclinata.

4. Se la forza acceleratrice della gravità agisse senza alcuna resistenza estranea sopra le molecole liquide, l'acqua scenderebbe con un moto uniformemente accelerato, e la sua velocità crescerebbe a cominciare dal punto il più elevato del canale fino al punto il più basso; però si osserva che a poca distanza dal punto il più elevato l'accelerazione non è di già più sensibile, e che il moto si effettua in una maniera uniforme sopra tutto il resto della lunghezza, ancora nei canali il declivio dai quali è grandissimo. Questo fenomeno indica che la resistenza del letto, solo ostacolo che possa impedire l'azione della gravità, cresce come la velocità dovuta a questa azione, alla quale essa fa prontamente equilibrio, di modo che il liquido non si muove che in virtù della velocità acquistata nei primi istanti dello scolo. Da ciò risulta il principio fondamentale dell'idraulica.

Quando l'acqua si move uniformemente in un canale, la resistenza che esso vi prova è eguale alla forza acceleratrice che deriva dalla gravità.

5. Si considera comunemente la resistenza del letto di una corrente come proveniente dall'attrito dell'acqua contro le sue pareti, ma l'esperienze del Dubuat e del Venturi tendono a provare che essa è unicamente dovuta all'aderenza delle molecole fluide fra loro e con le pareti del canale. » Quando l'acqua passa sopra la superficie di un corpo, dice il signor d'Aubuisson (*Idraul. des ingénieurs*), e che non vi è repulsione fra le due sostanze, essa *bagna* questa superficie, vale a dire che un sottile strato di fluido si applica contro essa, ne penetra i pori, e vi è ritenuto, tanto per questo impegno delle molecole quanto per un effetto dell'attrazione molecolare. »

» Ed è sopra un tale intonaco o strato acquoso fisso contro le pareti del canale, che cola la massa fluida che esso conduce. La parte o sottile strato di questa massa che è immediatamente in contatto con l'intonaco, strisciando e fregando sopra esso, ingrana le sue molecole con le sue, essa vi aderisce, e la sua velocità è ritardata. Quindi dall'aderenza delle molecole fluide fra loro, questo ritardo, benchè diminuisca graduatamente, si comunica di vicino in vicino agli strati adiacenti fino ai filetti i più lontani La massa prende in conseguenza una velocità media, minore di quella che avrebbe luogo senza l'azione delle pareti e senza le viscosità del fluido. »

6. Qualunque cosa si possa dire di questa teoria, egli è certo che tutte le molecole non si muovono con la medesima facilità, e che considerando la massa fluida come composta di differenti vene o filetti, questi filetti hanno una velocità tanto maggiore quanto essi sono situati ad una maggiore distanza dalle pareti. Così intenderemo d'ora in avanti per *velocità della corrente*, la velocità media della massa delle molecole che compongono una medesima sezione.

7. In un canale regolare, tutte le sezioni della massa fluida mosse uniformemente sono eguali, poichè passa necessariamente per ciascuna di queste sezioni (*Vedi* Sgorgo dei fluidi) un medesimo volume d'acqua in un medesimo intervallo di tempo, e siccome esse hanno tutte per base la larghezza del canale, esse hanno ancora una medesima altezza, donde segue che la superficie fluida è parallela alla superficie del fondo del canale. La quantità d'acqua che passa per una sezione nell'unità di tempo, è ciò che si chiama la *dispensa del canale*. Se per esempio, la sezione è di 4 metri quadrati, e che la velocità sia di 3 decimetri per secondo, la dispensa sarà di $4 \times 0^m,3 = 1,2$, vale a dire che passerà un metro cubo e $^2/_{10}$ d'acqua in una sezione per secondo.

8. Ciascuna molecola fluida potendo considerarsi come un corpo che discende sopra un piano inclinato in virtù del suo proprio peso, la forza acceleratrice che muove l'acqua nel canale ha per espressione gp, g rappresentando la forza assoluta della gravità, e p il rapporto dell'altezza del piano inclinato alla sua base ovvero il *declivio* del canale (*Vedi* Accelerato). La resistenza che prova l'acqua nel canale, secondo il principio fondamentale (4) deve perciò essere uguale a questa quantità gp.

Ora, l'esperienza ha provato che questa resistenza è sensibilmente proporzionale al perimetro bagnato, al quadrato della velocità, più una frazione di questa velocità, e che essa è in ragione inversa della sezione, vale a dire che indicando con A' e B due fattori costanti, con v la velocità, e con S e P come qui sopra la sezione e il perimetro ammollato, la resistenza ha per espressione $A' \frac{P}{S}(v^2+Bv)$, il che dà l'equazione

$$gp = A' \frac{P}{S}(v^2+Bv),$$

ovvero semplicemente

$$p = A \frac{P}{S}(v^2+Bv) \quad \ldots\ldots (a),$$

facendo $\frac{A'}{g} = A$

L'Eytelwein ha trovato, per mezzo di una lunga serie di esperienze, che i coefficienti costanti A e B hanno per valori

$$A = 0,00036554; \quad B = 0,06638;$$

sostituendo questi numeri nell'equazione precedente, essa diviene

$$p = 0,00036554 \frac{P}{S}(v^2+0,06638v) \ldots\ldots (1);$$

e questa è l'equazione fondamentale del moto dell'acque nei canali.

9. Se indichiamo con Q la dispensa del canale il di cui valore è vS (7), avremo $v = \frac{Q}{S}$, il che ci darà questa seconda equazione

$$pS^3 = 0,00036554P(Q^2+0,00664QS) \ldots\ldots (2),$$

con l'aiuto della quale tre qualunque delle quantità p, P, S, Q essendo date, potremo determinare la quarta.

10. Risolvendo l'equazione (1) rapporto a v, si ottiene l'espressione

$$v = -0,0332 + \sqrt{\left[2736\frac{pS}{P} + 0,0011\right]} \ldots (3),$$

che fa conoscere la velocità.

Possiamo dedurne per l'espressione della dispensa

$$Q = S\left\{-0,0332 + \sqrt{\left[2736\frac{pS}{P} + 0,0011\right]}\right\} \ldots (4),$$

ovvero, con una sufficiente approssimazione

$$Q = S\left\{\sqrt{\left[2736\frac{pS}{P}\right]} - 0,0332\right\} \ldots (5).$$

11. Allorchè la velocità è grandissima, la resistenza è semplicemente proporzionale al suo quadrato, il termine Bv sparisce dall'equazione (a), e si ha semplicemente

$$v = 51\sqrt{\frac{pS}{P}}; \quad Q = 51S\sqrt{\frac{pS}{P}} \ldots (6).$$

Proponiamoci, per dare un esempio dell'applicazione di queste formole, di determinare la dispensa di un canale di cui la sezione sarebbe un trapezio avente la piccola base di due metri di larghezza, e la gran base di 6 metri di larghezza, 2 metri di altezza e $0^m,0015$ di declivio (un millimetro e mezzo per metro). Conservando le indicazioni di sopra avremo.

$$e = 2, \quad e' = 6, \quad h = 2;$$

La scarpa, o pendio t, o il rapporto fra la base di ciascun argine $= \frac{6-2}{2}$ e la loro altezza 2, sarà eguale 1; così

$$S = \frac{1}{2}(2+6)2 = 8, \quad P = 2 + 2 . 2\sqrt{1+1} = 7,656;$$

sostituendo questi valori nella formola 3, otterremo

$$v = -0,0332 + \sqrt{\left[2736\frac{0,0015 \times 8}{7,656} + 0,0011\right]} = 2,0379;$$

e quindi, $Q = 8 \times 2,0379 = 16,303$. La velocità in un tal canale sarà dunque di $2^m,038$ per secondo e la dispensa nel medesimo tempo di 16 metri cubi, più 303 decimetri cubi.

Trascurando il termine 0,0011 sotto il radicale, avremmo ottenuto

$$v = 2,0376; \quad Q = 16,301,$$

valori che differiscono pochissimo dai precedenti. Le formule delle grandi velocità (6) avrebbero dato

$$v = 51\sqrt{\left[\frac{0,0015 \times 8}{7,656}\right]} = 2,0191,$$

$$Q = 8 \times 2,0191 = 16,153.$$

12. La determinazione del declivio p che dobbiamo dare ad un canale, di cui tutte le altre disposizioni sono determinate, si effettua per mezzo dell'equazione (1): riprodurremo per esempio il calcolo del declivio del canale dell'Ourcq dato dal Signor D'Aubuisson.

» Si aveva da disporre di $3^m,0188$ d'acqua per secondo; la navigazione che si progettava esigeva una profondità di acqua di $1^m,50$; e perchè l'acqua non si alterasse, al punto da divenire impropria al servizio delle fontane di Parigi, gli bisognava una velocità di $0^m,35$ almeno; la natura del terreno permetteva di non dare agli argini che un pendio di $1\ ^1/_2$ di base sopra 1 di altezza.

» In questo caso abbiamo $Q = 3,0188$; $v = 0^m,35$; $h = 1,50$, e $t = 1,50$. Di più, dai dati del problema S è conosciuto, poichè

$$S = \frac{Q}{v} = \frac{3,0188}{0,35} = 8,625;$$

e lo sarà ancora, poichè dall'espressione $S = (e+th)h$ (n.° 2) si deduce

$$e = \frac{S - th^2}{h};$$

e sostituendo

$$e = \frac{8,625 - 1,50(1.50)^2}{1,50} = 3,50$$

quindi avremo ancora

$$P = e + 2h\sqrt{t^2+1} = 8,908.$$

Da ciò, l'equazione generale

$$p = 0,0003655\,\frac{P}{S}\,(v^2 + 0,06638v),$$

sostituendovi le quantità numeriche, dà $p = 0^m,00005502$; questo è il declivio indicato dalle formule.

» Il signor Girard, ingegnere incaricato di tracciare il canale, è arrivato ad un risultamento presso a poco simile. Ma egli con ragione ha fatto osservare, che le piante aquatiche che crescono sul fondo e sopra gli argini dei canali, aumentano considerabilmente il perimetro ammollato, e quindi la resistenza: egli ha rammentato che il Dubuat avendo misurato la velocità dell'acqua nel canale dell'Jard, avanti e dopo il taglio delle canne delle quali era guarnito, aveva trovato un risultamento ben minore avanti che dopo. In conseguenza, egli ha quasi raddoppiato il declivio dato dal calcolo, e lo ha portato a 0,0001056: la lunghezza del canale essendo di 9600 metri, ciò equivale a $10^m,14$ di declivio assoluto. »

13. Gli esempi che abbiamo dati provano sufficientemente il metodo che dobbiamo seguire per determinare l'incognita del problema nello stabilimento di un canale quando non ve ne è che una, ma il più ordinariamente le sole quantità date sono p e Q, o il declivio e la dispensa, e si tratta di scegliere la forma della sezione che può adempire il più convenientemente l'oggetto che abbiamo in veduta. Per i canali scavati nelle terre, è essenziale di tenere gli argini inclinati poichè senza di ciò essi non potrebbero sostenersi e si franerebbero, così la figura del trapezio è quella che è generalmente adottata, e si dà agli argini una inclinazione di 34° al più all'orizzonte. Supponiamo dunque che si abbia una dispensa di 3 metri cubi di acqua e che si tratti di costruire un canale il

di cui declivio sia $0^m,0011$ e la scarpa 1,50, le quantità da determinare sono la larghezza e l'altezza della sezione. Ora, di tutti i trapezii che possiamo scegliere per la sezione, quello di cui la superficie è più grande e il perimetro ammollato il più piccolo è il più vantaggioso, poichè la resistenza che l'acqua prova a muoversi è in ragione diretta del perimetro è in ragione inversa della sezione (n.° 8); questo trapezio il più vantaggioso ha la sua larghezza media, o la semi-somma delle sue basi paralelle, doppia della sua altezza, di modo che possiamo stabilire la condizione $\frac{1}{2}(e+e')=2h$, ovvero $e+th=2h$, poichè $t=\frac{e'-e}{2}:h$ (n.° 2); ne risulta da una parte, $S=2h^2$, e dall'altra,

$$P=2h-th+2h\sqrt{t^2+1},$$

o semplicemente $P=nh$, facendo $2-t+2\sqrt{t^2+1}=n$. Dietro questi dati abbiamo qui

$$n=2-1,50+2\sqrt{(1,50)^2+1}=1.8028.$$

Sostituendo i valori $S=2h^2$, $P=1,8028h$, $p=0,0011$, e $Q=3$ nella formula (2), essa diverrà

$$0,0011\times 8h^6=0,00036554\times 1,8028h\times(3^2+0,0664\times 3\times 2h^2),$$

ovvero

$$0,0088h^5=0,0059309+0,0002625h^2.$$

Dividendo tutto per 0,0088 e trasportando, avremo definitivamente l'equazione

$$h^5-0,0298h^2-0,674=0,$$

donde risolvendola, otterremo, $h=0^m,9301$.

Conoscendo così l'altezza del trapezio, ricaveremo il valore della sua più piccola base dall'equazione $e+th=2h$, la quale dà

$$e=(2-t)h=(2-1,50)\times 0,9301=0^m,46505.$$

La sezione sarà perciò un trapezio di cui la più piccola base dovrà avere $0^m,46505$, la più grande $3^m,25535$ e l'altezza $0^m,9301$; ma queste dimensioni sono quelle della massa fluida, e la profondità del canale dev'essere un poco più grande; gli si darà almeno $1^m,20$, e allora la larghezza del fondo rimanendo $0^m,46505$, quella a livello del terrèno sarà $4^m,365$.

14. La forma del trapezio è, come l'abbiamo detto, quella che più conviene per i canali scavati nelle terre, perchè essa riunisce alla facilità della costruzione la solidità e l'economia, ma essa non è capace di dare nel medesimo tempo il *maximum* della sezione e della dispensa. Di tutte le figure isoperimetre, il circolo è quello che ha la maggior superficie, e questa superficie diminuisce a misura che il numero dei lati del poligono regolare diminuisce. Segue lo stesso del semicircolo e dei semi-poligoni regolari del medesimo perimetro, la superficie del circolo è la maggiore, e quella del semi-quadrato è la minore. Se fosse possibile di costruire un canale di cui la sezione fosse un semi-circolo, si avrebbe nel medesimo tempo il maximum della sezione e della dispensa; ma le spese che sarebbero necessarie per una simile costruzione gli fanno preferire il semi-quadrato per tutti i canali scavati nel masso o rivestiti di fabbriche, tali come gli *acquedocci*. In questi, abbiamo dunque il maximum della sezione e della dispensa quando il rapporto della base all'altezza della sezione è quella dei numeri 2 : 1.

Da queste considerazioni vediamo che il trapezio capace di dare la maggiore dispensa è quello che, sopra una scarpa t determinata dalla natura del terreno, contiene la maggior superficie nel più piccolo perimetro. Allorquando la scarpa o pendio è s $^1/_3$, che è uno dei casi più ordinari, bisogna dare al trapezio una larghezza media doppia della sua altezza, perchè con un tal rapporto nelle sue dimensioni vi è medesima superficie e medesimo perimetro ammollato che un rettangolo della medesima altezza di cui la base sarebbe eguale alla sua larghezza media, e che, per conseguenza, darebbe il maximum della dispensa e della sezione. Infatti, se indichiamo con h l'altezza del rettangolo, la sua base sarà $2h$, la sua superficie $2h^2$, e il suo perimetro ammollato $4h$; il trapezio avendo per altezza h e per larghezza media $2h$, ha egualmente per superficie $2h^2$; quanto al suo perimetro ammollato, se nell'espressione generale del n.° 2 facciamo $t = 1 + \frac{s}{3}$, e che si dia ad e il valore $(2-t)h$ che risulta dalla relazione $e + th = 2h$, verrà

$$P = \left(2 - 1 + \frac{1}{3}\right)h + 2h\sqrt{\left[\left(1 + \frac{s}{3}\right)^2 + 1\right]} = h\left[\frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{25}{9}}\right] = 4h$$

vale a dire il medesimo valore che per il perimetro ammollato del rettangolo. In tutti i casi in cui il pendio fosse maggiore di s $^1/_3$, si dovrebbe dunque, per maggior esattezza, determinare il rapporto dell'altezza alla larghezza media del trapezio, in maniera da ottenere il maximum della sezione e della dispensa; però l'uso è di conservare il rapporto di $s : 2$, e questo è ciò che abbiamo fatto nell'esempio precedente.

15. Nei canali rettangolari, la larghezza dovendo essere il doppio dell'altezza, possiamo facilmente calcolarla quando la massa dell'acqua che essi debbono condurre è data, poichè chiamando x questa larghezza, l'area della sezione ha per espressione $\frac{1}{2}x^2$, ed abbiamo, per conseguenza, v essendo la velocità e Q la dispensa, $\frac{1}{2}vx^2 = Q$, donde

$$x = \sqrt{\frac{2Q}{v}}.$$

Non ci arresteremo a dare esempi di questi calcoli, i quali non presentano alcune difficoltà.

16. Abbiamo fatto osservare (n.° 6) che la velocità dei diversi fili di un corso d'acqua era tanto maggiore, quanto questi fili erano più lontani dalle pareti del canale, e che valutando la dispensa per il prodotto della sezione e della velocità, bisognava impiegare necessariamente la velocità media, e non la velocità particolare del tale o tale filo. La determinazione di questa velocità media è perciò importantissima, e siccome non si può misurare con facilità che la velocità dei fili superiori, sarebbe necessario di conoscere la legge del decrescimento che provano le velocità partendo dalla superficie fluida fino al fondo del canale, per poter valutare con certezza la velocità media. Il Dubuat ha concluso, da una serie di esperienze fatte con molta cura, che la *velocità media è una media proporzionale aritmetica fra quella della superficie e quella del fondo*, e che il rapporto di queste due ultime, interamente indipendente dall'altezza della sezione, è tanto maggiore quanto la velocità della superficie è minore. Ecco i risultamenti numerici delle sue osservazioni, disgraziatamente troppo poco numerose per essere concludenti.

Digitized by Google

Sia V la velocità della superficie, v quella del fondo, e u la velocità media, si avrà

$$v = [\sqrt{V} - 0,165]^2,$$
$$u = (\sqrt{v} - 0,082)^2 + 0,0067.$$

Il signor di Prony ha ricavato dall'esperienze del Dubuat la formula

$$u = V \frac{V + 2,372}{V + 3,153},$$

che gli parve rappresentare i fatti con maggiore esattezza. Ma egli pensa che nella pratica si può ammettere, con una sufficiente approssimazione

$$u = 0,8V.$$

Dobbiamo aggiungere che la velocità V è quella del filo fluido più lontano dalle pareti, o la più gran velocità della corrente. Questo filo nei canali regolari è quello del mezzo della superficie, ed è ciò che si chiama *il filo dell'acqua*.

§ II. Del moto dell'acqua nei fiumi.

17. L'irregolarità dei letti dei fiumi non permette di paragonarla ai canali, ove la velocità diviene prontamente uniforme; in questi il volume dell'acqua condotta è sempre il medesimo, mentre nei fiumi questo volume aumenta o diminuisce secondo le variazioni che il letto prova nel suo declivio e nelle sue dimensioni, e ancora per l'effetto degli affluenti che esso riceve. Allorchè il declivio di un fiume dopo essere rimasto costante per una data lunghezza, viene ad aumentare o a diminuire, la velocità aumenta o diminuisce; e siccome la larghezza del letto non cangia bruscamente, ne risulta che nel primo caso l'altezza della sezione diventa minore, mentrechè essa diventa maggiore nel secondo. Questi cangiamenti di altezza seguono per gradi, la superficie fluida prende una forma convessa quando il suo moto si accelera, ed una forma concava quando esso si rallenta, di modo che il filo dell'acqua, considerato dalla sorgente fino all'imboccatura, presenta un seguito di linee rette riunite da piccole linee curve, ora convesse, ora concave.

Se concepiamo un piano perpendicolare alla superficie fluida e che passi pel filo dell'acqua, l'intersezione di questo piano col fondo del letto offrirà una linea simile al filo dell'acqua, vale a dire composta di parti rette e curve, di cui l'inegnaglianze corrisponderanno alle ineguaglianze del filo dell'acqua, ma saranno ancora maggiori. La *fig.* 2. della *Tav.* LXXXV indica la differenza delle due sezioni.

Si chiama *contro-declivio* qualunque inclinazione di poca estensione opposta all'inclinazione generale del letto, come sarebbe, per esempio, il declivio offerto contro la corrente dell'acqua da un banco di pietra disposto trasversalmente sopra il letto di un fiume. L'acqua, superandolo in forza della sua velocità acquistata, presenta una superficie concava nella salita ed una superficie convessa nella discesa, e la sua velocità diminuisce fino al punto il più elevato della curva, di dove essa accelerasi scendendo. La resistenza dell'ostacolo, unita alla gravità che agisce sopra le molecole fluide, non permettendo a queste molecole di elevarsi al di sopra del piano generale della superficie del fiume, fintanto che l'ostacolo è elevato esso medesimo al di sopra del piano generale del letto, il filo dell'acqua non può perciò mai avere un'irregolarità tanto grande quanto la sezione longitudinale corrispondente del letto, come lo abbiamo fatto osser-

vare. In certi casi, gli ostacoli che s'incontrano nel letto di un fiume producono uno storno di una parte del fluido contro la corrente, questo è ciò che chiamasi on *rivolgimento* (*vedi* questa parola).

18. Gli effetti risultanti dagli allargamenti e dai ristringimenti dei letti sono simili a quelli delle variazioni di declivio. Quando il letto si allarga, l'altezza della sezione diminuisce, ma in un rapporto un poco minore dell'aumentazione di larghezza, perchè la velocità diminuisce un poco in seguito dell'accrescimento del perimetro ammollato. Quando il letto si ristringe, l'altezza dell'acqua aumenta con la velocità. Non dobbiamo perdere di vista, per renderci conto di tutte queste variazioni, il principio dello *sgorgo dei fluidi* (*vedi* questa parola), che qui rammenteremo.

In qualunque massa fluida la quale si muove senza soluzione di continuità, passa un medesimo volume fluido in un medesimo tempo, per ciascuna delle sezioni fatte perpendicolarmente alla direzione del moto.

19. Le sezioni longitudinali della superficie fluida dei fiumi non sono le sole che presentino delle parti curve. Le sezioni trasversali offrono ancora una forma che merita di essere osservata, di cui la figura 3 della Tavola LXXXV, può dare un'idea. Questa è una curva rovescia di cui il punto più elevato è nel filo dell'acqua, e di cui l'elevazione rispettiva degli altri punti, i quali vanno decrescendo egualmente o inegualmente verso ciascuna sponda, è tanto maggiore quanto i fili corrispondenti hanno una maggiore velocità.

20. La determinazione della velocità media di un fiume presenta grandi difficoltà, che siamo lontani dall'avere completamente superate. Allorchè il fiume presenta un declivio assai uniforme ed un letto assai regolare, sopra una lunghezza assai considerabile, mille metri almeno, perchè si possa, in questa estensione, paragonarla ad un canale, si deve prendere il profilo di più sezioni, misurare il declivio con molta cura e dedurne i valori medii di S e di P, i quali faranno conoscere la velocità cercata sostituendoli nella formula (3) del n.° 10. Questo processo per quanto sia approssimativo, quando può essere impiegato, è superiore alle misure dirette.

Allorquando le località non offrono la riunione delle circostanze che abbiamo indicate, si misura la velocità della corrente per mezzo di certi istrumenti chiamati *idrometri* (*vedi* questa parola), dei quali ci limiteremo qui a descrivere il più semplice. Che s'immagini un piccolo pezzo di legno, o qualche altro corpo di una gravità specifica quasi eguale a quella dell'acqua, situato sopra il filo dell'acqua o sopra il più forte della corrente e abbandonato a se medesimo. Trasportato dal moto dell'acqua, questo *galleggiante*, che così chiamasi, non tarda ad acquistare una velocità eguale a quella del fluido che lo circonda, e se allora si osserva lo spazio che esso percorre in un dato tempo, potremo determinare questa velocità con una sufficiente esattezza.

I galleggianti non possono far conoscere che la velocità del filo dell'acqua, poichè essi non si manterrebbero nella direzione necessaria se si mettessero sopra altri fili; ma esistono degli idrometri con i quali si misura la velocità di un punto qualunque della superficie fluida, ed altri che sono destinati a misurare le velocità al di sotto della superficie. Vedremo alla parola Idrometria la serie delle operazioni che esige la determinazione della velocità media di un fiume per mezzo di questi instrumenti.

21. La conoscenza della velocità media di un fiume è principalmente necessaria per determinare il volume d'acqua che esso conduce o per *stazare* il corso dell'acqua. Questo volume è eguale al prodotto della velocità media di una sezione per la sua area.

La stazatura dei piccoli corsi d'acqua si effettua in una maniera molto più

semplice con una *cateratta* che con le misure idrometriche, alle quali non abbiamo fin qui avuto ricorso che per alcuni fiumi. Questo processo consiste a chiudere la corrente con un tramezzo di piante, sopra l'altezza del quale si pratica un *diversivo* o apertura rettangolare la di cui soglia deve avere, al di sopra del fondo del letto, un'altezza tale che la grossezza dell'onda fluida che sgorga sia almeno di 10 centimetri. Le formule dello sgorgo dell'acqua per mezzo dei diversivi fanno allora conoscere la dispensa, con l'aiuto delle dimensioni del diversivo e dell'altezza misurata dalla superficie della corrente al di sopra della soglia. *Vedi* Sgorgo dei fluidi.

22. Gli affluenti o corsi d'acqua i quali si perdono in un fiume principale fanno variare il volume dell'acqua che esso conduce. Questo volume aumenta necessariamente al di sotto della congiunzione, dimodochè la dispensa non è la medesima per tutte le sezioni del fiume se non che quando non si trova alcun affluente sopra la lunghezza ove esse sono prese. Questa dispensa varia inoltre per tutte le cause che fanno variare le sorgenti alimentatrici, e dobbiamo di più distinguere i diversi casi delle alte, delle medie e delle basse acque, le quali hanno luogo nelle diverse stazioni dell'anno.

Si dice che la velocità di un fiume è debole; quando essa è al di sotto di $0^m,50$ per secondo, e che essa è grandissima, quando supera due metri. La velocità ordinaria si stima da $0^m,60$ a $0^m,90$. Quella della Senna, nelle vicinanze di Parigi, è mediamente de $0^m,60$ a $0^m,55$. La velocità del Rodano e della Durenza elevasi fino a 4 metri nelle forti crescenze. La dispensa della Senna, sopra una larghezza media di 130 metri ad una profondità di $1^m,50$, è di circa 130 metri cubi d'acqua per secondo.

§ III. Del moto dell'acqua nei condotti.

23. Si chiama *condotto* un seguito di tubi uniti esattamente gli uni agli altri il quale serve a condurre l'acqua da un luogo a un altro. Per esaminare il moto dell'acqua nei condotti, considereremo prima di tutto il caso di un solo tubo rettilineo e di un medesimo diametro in tutte le sue parti.

Sia perciò BD (*Tav.* LXXXV, *fig.* 4), un tubo inclinato che riceve per la apertura superiore EB l'acqua da un serbatoio M, e la versa per la sua apertura inferiore CD. La velocità dello sgorgo in CD la dovremo a due forze distinte; l'una proveniente dalla pressione che la massa fluida del serbatoio esercita in EB, e l'altra dalla porzione della forza assoluta della gravità che si sviluppa sul piano inclinato BC; vale a dire che il fluido entra in EB animato da una velocità dovuta all'altezza AE o CF, e che questa velocità si aumenta di tutta quella che potrebbe acquistare dalla sola altezza FD, se le molecole fluide cominciavano a scendere in EB senza alcuna velocità antecedentemente acquistata. La velocità finale dello sgorgo ha dunque luogo in virtù della somma delle due altezze GF+FD, o semplicemente dell'altezza GD della superficie del serbatoio al di sopra dell'orifizio di sgorgo. Indicheremo con H quest'ultima altezza, che si chiama la *carica del condotto*.

Se le pareti del tubo non presentassero alcuna resistenza al moto dell'acqua, questo moto dovrebbe continuamente accelerarsi, e la velocità v' di uscita sarebbe (*Vedi* Sgorgo)

$$v' = \sqrt{2gH}.$$

Ma non segue niente affatto così: nei condotti, come nei canali, il moto diventa sensibilmente uniforme ad una piccolissima distanza dalla sua origine, di-

modochè la velocità di uscita non è mai quella che corrisponde a tutta l'altezza H. Chiamiamo v la velocità reale di uscita ed h l'altezza alla quale essa sarebbe dovuta, avremo

$$h = \frac{v^2}{2g},$$

e per conseguenza

$$H - \frac{v^2}{2g}$$

sarà la porzione di altezza assorbita dalla resistenza e rappresenterà questa resistenza.

Ora, la resistenza proveniente dall'azione delle pareti è proporzionale a tutta la superficie interna del tubo: poichè, nel caso che esaminiamo, lo sgorgo si fa a tubo pieno (se non fosse così, il condotto sarebbe un semplice canale); di più essa è proporzionale al quadrato della velocità, più una frazione della semplice velocità, e, finalmente essa è in ragione inversa dell'area della sezione. Se indichiamo perciò la lunghezza del condotto con L, con S la sua sezione, con P il perimetro ammollato e con A e B due coefficienti costanti da determinarsi dall'esperienza, la superficie interna del tubo sarà LP, ed avremo per l'espressione della resistenza

$$A \frac{LP}{S} (v^2 + Bv),$$

il che ci darà l'equazione fondamentale

$$H - \frac{v^2}{g} = A \frac{LP}{S} (v^2 + Bv) \quad \ldots . (6),$$

Il signor di Prony ha ottenuto, per i coefficienti A e B, i valori

$$A = 0,0003485; \qquad B = 0,0498;$$

ma il signor d'Aubuisson, combinando dell'esperienze più recenti, trova

$$A = 0,0003425; \qquad B = 0,055.$$

Per quest'ultimi valori, l'equazione fondamentale diventa

$$H - \frac{v^2}{2g} = 0,0003425 \frac{LP}{S} (v^2 + 0,055v) \quad \ldots . (7).$$

Per rendere quest'equazione più facilmente applicabile ai casi particolari, osserveremo che se indichiamo con D il diametro dei tubi, avremo $S = \frac{1}{4} \pi D^2$, $P = \pi D$; π essendo il rapporto della circonferenza al diametro o il numero 3,1415296. Sostituendo questi valori, come pure quello di g, verrà

$$H - 0,051v^2 = 0,00137 \frac{L}{D} (v^2 + 0,0055v), \quad \ldots . (8);$$

equazione che farà conoscere una qualunque delle quattro quantità H, L, D, v, allorchè le tre altre saranno date.

24. La dispensa essendo il più ordinariamente una delle quantità date o cercate nelle questioni relative al moto dell'acqua nei condotti, è utile di farla en-

trare nell'equazione (8), cosa che non presenta veruna difficoltà poichè chiamandola Q, si ha $Q = vS$, o $Q = \frac{\pi}{4} \pi v D^2$, il che dà $v = 1,273 \frac{Q}{D^2}$.

Sostituendo questo valore di v nell'equazione (7), viene

$$H - 0,08264 \frac{Q^2}{D^4} = 0,00221 \frac{L}{D^5} (Q^2 + 0,0432 Q D^2) \ldots (9),$$

equazione che contiene la soluzione di tutti i problemi pratici. Se ne ricava per il valore di Q

$$Q = -\frac{0,0216}{L+37,2D} + \sqrt{\left\{ \frac{450,2HD^5}{L+37,2D} + \left(\frac{0,0216LD^2}{L+37,2D} \right)^2 \right\}} \ldots (10).$$

Quanto a quello di D, che spesso è la quantità da determinare, bisogna risolvere l'equazione (8) rapporto a D, riportandola alla forma (10)

$$D^5 - 0,00009574 \frac{LQ}{H} D^3 - 0,0826 \frac{Q^2}{H} D - 0,00222 \frac{LQ^2}{H} = 0.$$

Possiamo, ci sembra, abbreviare i calcoli della determinazione di Q risolvendo prima l'equazione (8) rapporto a v, il che dà

$$v = -\frac{0,0275L}{L+37,2D} - \sqrt{\left\{ \frac{729,92HD}{L+37,2D} + \left(\frac{0,0275L}{L+37,2D} \right)^2 \right\}} \ldots (11);$$

mentre il valore di v una volta conosciuto, si ha quindi

$$Q = 0,7854 v D^2.$$

25. Tutte queste espressioni diventano molto più semplici quando la velocità supera $0^m,60$, perchè la resistenza è allora sensibilmente proporzionale al quadrato della velocità, il che permette di trascurare il termine Bv dell'equazione fondamentale (*b*); abbiamo allora dall'esperienze del Couplet

$$H - 0,051 v^2 = 0,001435 \frac{Lv^2}{D} \ldots (12),$$

e in funzione di Q

$$H - 0,08274 \frac{Q^2}{D^4} = 0,002326 \frac{LQ^2}{D^5} \ldots (13);$$

il valore di Q è semplicemente

$$Q = 20,73 \sqrt{\left[\frac{HD^5}{L+35,5D} \right]} \ldots (14).$$

26. Il termine 37,2D essendo piccolissimo paragonato ad L, nei grandi condotti possiamo trascurarlo, come pure il secondo termine sotto il radicale, ed abbiamo, con una sufficiente approssimazione, per le piccole velocità

$$Q = D^2 \left[-0,0216 + 21,22 \sqrt{\frac{HD}{L}} \right] \ldots (15),$$

e per le grandi

$$Q = 20,3 \sqrt{\frac{HD^5}{L}} \quad \ldots \cdot (16).$$

27. Daremo alcuni esempi d'applicazione.

ESEMPIO I.

Si domanda quàl volume d'acqua somministrerà un condotto di 1450 metri di lunghezza e $0^m,25$ di diametro, sotto una carica di $5^m,32$.

Abbiamo in questo caso $D = 0^m,25$, $L = 1450$ e $H = 5^m,32$. Così

$$L + 37,2D = 1459,3.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione della velocità (11), viene

$$v = -\frac{0,0275 \times 1450}{1459,3} - \sqrt{\left\{\frac{729,92 \times 5,32 \times 0,25}{1459,3} + \left(\frac{0,0275 \times 1450}{1459,3}\right)^2\right\}};$$

donde, dopo tutti i calcoli fatti, $v = 0,788796$. Si ha dunque

$$Q = 0,788796 \times 0,7854 \times (0,25)^2 = 0,03872.$$

Così la dispensa domandata è di $0^m,03872$. Impiegando la formula approssimativa (15), si sarebbe trovato $0^m,13882$; la formula (16) darebbe 0,03842.

ESEMPIO II.

Si domanda il diametro di un condotto di 800 metri di lunghezza il quale sotto una carica di 2 metri, deve condurre $0^m,05$.

Abbiamo $H = 2$, $L = 800$, $Q = 0,05$; mettendo queste quantità nell'equazione (10), essa diviene, dopo le riduzioni

$$D^5 - 0,00192D^2 - 0,000098D - 0,00222 = 0.$$

Per ottenere una prima approssimazione, trascuriamo il secondo e il terzo termine, avremo

$$D = \sqrt[5]{0,00222} = 0,295,$$

valore troppo piccolo, perchè sostituendolo invece di D nell'equazione, il primo termine si riduce a 0,000182. Facendo $D = 0,295 + z$ ed applicando il metodo del Newton (*Vedi* Approssimazione), otterremo $z = 0,00496$, donde $D = 0,2996$. Il diametro cercato è perciò $0^m,3$, limitandone l'approssimazione ai millimetri.

28. Allorquando le velocità sono al di sopra di $0^m,60$, possiamo ottenere assai facilmente il valore di D ricavando questa quantità dall'espressione (16); abbiamo allora

$$D = 0,298 \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{H}}.$$

Impiegando quest'ultima formula, avremmo trovato immediatamente.

$$D = 0,298 \sqrt[5]{\left[\frac{800 \times (0,05)^2}{2}\right]} = 0,298,$$

valore che sensibilmente non differisce dal precedente.

29. In tutto ciò che precede, abbiamo supposto che lo sgorgo si effettuasse da un' estremità aperta del condotto; ma ordinariamente quest' estremità sono terminate da orifizii più stretti del tubo, o da chiavi, e allora la velocità del fluido alla sua uscita non è più la medesima che nel condotto. Se indichiamo per V la velocità di uscita per un orifizio o per un tubo qualunque, la porzione della carica assorbita dalla resistenza diverrà.

$$H-0,051V^2,$$

nel mentre che la resistenza delle pareti sarà sempre funzione della velocità v che ha luogo nell' interno, e non cesserà di avere per espressione

$$0,00137\,\frac{L}{D}\,(v^2+0,055v),$$

dimodochè l' equazione fondamentale diventerà

$$H-0,051V^2=0,00137\,\frac{L}{D}(v^2+0,055v).$$

Ora, per il principio rammentato nel (n.° 18), le velocità sono in ragione inversa delle sezioni: così, indicando con d il diametro dell' orifizio e per m il coefficiente di contrazione che vi si applica (*Vedi* Sgorgo), abbiamo.

$$V : v = \frac{1}{4}\pi D^2 : \frac{1}{4}\pi m d^2,$$

donde

$$V = v\,\frac{D^2}{md^2},$$

e sostituendo invece della velocità v la dispensa Q,

$$V = 1,273\,\frac{Q}{md^2}.$$

Sostituendo questo valore nella precedente equazione, otterremo per l' equazione generale del moto

$$H-0,08264\,\frac{Q^2}{m^2d^4}=0,002221\,\frac{L}{D^5}(Q^2+0,0432QD^2)\ldots(17).$$

Per le velocità al di sopra di $0^m,60$, quest' equazione si riduce a

$$H=0,0826\,\frac{Q^2}{m^2d^4}=0,00233\,\frac{LQ^2}{D^5}\ldots\ldots(18).$$

Se ne ricava successivamente

$$\left.\begin{aligned}
Q&=20,73\sqrt{\left[\frac{HD^5}{L+35,47\,\frac{D^5}{m^2d^4}}\right]}\ldots\ldots\\
D&=0,298\sqrt[5]{\left[\frac{LQ^2}{H-0,0816\,\frac{Q^2}{m^2d^4}}\right]}\ldots\ldots\\
D&=0,536\sqrt[4]{\left[\frac{Q^2D^5}{m^2(HD^5-0,00233\,LQ^2}\right]}\ldots
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(19).$$

30. L'applicazione di queste formule ai casi particolari non presentando alcuna difficoltà, ci contenteremo di presentarne un solo esempio.

Si domanda la dispensa che avrà luogo da un tubo cilindrico adattato all'estremità di un condotto lungo 1200 metri e di un diametro di $0^m,2$, sotto una carica di 6^m, il diametro del tubo essendo di $0^m,01$.

Abbiamo $H=6$, $D=0,2$, $L=1200$, $d=0,01$, e il coefficiente di contrazione dei tubi cilindrici è 0,82. Questi valori danno

$$35,47\,\frac{D^5}{m^2d^4}=1688047,$$

e, quindi

$$Q=20,73\sqrt{\left[\frac{5\times(0,2)^5}{1200+1688047}\right]}=0^m,00221.$$

La dispensa del tubo aperto sarebbe stata $0^m,082675$.

Il Signor d'Aubuisson ha osservato che quando il diametro del tubo supera dalla metà il diametro del condotto, la dispensa non differisce che di pochissimo da quella che avrebbe luogo lasciando il condotto interamente aperto. Nel caso del quale ci occupiamo, troveremmo $D=0^m,078416$ facendo $d=0^m,12$; ma pare che la differenza sia ancora minore in pratica che in teorica, poichè adattando diversi tubi ad un medesimo condotto di $0^m,05$ di diametro sopra 424^m di lunghezza, il signor d'Aubuisson ha ottenuto i seguenti risultamenti:

Dispensa con un tubo di $0^m,01$	. . . .	0,000822
Id. *id.* . . . 0 ,02	. . . .	0,001581
Id. *id.* . . . 0 ,03	. . . .	0,001720
Id. senza tubo.	. . . . .	0,001722.

31. Ci resterebbe da esaminare il caso dei condotti che presentano dei gomiti, e dei ristringimenti, vale a dire delle parti di minor sezione nella loro estensione; ma le particolarità che esigerebbe quest'esame supera i limiti della nostra opera, e dobbiamo rimandare ai trattati d'idraulica. Faremo solamente osservare in una maniera generale che qualunque causa che porti tanto un cangiamento di direzione nel moto dell'acqua, quanto un accelerazione di velocità per costringerla a passare da una sezione più stretta, assorbisce sempre una data parte della carica totale. I gomiti rotondi o curvilinei non hanno che pochissima influenza sopra la velocità finale, nel mentre che i gomiti spezzati, come lo sarebbe un gomito rettangolare la diminuiscono considerabilmente. È dunque importantissimo di evitare gli angoli nei condotti. Quanto ai ristringimenti ed ai rigonfiamenti, raramente ne dobbiamo tener conto, perchè un condotto ben costruito non deve presentarne alcuno.

Quando l'acqua sgorga da un serbatoio in un condotto principale o da questo in una riunione di condotti, vi è sempre contrazione della vena fluida, e se non ne abbiamo parlato fin qui, ciò dipende perchè il suo effetto è compreso nei coefficienti dell'equazione fondamentale. Allorchè si tratterà di un condotto secondario, l'effetto della contrazione si troverà similmente compreso nella determinazione della sua carica, dimodochè è inutile di considerarlo in particolare.

Tutte le formule precedenti riportandosi ad un condotto perfettamente unito sopra tutta la sua superficie interna, non dobbiamo riguardare i risultamenti numerici che esse danno che come approssimazioni, e gl'ingegneri sono in uso di diminuire di un terzo il coefficiente della dispensa. Così, quando vorremo sta-

bilire un condotto, dovremo determinare i diametri nell'ipotesi che la dispensa sia di un terzo più grande della dispensa reale. Se abbiamo, per esempio, una dispensa reale di $0^m,100$, metteremo nelle formule $0^m,150$. Egualmente, se calcolando una dispensa le troviamo teoricamente di $0^m,210$, non dovremo contare che sopra una dispensa reale di $^2/_3\,(0,210)=0,140$.

32. Qualunque acqua corrente sia in un canale, in un fiume o in un condotto, è animata da una forza motrice che possiamo impiegare purchè le macchine facciano ciò che debbano. Non abbiamo in quest' articolo esaminato che le circostanze del moto dell'acqua; non essendo questo il luogo da considerare questo fluido come motore.

Le opere da consultare sopra le acque correnti sono. *Hydrodynamique* di Bossut; *Architecture hydraulique* di Belidor, con le note del Navier. *Nouvelle Architecture hydraulique* del Prony; *Principes d'hydraulique* del Dubuat; *Essai sur le mouvement des eaux courantes* del Belanger; *Hydrotechnie* del Funk; *Idraulica* del Venturoli; *Hydraulique des ingénieurs* del d'Aubuisson.

CORRISPONDENTI (*Astron.*). Si dicono *altezze corrispondenti* le due altezze eguali di un medesimo astro al di sopra dell'orizzonte, osservate l'una all'oriente e l'altra all'occidente per conchiuderne l'istante preciso del passaggio di quest'astro al meridiano. *Vedi* Altezza corrispondenti, e Passaggio al meridiano.

CORSIERE (*Idraul.*). Canale di legno o di pietra che contiene e dirige una corrente d'acqua. Si adopra particolarmente per alimentare le ruote idrauliche. *Vedi* Acqua.

CORTINA (*Fortificazione*). Massa di terra rivestita esteriormente di un muro, e che ha per oggetto di congiungere due bastioni in modo da formare un ricinto fortificato e continuo. *Vedi* Fortificazione.

CORVO (*Astron.*). Costellazione meridionale composta di ove stelle nel catalogo britannico: trovasi rammentata dagli scrittori coi diversi nomi di *Corvus*, *Phoebejus ales*, *Avis pomptina*, *Ales ficarius*, *Garrulus proditor*: il suo nome arabo è *Gorab* o *Al-gourab*. Vogliono alcuni che questa costellazione rappresenti il corvo che Apollo condannò ad una eterna sete. Altri credono che sia quel corvo che rivelò ad Apollo l'infedeltà di Coronide. La vittoria che Valerio Corvino dovette ad un corvo ha fatto dare a questa costellazione l'epiteto di *pomptina*, perchè tal vittoria fu riportata presso le paludi pontine. Questa costellazione annunziava il solstizio col suo tramonto eliaco. La stella principale del Corvo è di terza grandezza.

COSECANTE (*Geom.*). Si chiama *cosecante* di un arco o di un angolo, la secante del *complemento* di quest'arco o di quest'angolo. Così la *cosecante* di un angolo di 30° è la medesima cosa che la secante dell'angolo di 60°, complemento del primo: In generale $\frac{1}{2}\pi$ indicando il quarto della circonferenza del circolo il di cui raggio è 1, e φ un arco minore di $\frac{1}{2}\pi$, si ha

$$\text{cosecante}\ \varphi = \text{secante}\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right).$$

Vedi Complemento e Secante.

COSENO (*Geom.*). Si chiama così il seno del complemento di un arco o di un angolo. *Vedi* Complemento e Seno.

COSICA. Regola cosica, nome col quale i primi autori italiani indicarono l'algebra, fino dalla sua introduzione in Europa. È molto probabile che questa de-

nominazione venisse dalla parola *cosa*, che essi davano all'*incognita* del problema.

COSMICO (*Astron.*). Il *levare* e il *tramonto cosmico* di una stella ha luogo quando la stella si leva o tramonta nel momento in cui si leva il sole. *Vedi* Levare e Tramonto.

COSMOLABIO (*Astron.*). Antico strumento di matematiche, assai somigliante all'astrolabio. Serviva a prendere le altezze e a rappresentare i circoli della sfera; ma da molto tempo non è più in uso.

COSPIRANTI (*Mec.*). Le potenze *cospiranti* sono quelle che agiscono in direzioni le quali non sono opposte e che, per conseguenza, concorrono a produrre un effetto. *Vedi* Forza e Moto.

COSSALI (Pietro), uno de' più illustri matematici italiani del passato secolo, nacque il 29 Giugno 1748 in Verona da nobile famiglia. Fece con molto successo i suoi primi studj presso i gesuiti, e tale fu il suo attaccamento pei maestri e la sua inclinazione al ritiro, che volle vestire l'abito di Sant'Ignazio; se non che dovette non molto dopo deporlo, non potendo le disposizioni del suo corpo reggere a sì rigida disciplina. Tornato in seno della sua famiglia, proseguì collo stesso ardore i suoi studj, e postosi sotto la direzione di un dotto cherico regolare teatino di Napoli, si diè tutto alla filosofia e alle matematiche, prendendo a guida le opere del Volfio. Le scienze profane non lo distrassero però da' suoi pensieri religiosi, e non andò molto che prese in Milano l'abito di cherico regolare teatino, la cui regola meno rigorosa meglio conveniva al suo carattere. Tornato in breve, nel 1778, alla patria si occupò interamente a dar lezioni di filosofia, di geometria e di fisica, delle quali scienze seppe inspirare il gusto ne'suoi concittadini che in folla accorsero ad ascoltarlo.

La celebre scoperta degli aerostati, avvenuta in quel tempo, richiamò l'attenzione del Cossali, che il primo porse a Verona lo spettacolo dell'ascensione di una di queste macchine, e ne diede una compiuta spiegazione in un opuscolo intitolato: *Sull'equilibrio interno ed esterno delle macchine aereostatiche*, Verona, 1784, uno dei migliori scritti che sieno comparsi su tale argomento. Da quell'epoca, pubblicò quasi in ciascun anno delle importanti memorie sopra problemi di geometria e di fisica, che illustre rèsero il suo nome fra i dotti italiani.

Nel 1787 il duca di Parma gli conferì la cattedra di fisica generale nell'università di quella città, e nel 1791 lo nominò professore di astronomia, meteorologia e idraulica. Nel tempo che occupò quest'ultima cattedra, dall'1791 al 1804, pubblicò ogni anno delle *Effemeridi astronomiche pel ducato di Parma*, che render seppe pregiatissime, per molti e interessanti articoli di che le arricchì: tra questi si distingue nel volume del 1793 una sfera armillare, superiore a tutte le altre onde s'era fatto uso sino a quel momento, per dimostrare i fenomeni celesti; in quello del 1803 si trova un'eccellente analisi delle osservazioni fatte da Piazzi e da Olbers per determinare la grandezza dei pianeti di Cerere o di Pallade. Tali lavori e tali occupazioni non impedirono all'infaticabile Cossali di terminare in quel medesimo tempo la sua *Storia critica dell'origine, trasporto in Italia, e primi progressi in essa dell'algebra*, Parma, 1793-97, 2 vol. in-4, opera immensa, che Delambre riguarda come una di quelle che maggiormente onorano i matematici del secolo XVIII. Per comporla non vi voleva meno della pazienza instancabile, e del profondo ed esteso sapere del Cossali, che dovè immergersi nel penoso studio non solo degli scritti degli antichi Greci, ma di quelli pure di Leonardo da Pisa, di Luca Paccioli, del Tartaglia, del Cardano, ec.; se non che il frutto che ne raccolse, l'aver cioè rivendicato all'Italia l'onore di non poche scoperte, l'avere schiarito parecchi punti controversi della storia delle matematiche, l'avere rilevato varj errori del Montucla, dovè esser larga ricom-

pensa di ogni sua fatica a lui che null'altro ricercava che il progresso della scienza e l'onore della patria. Quantunque occupato in tanti e sì importanti lavori s'impegnò nello stesso tempo in varie dispute, nelle quali però, e specialmente in quella che ebbe col celebre Lorgna, non mantenne quella tranquillità di ragionamento e quella urbanità che indispensabili sono per rendere proficue le dispute letterarie e scientifiche.

Gli avvenimenti politici lo indussero nel 1805 ad allontanarsi da Parma e a ritirarsi di nuovo a Verona, ove i suoi concittadini furono solleciti a valersi de' suoi lumi offerendogli il posto di professore di matematiche, e incaricandolo di provvedere co' suoi consigli alle occorrenze idrauliche di quella provincia: ma non potè a luogo esercitare tali ufizj, essendo stato chiamato nell'anno seguente 1806 dal governo italiano a coprire la cattedra di calcolo sublime nell'università di Padova, e rivestito ancora del titolo d'ispettore generale onorario delle acque e strade. Attese a soddisfare con zelo e con assiduità veramente esemplare ai doveri del suo posto, nè pago di ciò, s'impose l'obbligo di sublimare il merito e le opere di alcuni illustri italiani presentando negli *Elogi* dello Stellini, del Poleni e del Lagrange un'elegante analisi dei lavori di questi sommi. Era uno dei quaranta della Società Italiana, alla quale diede molte memorie di fisica e matematica, ed oltre parecchie altre accademie lo annoverava tra i suoi l'Istituto Italiano delle Scienze ed Arti. Benchè avesse sortito dalla natura una complessione robusta, l'intensità del lavoro giunse a logorare la sua salute, cosicchè nel 20 Dicembre 1815 dovè soccombere alla violenza di un umore ostico podagroso che da alcuni anni lo travagliava minacciandone spesso la vita. L'università di Padova gli fece celebrare magnifici funerali, ed a Verona nella chiesa di Santa Anastasia fu posto il suo busto in marmo con onorevole iscrizione.

Oltre gli scritti rammentati di sopra, abbiamo del Cossali le seguenti opere matematiche: I *Discorso astronomico sull' ecclissi dell' anno* 1791; II *Dissertazione sull' assoluta irriducibilità del binomio cubico, in risposta al quesito analitico proposto dall' Accademia di Padova nel* 1781, Verona, 1782, in-4; III *Quattro lettere apologetiche dell' analisi algebraica contro il Nicolai*, inserite nel così detto *Giornale dei confini d' Italia*, per l'anno 1783; IV *Controversia analitica tra il sig. Lorgna ed il giornalista di Pisa, decisa col fatto, aggiuntovi l' esame logico di un logico principio del sig. Lorgna, base della sua apologia*, 1786; V *Particularis methodus de cubicarum equationum solutione a Cardano luci tradita*; VI *Scrittura a favore de' signori Oppici nella lite idraulica colla signora M. Dorotea Pallavicini Vidoni pel trasporto del canale di Bassetto in Polesine*; VII *Trattato sopra le figure isoperimetre*; VIII *Soluzione generale del problema di determinare la capacità di una botte circolare con fondi eguali o diseguali* nel Tomo XVII delle *Memorie* della Società Italiana; IX *Lettera a sig. cav. Antonio Cagnoli sul problema di determinare in un' orbita ad un tempo dato qualunque piccolo cangiamento geocentrico di un pianeta con emendazione di una formula del Frisi*; X *Elogio del professor padre Stellini*, Padova, 1811, in-8; XI *Elogio del professor marchese Poleni*, Padova, 1813, in-8; XII *Elogio di Lagrange*, Padova, 1813, in-8; XIII *Lettera al Sig. dottor D'Alembert sopra una misteriosa alembertiana equazione*, nel Tom. IX delle *Memorie* della Società Italiana; XIV *Sulla tensione delle funi*, Tom. X, Mem. Soc. Ital.; XV *Disquisizione matematica sull'opinione delle piogge dei sassi dai vulcani lunari*, Tom. XIII, Mem. Soc. Ital.: in questa profonda memoria il Cossali partendosi dall'ipotesi che gli aeroliti possano essere lanciati sulla terra da qualche vulcano della luna, prende a determinare col soccorso del calcolo e dell'astronomia la forza di projezione necessaria affinchè l'aerolito giunga al punto ove è eguale l'attrazione lunare e terrestre, ed entrato

nella sfera d'attrazione della terra prosegua il suo corso colla velocità di piedi 16,39 nel primo $1''$; egli trova che la velocità di projezione dovrebbe essere di piedi 8292,73 in $1''$, e dimostra quindi che in forza di tal projezione (circa il tredicesimo di quella con cui la terra si aggira nella sua orbita), l'aerolito cadrebbe sul nostro pianeta colla velocità di piedi 34067,4 per $1''$, e impiegherebbe nel suo cammino 6¼ ore, 14 minuti e 26 secondi. Il metodo del quale si è servito per risolvere questo problema è alquanto meno elegante di quello che ha guidato Poisson nella ricerca della stessa soluzione; XVI *Indagini per sottomettere a calcolo il barometro nelle diverse sue forme, nelle sue dipendenze, e ne' suoi usi*, Tom. XV, Mem. Soc. Ital.; XVII *Sopra il limite non comunemente avvertito della consueta regola di doppia falsa posizione*, Tom. XVI, Mem. Soc. Ital.; XVIII *I Baratti mercantili ridotti e dimostrati per algebra*, Tom. XVI Mem. Soc. Ital.; XIX *Disquisizioni sui varj metodi di eliminazione*, Tom. XVI, Mem. Soc. Ital.; XX *Artificj degli antichi per evitare nelle soluzioni dei problemi le equazioni al secondo grado*, Tom. XVII, Mem. Soc. Ital.; XXI *Metafisica delle equazioni*, memoria inserita nel Vol. I dei *Nuovi saggi scientifici e letterarj* dell'Accademia di Padova, 1817; XXII *Sul corso del fiume Po*, nel Vol. II delle *Memorie* dell'Istituto del regno lombardo-veneto, Milano, 1821. Per maggiori notizie non tanto sulla vita quanto sulla opere di questo dotto potrà ricorrersi all'Elogio che ne scrisse l'Avanzini e che si legge nel Tomo XIX delle *Memorie* della Società Italiana.

COSTANTE (*Alg.*). Nome che si dà a qualunque quantità la quale non varia rapporto ad altre quantità che variano e che si chiamano *variabili*.

Allorquando si differenzia un'espressione algebrica nella quale si trovano delle costanti isolate, queste costanti spariscono. Infatti la differenziale di $Ax+B$ è (*Vedi* Differenziale) $Adx+dB$, o semplicemente Adx, poichè B essendo invariabile, $dB=0$. Così, quando una differenziale è data, tale come Adx, non possiamo immediatamente sapere se essa è il risultamento della differenziazione della sola quantità Ax, o di $Ax=B$. Bisogna dunque tutte le volte che si prende l'integrale di una quantità differenziale, aggiungere una costante che può essere nulla, ma che bisogna saperne determinare il valore dalla natura della questione. Si esprime ordinariamente questa costante con la lettera C: per esempio, φx essendo l'integrale di φdx, si pone

$$\int d\varphi x = \varphi x + C.$$

Per determinare questa costante si dà per il consueto alla variabile, o alle variabili che entrano nell'integrale, dei valori particolari, tali che ne risulti per quest'integrale un valore conosciuto. Per esempio, se si sa che facendo $x=0$ si ottiene, per $\int d\varphi x$, una quantità qualunque che indicheremo con M si scriverà

$$\varphi \dot{x} + C = M,$$

il punto situato sopra la variabile, indicando il valore o che deve esser dato alla variabile in questa questione.

Si ha dunque

$$C = \varphi \dot{x} + M$$

e l'integrale completo è $\varphi x + \varphi \dot{x} + M$. Per fissare le idee, supponiamo che si tratti di prendere l'integrale della quantità $dx\sqrt{x-0}$, che è

$$\int dx\sqrt{x-0} = \frac{2}{3}\left(x-a\right)^{\frac{3}{2}} + C,$$

e supponiamo ancora che quando $x=0$, quest' integrale debba essere *zero;* avremo allora per determinare la costante l'equazione

$$\frac{2}{3}\left(-n\right)^{\frac{3}{2}}+C=0.$$

Donde

$$C=\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}},$$

così, in questo caso, l' integrale domandato è

$$\int dx\sqrt{x-a}=\frac{2}{3}\left(x-a\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}}.$$

Vedi Integrale.

COSTARD (Giorgio), sacerdote inglese, nato verso il 1710, e morto nella contea di Middlesex nel mese di Gennajo 1782, fu dottissimo nelle lingue orientali e nell' astronomia, come ne fanno fede le molte opere che da esso furono pubblicate, e delle quali Nichols riporta l' elenco negli *Aneddoti biografici intorno a Bowyer*. Noi non rammenteremo che le due seguenti, scritte in inglese: I *Usa dell'astronomia nella storia e nella cronologia, dimostrato con un esame sulla caduta della pietra che cadde presso ad Egos Patamos, secondo la pretesa predizione di Anassagora*, Oxford, 1764, in-4; II *Storia dell' astronomia, applicata alla geografia, alla storia e alla cronologia*, Oxford, 1767, in-4. Per ulteriori notizie si consulti la *Biografia universale*.

COSTELLAZIONE (*Astron.*). Aggregato o sistema di stelle espresso e rappresentato sotto il nome e la figura o di un uomo o di un animale o di qualsivoglia altro emblema.

L' uso di dividere il cielo in più parti o costellazioni sembra antico quanto l' astronomia stessa: il solo modo infatti di non perdersi in quella moltitudine immensa di stelle delle quali è cosperso il firmamento, era quello di formarne dei gruppi e di distinguerli gli uni dagli altri con nomi e con figure atte ad ajutare la memoria. Tale ha dovuto essere il primo lavoro dei primi osservatori.

Gli scrittori i più antichi di cui siano giunte fino a noi le opere conoscevano questa divisione dei cieli. Nel libro di Giobbe, si trova, Cap. IX, vers. 9: *Qui facit Arcturum, et Orionu, et Hyadas, et interiora austri:* » Egli creò e Arturo, e Orione, e le Hiadi, e le ascose parti del mezzodì. » E più oltre, nella sublime enumerazione ch'ei pone nella bocca del Signore, l'autore sacro ne fa nuovamente menzione, Cap. XXXVIII, vers. 31 e 32: *Numquid conjungere valebis micantes stellas Plejadas, aut gyrum Arcturi poteris dissipare? Numquid producis Luciferum in tempore suo, et Vesperum super filios terrae consurgere facis?* » Potrai tu forse legare le stelle folgoreggianti delle Plejadi, o sconvolgere il corso di Orione? Se' tu forse, che fai apparire a suo tempo la stella del mattutino, o che fai nascere l'Espero sopra i figliuoli degli uomini? » Si trova ancora nella profezia di Amos la seguente esortazione, Cap. V, vers. 8: *Facientem Arcturum, et Orionem, et convertentem in mane tenebras, et diem in noctem mutantem: qui vocat aquas maris, et effundit eas super faciem terrae: Dominus nomen est ejus:* » Cercate lui, che creò Arturo, ed Oriane, che cangia le tenebre in mattino, e muta il giorno in notte, che chiama le acque del mare, e le versa sopra la terra: il suo nome egli è, il Signore. » In quest'ultimo passo notabilissimo, le stelle dell' Orsa e di Orione sono citate come conosciutissime e da Amos, che era un semplice pastore, e dal popolo al quale egli parlava. Dal

che possiamo congetturare che in quell'epoca, vale a dire circa 800 anni avanti Gesù Cristo, queste costellazioni erano state già inventate da longo tempo. Parecchie costellazioni si trovano pure menzionate da Esiodo e da Omero, circa 900 anni prima di Gesù Cristo.

Arato di Tarso, il poeta astronomo che viveva 277 anni prima dell'era volgare, ci ha lasciato un trattato di tutte le costellazioni conosciute al suo tempo. Questo trattato contiene la loro situazione le une rapporto alle altre, come pure la loro situazione rapporto ai circoli principali della sfera. Il celebre Ipparco ha dimostrato che Arato non avea fatto che seguire la descrizione d'Eodossio, anteriore a lui circa un secolo; ed è assai probabile che gli astronomi che succedettero ad Ipparco continuassero a fare uso delle stesse figure delle costellazioni fino al tempo di Tolomeo, meno poche addizioni o variazioni. L'Almagesto di Tolomeo è stato l'oggetto di una venerazione così grande fra gli astronomi, che quasi tutti quelli che hanno scritto dopo di lui hanno adottato le figure delle sue costellazioni, e si sono sforzati, per quanto è stato loro possibile, di farle corrispondere colle sue descrizioni; il che d'altronde era importantissimo per poter confrontare le nuove osservazioni colle antiche.

La divisione degli antichi aveva luogo soltanto nella parte del cielo che era loro visibile; essa si componeva di quarantotto costellazioni distribuite come appresso: dodici formavano lo zodiaco, ventuna erano situate nella parte settentrionale del cielo, e sedici nella parte meridionale. Più sotto si troveranno i loro nomi. Le stelle non comprese in queste costellazioni, e che non ostante erano visibili ad occhio nudo, erano dette *informi*; molte di esse hanno servito agli astronomi moderni per formare nuovi gruppi o nuove costellazioni. Così Evelio ha posto il *Leoncino* tra il *Leone* e l'*Orsa maggiore*, la *Lince* tra l'*Orsa minore* e il *Cocchiere*, ec.

Per non diffonderci inutilmente, passeremo sotto silenzio i tentativi fatti senza successo per sostituire alle antiche figure delle costellazioni altre figure tratte o dalla Sacra Scrittura, o dalle armi dei principi d'Europa; e ci limiteremo ad estrarre dal Delambre la tavola seguente delle costellazioni sì antiche che moderne. Esse si trovano disegnate e descritte in parecchi atlanti, dei quali il più completo e il più dettagliato è quello pubblicato da Bode a Berlino.

TAVOLA DELLE COSTELLAZIONI ANTICHE E MODERNE

Le costellazioni di Tolomeo sono quarantotto.

1. L'Orsa minore o Cinosura.
2. L'Orsa maggiore.
3. Il Dragone.
4. Cefeo.
5. Boote.
6. La Corona boreale.
7. Ercole.
8. La Lira.
9. Il Cigno.
10. Cassiopea.
11. Perseo.
12. Il Cocchiere.
13. Ofiuco o il Serpentario.
14. Il Serpente.
15. La Freccia e la Volpe.

16. L' Aquila e Antinoo.
17. Il Delfino.
18. Il Cavallino.
19. Pegaso o il Cavallo.
20. Andromeda.
21. Il Triangolo boreale.

Tutte le precedenti costellazioni sono situate nella parte settentrionale del cielo; le seguenti sono nello zodiaco.

22. L'Ariete.
23. Il Toro.
24. I Gemelli.
25. Il Cancro.
26. Il Leone.
27. La Vergine.
28. La Libbra.
29. Lo Scorpione.
30. Il Sagittario.
31. Il Capricorno.
32. L' Aquario.
33. I Pesci.

Costellazioni australi.

34. La Balena.
35. Orione.
36. L' Eridano.
37. La Lepre.
38. Il Cane maggiore.
39. Il Cane minore.
40. La Nave di Argo.
41. L' Idra.
42. La Tazza.
43. Il Corvo.
44. Il Centauro.
45. Il Lupo.
46. L' Altare.
47. La Corona australe.
48. Il Pesce australe.

Le costellazioni aggiunte da Evelio sono:

1. Antinoo, al di sotto dell'Aquila.
2. Il Monte Menalo, presso Boote.
3. I Cani da caccia, Astario e Chara.
4. La Giraffa.
5. Cerbero o il Ramo nelle mani di Ercole.
6. La Chioma di Berenice.
7. La Lucertola.
8. La Linca.

Digitized by Google

9. Lo Scudo di Sobieski.
10. Il Sestante d'Urania.
11. Il Piccolo Triangolo.
12. Il Leoncino.

Le costellazioni aggiunte da Halley nella parte australe sono:

1. La Colomba.
2. La Querce di Carlo II.
3. La Gru (*Vedi* Bayer).
4. La Fenice.
5. Il Pavone.
6. L'Uccello indiano, o senza piedi.
7. La Mosca.
8. Il Camaleonte.

senza contare il Cuore di Carlo II, che Halley ha posto sul collare di Chara, uno dei Cani di Evelio.

Costellazioni australi di Bayer.

1. L'Indiano.
2. La Gru.
3. La Fenice.
4. L'Ape o la Mosca.
5. Il Triangolo australe.
6. L'Uccello di Paradiso.
7. Il Pavone.
8. Il Tocano.
9. L'Idra maschio.
10. Il Dorado.
11. Il Pesce volante.
12. Il Camaleonte.

Costellazioni australi di La Caille.

1. L'Apparato dello scultore.
2. Il Fornello chimico.
3. L'Orologio astronomico.
4. Il reticolo romboidale.
5. Il Bulino dell'incisore.
6. Il Cavalletto del pittore.
7. La Bussola.
8. La Macchina pneumatica.
9. L'Ottante.
10. Il Compasso.
11. La Squadra e la Riga.
12. Il Telescopio astronomico.
13. Il Microscopio.
14. La Montagna della Tavola.
15. La Gran Nuvola e la piccola Nuvola.
16. La Croce australe. Quest'ultima costellazione è di Royer.

Digitized by Google

Altre costellazioni moderne.

La Renna.	Lemonnier
Il Solitario.	*idem*
Il Mietitore.	Lalande
Il Toro reale di Poniatowski.	Poczobut
Il Trofeo di Federico.	Bode
Lo Scettro di Brandeburgo.	*idem*
Il Telescopio di Herschel.	*idem*
Il Pallone aerostatico.	*idem*
Il Quadrante murale.	*idem*
Il Gatto.	*idem*
Il Loch.	*idem*
L'Arpa di Giorgin.	Hell.

COSTRUZIONE DELL' EQUAZIONI (*Alg. applic.*). Essa consiste in processi adattati a trovare le radici dell'equazioni per mezzo di operazioni grafiche, vale a dire per mezzo di costruzioni geometriche effettuate con l'aiuto della riga e del compasso, o con descrizioni di linee curve.

Equazioni di primo grado. La forma generale di quest' equazioni essendo $Ax=B$, ovvero $Ax=1\times B$, basta di cercare una quarta proporzionale alle linee 1, A e B.

Si prende dunque una retta arbitraria per unità; con quest' unità si costruiscono due altre rette eguali ad A e B, quindi si cerca la quarta proporzionale con uno dei processi dati nell'articolo APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA n.° 29. Questa quarta proporzionale è l'incognita domandata.

Equazioni del secondo grado. Abbiamo all'articolo APPLICAZIONE DELL' ALGEBRA ALLA GEOMETRIA n.° 39, dato il metodo per costruire quest' equazioni.

Equazioni del terzo e quarto grado. Le radici di quest' equazioni possono sempre esser determinate con l'intersezione di due sezioni coniche; ma la costruzione più semplice è quella che si effettua col *circolo* e la *parabola*. Sia $yy'''Ay''y'$ (*Tav.* LXXXV, *fig.* 5) una parabola di cui l'asse è AB e $yy'x'''y'''y$ un circolo il di cui centro è C e il raggio Cy, che tagli la parabola nei quattro punti y, y', y'', y'''. Da questi punti conduciamo le ordinate xy, $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$; conduciamo inoltre CD perpendicolare all' asse e CE perpendicolare sopra xy. Facciamo $AD=a$, $CD=b$, $Ax=x$, $xy=y$, e indichiamo con p il parametro della parabola, e con r il raggio Cy del circolo. Ciò premesso, l'equazione della parabola è

$$y^2=px,$$

e di più abbiamo

$$\overline{Cy}^2=\overline{CE}^2+\overline{Ey}^2,$$

ovvero

$$\overline{Cy}^2=(Ax-AD)^2+(xy-CD)^2,$$

vale a dire

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2,$$

il che dà, sviluppando, l'equazione

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2.$$

Sostituendo invece di x il valore $x=\frac{y^2}{p}$, preso dall'equazione $y^2=px$, e or-

dinando rapporto alle potenze di y, abbiamo

$$y^4-(2pa-p^2)y^2-2bp^2y+(a^2+b^2-r^2)p^2=0.$$

Equazione del quarto grado le di cui radici sono xy, $x'y'$, $x''y''$, $x'''y'''$. Basta dunque, per costruire un' equazione del quarto grado, di farla coincidere con quest' ultima. Ora la forma generale di quest' equazioni, dopo aver fatto sparire il secondo termine (*Vedi* Biquadratica) è

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0;$$

facciamo dunque

$$A=-2pa+p^2$$
$$B=-2bp^2$$
$$C=(a^2+b^2-r^2)p^2$$

e determiniamo con l'aiuto di quest' eguaglianze le quantità a, b, p, r con le quali costruiremo il circolo e la parabola. Per eseguir ciò, prendiamo una retta arbitraria per unità, e si prenda nel medesimo tempo quest' unità per il parametro della parabola, vale a dire, facciamo $p=1$; i coefficienti A, B, C essendo quindi costruiti con quest' unità, avremo quattro rette cognite p, A, B, C. Ma l'eguaglianze di sopra danno

$$a=\frac{p^2}{2p}-\frac{A}{2p},$$

$$b=-\frac{B}{2p^2},$$

$$r=\sqrt{\left[a^2+b^2-\frac{C}{p^2}\right]}.$$

Così il valore di a si costruirà prendendo la differenza di due rette di cui la prima $\frac{p^2}{2p}$, o $\frac{p}{2}$ è la metà di p, e di cui la seconda $\frac{A}{2p}$ è la metà di A a motivo di $p=1$: il valore di b è semplicemente la metà di B, poichè $p^2=1$, quanto al valore di r, costruiremo prima di tutto una retta ausiliare m

$$m=\sqrt{\left[b^2-\frac{C}{p^2}\right]},$$

quindi si avrà

$$r=\sqrt{a^2+m^2},$$

che si costruisce senza difficoltà.

Quanto alla retta ausiliare m, poichè $p=1$, si rende omogenea la sua espressione ponendo

$$m=\sqrt{\left[b^2-\frac{Cp^3}{p^2}\right]}.$$

Ciò che equivale a

$$m=\sqrt{\left[b^2-Cp\right]}.$$

Digitized by Google

Questa retta si costruisce cercando antecedentemente una media proporzionale, alle due rette C e p; mentre indicando questa media per n, si ha

$$n^2 = Cp,$$

e per conseguenza,

$$m = \sqrt{b^2 - n^2}$$

il che riporta m ad essere il terzo lato di un triangolo rettangolo di cui b è l'ipotenusa, e n il secondo lato. *Vedi* Applicazione dell' Algebra alla geometria n.° 36.

I valori di a, b, ed r essendo così costruiti, dopo aver descritto una parabola di cui il parametro sia 1 o p, si prende sopra l'asse, $AD = a$; dal punto D. si eleva la perpendicolare $DC = b$, e dal punto C come centro, con un raggio $= r$, si descrive un circolo: le ordinate dell'intersezioni del circolo e della parabola sono le radici dell'equazione

$$x^4 + Ax^2 + Bx + C = 0.$$

Discutendo le precedenti equazioni, troveremo facilmente il caso in cui tutte le radici sono reali, quello in cui esse sono tutte *immaginarie*, e facilmente quello in cui due radici sono reali, e due immaginarie.

La costruzione dell'equazioni del *terzo grado* non differisce da quella del quarto, che perchè una dell'intersezioni del circolo e della parabola si trova all'origine dell'asse, allora una delle ordinate sparisce, e le tre altre sono determinate da un'equazione a tre dimensioni o del terzo grado, con la quale basta di far coincidere un'equazione qualunque proposta del terzo grado per costruire geometricamente le sue radici.

Il Viète, il Getaldus e il Cartesio hanno dato le costruzioni dell'equazioni semplici del primo e del secondo grado. Quest'ultimo come pure il Baker, nella sua *Geometrical Key*, hanno fatto di più conoscere come si poteva risolvere le equazioni del terzo e del quarto grado per mezzo di un circolo e di una parabola; ma l'idea delle loro costruzioni si deve a Sluze che l'aveva esposta nella sua opera, *Mesolabium*, parte 2ª. Il Newton, nella sua *Aritmetica universale*, tratta questa questione non solamente impiegando le sezioni coniche, ma ancora la *concoide* e la *cissoide* le quali si descrivono con altrettanta facilità quanto quest'ultima. Il Halley, il marchese de L'Hôpital e il Maclaurin si sono egualmente occupati di queste costruzioni, le quali hanno ancora somministrato al Lahire il soggetto di un piccolo trattato intitolato: *La construction des équations analytiques*. Rimanderemo alle loro opere, come pure ai trattati più recenti d'applicazione dell'algebra alla geometria, per tutte le costruzioni delle equazioni superiori al quarto grado, le scoperte moderne sopra la soluzione algebrica di queste equazioni avendone rese le costruzioni geometriche più curiose che veramente utili.

COTANGENTE (*Geom.*). Nome che si dà alla tangente del complemento di un angolo o di un arco. *Vedi* Complemento e Tangente.

COTES (Ruggero), celebre geometra inglese, abile fisico e dotto astronomo, nacque nel 1682 a Burbach, nella contea di Leicester. Suo padre, che era curato, lo destinò al ministero evangelico, ma nel tempo stesso ebbe l'accortezza di lasciare che la sua intelligenza liberamente si sviluppasse. Ruggero Cotes annunziò di buon'ora le più felici disposizioni per le scienze e particolarmente per le matematiche, disposizioni cui uno de' suoi zii gli somministrò i mezzi di coltivare. Non aveva ancora che ventiquattro anni, quando nel 1706 fu scelto per oc-

cupare il primo la cattedra di astronomia e di filosofia sperimentale, che Tommaso Plume, arcidiacono di Rochester, aveva di recente fondata nell'università di Cambridge. I lavori matematici di Cotes non gl'impedirono di darsi contemporaneamente allo studio delle lingue e a quello della scienze teologiche. Sostenne con onore la sua tesi, e seguendo la volontà di suo padre entrò negli ordini nel 1713. Forse l'assiduità colla quale applicavasi a tanti studj abbreviò una vita che prometteva un brillante avvenire per la scienza. Ruggero Cotes morì il 5 Giugno 1716 in età di trentatrè anni.

Le sole opere che fece stampare egli stesso furono la seconda edizione dei *Principj matematici* di Newton, libro che fregiò di una eccellente prefazione, e due memorie inserite nelle *Transazioni filosofiche*; la prima è un trattato di analisi intitolato *Logometria*, e la seconda contiene la descrizione di una grande meteora osservata in Inghilterra il 6 Marzo 1716. La modestia di Cotes allarmavasi della pubblicità, e non fu che dietro le più pressanti sollecitazioni del dottore Bentley, suo intimo amico, che egli s'indusse a dare alla stampa la sua prima opera. Il suo nome sarebbe forse dimenticato e la posterità ignorerebbe i suoi veri titoli alla gloria, se Roberto Smith, suo amico, suo parente e suo successore nella cattedra d'astronomia che occupava a Cambridge, frugando tra le sue carte non avesse raccolto e pubblicato altri lavori più importanti, elaborati nel mistero della sua vita studiosa. Cotes si è molto occupato del calcolo integrale; è a lui dovuta la scoperta del teorema che porta anch'oggi il suo nome, e che somministra il mezzo d'integrare coi logaritmi e cogli archi di circolo la frazioni razionali di cui il denominatore è un binomio, espressioni delle quali anco Leibnitz e Giovanni Bernoulli eransi occupati con buon successo. I lavori di quest'ultimo e quelli di Eulero diedero ben tosto una forma più comoda a questo ramo dal calcolo integrale, in guisa che il teorema di Cotes, che non è altro che un caso particolare del teorema di Moivre (*Vedi* Equazioni Binomie), riducesi presentemente ad una curiosa proprietà del circolo. Supponendo però che Cotes abbia tratto dagli scritti di Leibnitz e di Bernoulli la prima idea dal suo teorema, ciò non toglie che a lui interamente appartengano le ingegnose applicazioni che ne fece. La geometria deve ancora a Cotes parecchie altre scoperte, delle quali peraltro i progressi della scienza hanno diminuito l'importanza. L'opera in cui questi diversi lavori sono stati raccolti per cura di Roberto Smith è intitolata: *Harmonia mensurarum, sive analysis et sinthesis per rationum et angulorum mensuras promotae: accedunt alia opuscula mathematica*, Cambridge, 1722, in-4. Quest'opera è stata sempre molto rara, e pochi matematici possono consultarla; il padre Walmsley, benedettino inglese e dotto geometra, ne ha pubblicata una traduzione francese: ma tal versione non è letterale, e può piuttosto riguardarsi come una parafrasi, nella quale egli ha preso a sviluppare le teorie di Cotes: essa è intitolata: *L'analyse des mesures, des rapports et des angles, ou réduction des intégrations aux logarithmes et aux arcs de cercle*, Parigi, 1747, in-4. Roberto Smith ha pubblicato pure un'altra opera di Cotes sulla fisica, intitolata: *Hydrostatical and pneumatical lectures*, Londra, 1736, in-8, la quale contiene delle proposizioni assai curiose per l'epoca in cui furono emesse: tale opera è stata tradotta in francese da Lemounier il medico, sotto questo titolo: *Leçons de physique expérimentale sur l'équilibre des liqueurs*, Parigi, 1740, in-4. Altri scritti di Cotes vennero pubblicati da Matsko a spese del conte Ferdinando di Lippe col titolo di *Opera miscellanea*, Lemgo, 1768, in-8, tra i quali si trova pure una bella memoria intitolata: *Aestimatio errorum in mixta mathesi, seu variationes partium trianguli plani et sphaerici*, che era dapprima uscita come un'appendice dell'*Harmonia mensurarum*.

La memoria di Cotes, che la pubblicazione dell'*Harmonia mensurarum*, ren-

deva anco più cara ai dotti che avevano potuto apprezzare il suo talento sì elevato e sì modesto, non andò esente dagli attacchi dell' invidia. Un libello intitolato: *Epistola ad amicum de Cotesii inventis* comparve a Londra alcun tempo dopo la sua opera. In tale opuscolo, le scoperte del giovine geometra, di cui l'Inghilterra dotta deplorava la perdita, si riducevano a semplici deduzioni dei teoremi di Newton. Così in ogni tempo una bassa gelosia è stata sempre intenta ad avvilire e deprimere gli uomini del progresso: essa non si ristette allora avanti ad una tomba sì prematuramente aperta! Il sommo Newton non divise però l'opinione degli anonimi detrattori di Cotes, ed in occasione di alcune ricerche sull'ottica, alle quali il giovine geometra si era dato poco avanti la sua morte, lasciò sfuggirsi queste parole, che possono tener luogo di qualunque elogio: *Se Cotes fosse vissuto, noi avremmo saputo qualche cosa.*

COULOMB (Carlo Agostino de), matematico e fisico celebre, nato ad Angoulême nel 1736 da una famiglia illustre per molti uomini dati alla magistratura. I suoi lavori appartengono meno alle teorie che alle applicazioni della scienza, ma in quest' ultimo rapporto sono stati utilissimi ai progressi della meccanica. Coulomb fece i suoi studj a Parigi, ed entrò di buon' ora nel genio militare. Fu successivamente impiegato alla Martinica, a Rochefort, all' Isola d' Aix, e a Cherbourg, ove diresse con distinzione i lavori affidati al corpo di cui faceva parte. Un carattere fermo ed elevato, uno zelo pel servigio a tutta prova, e soprattutto i suoi talenti gli meritarono un rapido avanzamento. Nel 1783, fu ricevuto, ad unanimità di suffragj, membro dell' Accademia delle Scienze ed occupò allora parecchi impieghi, dai quali volontariamente si dimise all'epoca della rivoluzione, per darsi totalmente all' educazione de' suoi figli.

Fino dal 1776, Coulomb aveva presentato all' Accademia delle Scienze una memoria *sulla statica delle volte*, che ottenne molto successo e lo fece conoscere tra i dotti. Nel 1779 e 1782 l' Accademia propose per soggetto del concorso la teoria delle macchine semplici, avendo riguardo agli effetti dell' attrito e della rigidezza delle corde. Coulomb riportò il premio, e la sua memoria è considerata anche oggigiorno come l' opera la più notabile e la più completa che sia stata pubblicata su questo argomento (*Vedi* Corde). Due anni dopo questo successo Coulomb entrò nell' Accademia, alla quale diede un gran numero di memorie importanti sopra diverse questioni di meccanica, sull' attrito, sul magnetismo e sull' elettricismo. Le osservazioni notabili che ha fatte su queste ultime due parti meritano di essere esposte con maggiori particolarità, poichè comprendono delle scoperte che fanno epoca nella storia della fisica matematica. Noi non potremmo analizzare questi lavori interessanti con maggior chiarezza, precisione ed eleganza di quello che ha fatto un celebre biografo di Coulomb. Ecco come egli si esprime in questo proposito. » Coulomb aveva intrapreso una serie di esperienze sulla elasticità dei fili di metallo, e per conoscerla concepì l'idea ingegnosa d' intendere ad osservare la forza colla quale ritornavano supra sè stessi, dopo essere stati torti. Scoprì in tal modo che questi fili resistevano alla torsione tanto maggiormente quanto più venivano torti, purchè non si andasse tant' oltre da alterarne l' intima costituzione. Siccome la loro resistenza era estremamente debole, immaginò che essa avrebbe potuto servire per misurare le più piccole forze con una estrema precisione. Perciò sospese un lungo ago orizzontale all'estremità di un filo di metallo. Supponendo quest' ago in quiete, se si allontana di un certo numero di gradi dalla sua posizione naturale, il filo, che in tal modo si trova torto, tende a ritornare nel suo stato primitivo per una serie di oscillazioni di cui si può osservare la durata: ciò basta perchè si possa col calcolo valutare la forza che ha stornato l'ago. Tale fu l' idea dello strumento ingegnoso che Coulomb chiamò *bilancia di torsione*. Egli se ne servì in breve per iscoprire le leggi che seguono le

attrazioni e le repulsioni elettriche e magnetiche. Trovò che esse erano le stesse di quelle dell' attrazione celeste. Alcuni anni dopo, il fisico inglese Cavendish si servì dello stesso metodo per misurare l'attrazione del globo terrestre. È giusto il dire che il celebre astronomo Tobia Mayer era giunto anch'esso precedentemente a scoprire la legge delle attrazioni magnetiche, per una via in vero assai più penosa di quella seguita da Coulomb, ma il suo lavoro non era stato mai pubblicato, e non ne dobbiamo la cognizione che al sunto di tale parte de' suoi manoscritti, che il figlio di quel celebre uomo si è compiaciuto di comunicarci. Coulomb comprendeva troppo bene l' utilità dello strumento che aveva scoperto per non moltiplicarne le applicazioni. Prese a servirsene per determinare coll'esperienza le vere leggi della distribuzione dell' elettricità alla superficie dei corpi, e del magnetismo nel loro interno. L' ordine che pose nelle sue ricerche non è meno ammirabile dell' esattezza e della novità de' suoi risultati. Cominciò dal determinare la quantità di elettricità che si perde, in un tempo dato, pei diversi sostegni; allora non solamente fu in grado di determinare la natura di tali sostegni la più favorevole alla conservazione dell' elettricità, ma potè ancora considerarli come perfetti e renderli tali per mezzo del calcolo. Provò quindi coll' esperienza che l' elettricità si divide tra i corpi non in virtù di un'affinità chimica, ma in forza di un principio repulsivo a lei proprio; provò parimente che l' elettricità libera si spande tutta intera sulla superficie dei corpi senza penetrare nel loro interno, e dimostrò col calcolo che questo risultato era una conseguenza necessaria della legge di repulsione. Con tali dati gli fu possibile di cercare e di determinare per mezzo dell' esperienza il modo col quale l' elettricità si distribuisce sulla superficie dei corpi conduttori, considerati isolatamente o in presenza gli uni degli altri. Tali osservazioni numerose e precise erano come altrettante condizioni fondamentali alle quali una buona teoria avrebbe dovuto soddisfare, se un giorno si giungesse a sottoporre al calcolo le spinose questioni dell' elettricità; questo appunto è stato fatto da uno de' migliori geometri francesi, Poisson, ed il suo lavoro, svelando nei risultati di Coulomb relazioni cui il potente strumento dell' analisi poteva solo far conoscere, ha messo anco in più chiara luce l' ammirabile sagacità di quel valente osservatore, l' esattezza delle sue esperienze, e l' estrema sua fedeltà. Coulomb preparò pure alla teoria del magnetismo gli elementi che serviranno un giorno a sottoporlo all' analisi: determinò egualmente il modo con cui il magnetismo si distribuisce nell' interno dei corpi calamitati nel dividersi tra loro. Le sue esperienze condotte con un metodo perfetto gli fecero conoscere i mezzi cui bisognava impiegare, sia per dare il più alto grado di magnetismo, sia per conoscere questo grado quando già esiste.»

Coulomb fu nominato membro dell' Istituto fino dall' epoca della fondazione di tale dotta società, e fu egualmente nominato uno degl' ispettori generali dell' istruzione pubblica. Ebbe spesso occasione nell' esercizio di queste importanti funzioni di spiegare il carattere nobile e fermo di cui aveva fatto prova nella sua gioventù resistendo, di fronte ad ingiuste persecuzioni, ad un ministro e agli Stati di Bretagna, che volevano farlo aderire, nella sua qualità di commissario del re, ad una decisione contraria alla sua coscienza e ai dettami della scienza. Uomo di costumi austeri e nel tempo stesso dolci, dotato di una benevolenza estrema, animato in sommo grado da uno spirito di giustizia e d' imparzialità, Coulomb, che fu felicissimo per le affezioni di famiglia, lo fu ancora per le sue relazioni sociali. Egli ha lasciato dopo di lui dei nobili esempj da imitare, la reputazione di un uomo di cuore e di un dotto coscenzioso. Morì a Parigi il 23 Agosto 1806. Oltre le numerose memorie che di esso si trovano nelle raccolte dell' Accademia delle Scienze, dell' Istituto, ec., fu stampata separatamente una sua opera intitolata: *Recherches sur les moyens d'exécuter sous l'eau toutes sortes de travaux hydrauliques sans employer aucun épuisement*, Parigi, 1779, in-8.

Digitized by Google

COUPLET (Claudio Antonio), nato a Parigi il 20 Aprile 1642, fu dapprima destinato al foro; ma dopo avere esercitato alcun tempo la professione d'avvocato, la lasciò per darsi interamente allo studio delle matematiche alle quali sentivasi tratto da irresistibile inclinazione. Fu ajutato ne' suoi studj da Buhot, ed in breve cresto venne membro dell' Accademia delle Scienze e custode del gabinetto delle macchine. Gli vennero pure affidati parecchi lavori idraulici, nell'esecuzione dei quali spiegò le profonde cognizioni che aveva nella teoria delle acque, superando ostacoli che altri ingegneri suoi predecessori avevano dichiarato insormontabili. In seguito occupò una cattedra di matematiche e divenne tesoriere dell' Accademia delle Scienze. Morì ai 25 Luglio 1722. Fontenelle recitò il suo elogio.

COUPLET DES TORTREAUX (Pietro), figlio del precedente, fu ricevuto nel 1696 nell' Accademia delle Scienze, e successe a suo padre nel posto di tesoriere di quella dotta società. Morì nel Dicembre 1744 in età avanzata. Nella raccolta dell' Accademia dal 1726 al 1733 si trovano molte memorie di Couplet: I *De la poussée des terres contre leurs revêtements, et de la force des revêtements qu'on doit leur opposer*; II *De la poussée des vents*; III *Recherches sur la construction des combles de charpente*; IV *Sur les charriots, les traineaux et le tirage des chevaux*.

COURTANVAUX (Francesco Cesare la Sellier marchese di), nato a Parigi da illustre famiglia, entrò dapprima nella carriera delle armi, ma la sua salute avendolo obbligato ad abbandonare una professione per lui troppo faticosa, si diede alla cultura delle scienze, al progresso delle quali non furono inutili le cognizioni che vi acquistò. Nominato nel 1764 membro onorario dell'Accademia delle Scienze, fu nel 1767 scelto da quella società insieme con Pingré e con Messier per provare gli orologi marini che erano stati presentati per concorrere al premio che l'Accademia aveva proposto per il perfezionamento di tali macchine. La relazione dei tre commissarj comparve col titolo di *Journal du voyage sur la frégate l'Aurore*, Parigi, 1768, in-4. Oltre alcune memorie di chimica, si hanno di Courtanvaux le osservazioni di due eclissi solari inserite nelle *Memorie* dell' Accademia. Morì il 7 Luglio 1781, e il suo elogio fu letto da Condorcet.

COURTIVRON (Gaspare la Compasseus de Carqui-Montfort, marchese di), pensionario veterano dell' Accademia delle Scienze di Parigi, nacque nel 1715 nel castello di Courtivron in Borgogna, e morì il 4 Ottobre 1785. Entrò dapprima nella milizia, ma essendo stato ferito nella guerra di Baviera, rinunziò ad un genere di vita divenuto per lui troppo faticoso e si diede senza riserva alla cultura delle scienze. La geometria, l'ottica, l'astronomia, la meccanica, l'arte di lavorare il ferro nella fucina, furono i soggetti delle sue meditazioni, e le memorie, che su queste varie materie ha inserito nella raccolta dell' Accademia delle Scienze, attestano a un tempo la profondità e l'estensione delle sue cognizioni. Una delle principali di queste memorie è quella con la quale propose, nel 1744, per la soluzione delle equazioni numeriche, un metodo di approssimazione più comodo di tutti quelli che allora si conoscevano, e che abbrevia d'assai le sostituzioni successive che bisogna fare in quello di Newton per giungere a valori di mano in mano più prossimi al vero. Soltanto assai lungo tempo dopo, Lagrange ha dato metodi più comodi ancora, e più compiuti. Courtivron non ha pubblicato separatamente altre opere sopra argomento di matematiche che la seguente: *Traité d'optique, dans le quel on donne la théorie de la lumière dans le système newtonien, avec des nouvelles solutions des principaux problèmes de dioptrique et de catoptrique*, Parigi, 1752, in-4.

COUSIN (Giacomo Antonio Giuseppe), dotto matematico, nacque a Parigi il 29 Gennajo 1739. Acquistò fama per la pubblicazione di un trattato di calcolo in-

tegrale al quale si è rimproverata qualche oscurità e qualche disordine, ma che conteneva parecchie proposizioni nuove nei differenti rami di questa parte elevata della scienza, e specialmente sull' integrazione delle equazioni a differenze parziali. Cousin fu ricevuto nel 1772 nell' Accademia delle Scienze. Era fino dal 1766, e fu per trent'anni professore coadiutore di fisica nel collegio di Francia. Nel 1769 era stato eletto professore di matematiche nella scuola militare, ove per venti anni esercitò queste utili ed onorevoli funzioni. Cousin impiegava nei lavori scientifici tutto il tempo che gli lasciavano libero i doveri delle due cattedre; la sua vita dolce e pacifica, esente da ambizione, sembrava dovere scorrere nella tranquilla oscurità dello studio e dell' insegnamento, quando scoppiò la rivoluzione. Allora quest' uomo semplice e modesto spiegò un carattere nobile ed energico. Fino dal 1791 era stato eletto ufficiale municipale, e fu in questa qualità incaricato specialmente dell' amministrazione delle sussistenze. Imprigionato durante il regno del terrore, scampò ai pericoli della sua situazione, ed entrò ben presto pel voto de' suoi concittadini nell' amministrazione municipale, della quale era presidente il primo Pratile dell' anno III (1795), ed affrontò con coraggio i più grandi pericoli per comprimere la minorità che voleva ristabilire il regime del terrore. Il direttorio gli affidò nel 1796 alte funzioni amministrative, ma egli diede la sua dimissione come avvenne il 18 Fruttidoro dell' anno V (1797); l' anno seguente fu eletto membro del corpo legislativo. Dopo il 18 Brumale (1799) divenne membro del senato conservatore, e morì a Parigi il 29 Dicembre 1800. Era membro dell' Istituto nazionale fino dalla formazione di quella Società, e fu a lui sostituito Leveque.

Ecco l' elenco delle opere pubblicate di Cousin: I *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, Parigi, 1777, 2 vol in-8; ristampate col titolo di *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, deuxième édition*, Parigi, 1796, 2 vol. in-4; II *Introduction à l'étude de l'astronomie physique*, Parigi, 1787, in-4; III *Traité élémentaire de physique*, Parigi, anno III, in-8 di 8 e 144 pagine; l' autore l' aveva composto in prigione; IV *Traité élémentaire de l' analyse mathématique*, Parigi 1797, in-8; V Si trovano di Cousin diverse memorie negli *Acta Academiae electoralis Moguntinae scientiarum quae Erfurti est.*

COWPER (Spencer), nato a Londra nel 1713 e morto il 25 Marzo 1774 nel suo decanato di Durham. Versatissimo nelle matematiche, scrisse un profondo *trattato di geometria*, sommamente stimato in Inghilterra; egli però è più conosciuto per le sue tavole della luna chiamate *Tabulae dunelmenses* (Tavole di Durham), ed inserite nel suo libro intitolato: *A Treatise on the parallactic angle, ec.* Londra 1766, in-4.

CRAIGE o meglio CRAIG (Giovanni), geometra scozzese, si è reso celebre per la pubblicazione di parecchie opere importanti, concernenti le matematiche, ma nessuno de' suoi biografi ha potuto indicare nè il luogo nè la data della sua morte. Cominciò a farsi un nome nella scienza verso la fine del XVII secolo, facendo conoscere il primo, in Inghilterra, assai imperfettamente però, il calcolo differenziale, quale era stato immaginato da Leibnitz. Egli se ne valse in un *Trattato sulla quadratura delle curve*, che pubblicò nel 1685, un anno dopo che Leibnitz ebbe annunziata la sua scoperta negli *Atti di Lipsio*. Newton, che possedeva da lungo tempo il calcolo delle flussioni, del quale la sostanza è la stessa, ma la forma meno comoda, l' occultava diligentemente: quindi, nella discussione che insorse sul vero inventore del calcolo degl' infinitamente piccoli, è una circostanza degna di osservazione che tal calcolo sia stato portato dal continente nell' Inghilterra, dove l'amor proprio nazionale ne ha reclamato con esclusiva la proprietà, dopo avere tributato non pochi elogj all' opera di Craig; del

resto esamineremo altrove questa questione, che oggigiorno però non ha che un interesse secondario. Giovanni Bernoulli ha vivamente criticato un'altra opera di Craig sul *Calcolo delle fluenti*, ch' ei pubblicò in seguito, e che è scritta colla notazione di Newton e colle idee di quell'illustre geometra. Questo trattato, poco notabile anco pel suo autore, è oggi affatto dimenticato. In un secondo trattato sulla quadatura delle curve e sui luoghi geometrici, pubblicato nel 1694, fece parecchie utili osservazioni sulla costruzione delle sezioni coniche.

Giovanni Craig si è peraltro acquistata una gran celebrità per la produzione di una teoria estremamente rimarcabile, ma che presenta all' immaginazione qualche cosa di bizzarro. Egli volle applicare il calcolo algebrico alla teologia, ricercando quale doveva essere l'indebolimento delle prove storiche, secondo la distanza dei luoghi e l' intervallo del tempo. Noi non crediamo di dover qui esporre il risultato delle sue ricerche. Riconoscendo che Craig ignorava i veri principj del calcolo delle probabilità, un dotto matematico ha pensato che l'applicazione di questo calcolo alla verità delle testimonianze è un bellissimo argomento. Nello stato attuale della scienza noi non possiamo nè essere a parte di questa opinione, nè ammettere come una realtà scientifica un' ipotesi ingegnosa, alla quale nessun lavoro posteriore ha potuto dare ancora quel grado di certezza matematica che le sarebbe necessario. Del resto l' opera di Craig eccitò lo zelo dei teologi protestanti, e sembra essere stata sepolta sotto il peso di voluminose confutazioni. Si trova nelle *Transazioni filosofiche* e negli *Acta eruditorum* di quel tempo un gran numero di memorie di cui Craig è l' autore: questo geometra ha pubblicato inoltre separatamente le opere seguenti: I *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum, quadraturas determinandi*, Londra, 1685, in-4; II *Tractatus mathematicus de figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis*, Londra, 1693, in-4; III *Theologiae christianae principia mathematica*, Londra, 1699, opuscolo di 36 pag. in-4. G. Daniele Titius ne pubblicò una nuova edizione in-4 nel 1755 a Lipsia, con una confutazione dell' opera ed una notizia sull' autore; IV *De calculo fluentium libri duo, quibus subjunguntur libri duo de optica analytica*, Londra, 1718, in-4.

CRAMER (Gabriella), distinto geometra, membro dell' Accademia di Berlino, della Società Reale di Londra, dell' Istituto di Bologna, nacque a Ginevra il 31 Luglio 1704. Di buon' ora si diede allo studio delle parti più elevate delle matematiche, cosicchè potè contrastare con onore a Calandrini, in un concorso e nell'età di soli venti anni, la cattedra di filosofia di Ginevra. Il suo concorrente, che era pure suo amico, prevalse, ma Cramer aveva sostenuto la disputa con tal distinzione che il consiglio della repubblica istituì nel 1724 una cattedra di matematiche nella quale questi due generosi rivali, la cui amicizia non si era punto alterata per tal gara, furono incaricati di dar lezione a vicenda. Gabriele Cramer si era pure fatto conoscere precedentemente per alcune tesi sul *suono*, che gli avevano meritato l' approvazione dei dotti di quel tempo. Il giovine geometra era di una salute delicata, che il suo ardore per lo studio non aveva fatto che indebolire; lasciò Ginevra nel 1727 e si pose a viaggiare nella speranza di ristabilirsi. Ma si fermò tosto a Basilea, ove seguì con fervore le lezioni di Giovanni e di Niccolò Bernoulli, che non tardarono a distinguerlo tra i loro discepoli e ad accordargli la loro amicizia. Percorse quindi l' Inghilterra e la Francia, e dappertutto le sue cognizioni elevate e l' amenità del suo carattere gli procacciarono numerosi amici. Al suo ritorno in patria, si rimise allo studio con nuovo ardore, e parve che ambisse la gloria degli uomini celebri che aveva avuto l' occasione di conoscere, coltivando nel tempo stesso tutte le scienze. L' opera che ha consacrato la celebrità di Cramer è quella che egli intitolò modestamente: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Ginevra, 1750, in-4. Questo

libro è noto a tutti i matematici. La teoria generale delle linee curve aveva già occupato il celebre Eulero, che ne aveva trattato nella sua *Introductio in analysin infinitorum* con quella potenza d'ingegno e con quella generalità di vedute che caratterizzano tutte le sue produzioni. Ma era necessario che questo argomento fosse trattato in un'opera speciale con tutti gli sviluppi che esso comporta, e presentato sotto una forma più elementare. Queste due opere hanno per così dire fermato il termine della teoria delle curve, distogliendo i geometri da ricerche più curiose che utili, le quali non si potevano mai esaurire ed in cui bastava di avere un filo per condursi. Quantunque sopra uno stesso argomento, i metodi de' due geometri sono abbastanza differenti per dire che Cramer abbia fatto prova di originalità ne' suoi. Il suo libro assai più voluminoso della parte, cui Eulero ha consacrato alle curve nel suo, è notabile ancora per esempj numerosi e bene scelti, e le cose che nell'appendice si contengono sull'eliminazione sono importanti per la storia della scienza.

Oltre ad avere scritte varie memorie che si leggono negli Atti delle Accademie di Berlino e di Pietroburgo, Cramer diede molte cure alle edizioni delle opere di Giovanni e di Giacomo Bernoulli, e del *Commercium epistolicum Leibnitzii et Bernoulli*, raccolta preziosa per rintracciare i progressi dello spirito umano nelle scienze matematiche. Nel 1731 ottenne il primo *accessit* del premio proposto dall'Accademia delle Scienze di Parigi sulla causa dell'inclinazione delle orbite planetarie, premio che fu riportato da Giovanni Bernoulli. Nel 1750, la reputazione che aveva meritata Cramer lo fece nominare, senza concorso, alla cattedra di filosofia che nella sua giovinezza aveva disputata ad un formidabile e fortunato concorrente. Ma i suoi numerosi lavori avevano di nuovo alterata la sua salute; egli morì a Bagnols, ove si era portato per respirare un'aria più pura, nel 1752, in età appena di 48 anni. Una nota non poco estesa delle opere di Cramer si trova nell'*Histoire de Genève* di Sénebier.

CRATISTO, geometra greco della scuola di Platone. Il suo nome si trova tra quelli di cui Proclo ci ha conservata la memoria nel suo commento sopra Euclide. Il nome di Cratisto rammenta una particolarità assai rara: secondo Proclo, questo geometra non aveva quasi studiato, ma la sua penetrazione nella geometria era tanto straordinaria, che sarebbesi detto che tale scienza era in lui quasichè innata: esso infatti poteva risolvere colla massima facilità, per mezzo della sua geometria naturale, i problemi che più imbarazzavano i matematici del suo tempo. Quindi Montucla chiamò Cratisto il Pascal dell'antichità.

CREPUSCOLARE (*Astron.*). Si chiama *circolo crepuscolare* un circolo minore paralello all'orizzonte ed abbassato al di sotto di esso di 18 gradi sessagesimali. Questo circolo è il limite dei crepuscoli.

CREPUSCOLO (*Astron.*). Luce che si spande nell'atmosfera, qualche tempo prima del levare del sole e qualche tempo dopo il suo tramonto.

La causa di questo fenomeno è la refrazione dei raggi luminosi prodotta dall'aria atmosferica. Noi ne daremo la spiegazione e la teoria all'articolo Rafrazione.

CRISOCOCCETE (Giorgio), medico celebre per le sue cognizioni nelle lingue e nelle scienze matematiche, fioriva a Costantinopoli verso la metà del secolo XIV. Ha composto in greco un trattato sull'astronomia dei Persiani. Tale opera si conserva manoscritta nella biblioteca di Parigi, che possiede inoltre un trattato dello stesso autore sul modo di trovare le sizigie per tutti i mesi dell'anno. Boulliaud nella fine della sua *Astronomia filolaica* ha pubblicato la prefazione e le tavole dell'astronomia persiana, ove si leggono alcune curiose particolarità sul modo col quale Crisococcete giunse ad ottenere le notizie che si trovano nel suo trattato. Comunque però sia di tali particolarità, andiamo debitori a Crisococcete

di non poche cognizioni interessanti sull'astronomia dei Persiani; ma, comunicandoci le tavole de' loro astronomi, sembra che non ne abbia perfettamente compresa la costruzione, o almeno non si è egli espresso con sufficiente chiarezza. Si ha un sommario della sua opera nel terzo volume dei *Geografi minori* di Hudson. La biblioteca di Madrid ha un' opera manoscritta di Crisococcete sulla costruzione dell' astrolabio, e la biblioteca del Vaticano possiede un bel manoscritto dell' Odissea con chiose, copiato da Crisococcete e colla data del 1336.

CRISOLOGO (Natale Angera, più noto sotto il nome di *Padre*), nato a Gy nella Franca Contea, l' 8 Dicembre 1728, entrò giovine ancora nell' ordine dei Cappuccini. La disposizione che manifestò per gli studj geografici determinò i suoi superiori ad inviarlo a Parigi, ove frequentò le lezioni di astronomia del celebre Lemonnier. Avendo avuto occasione di convincersi dell' imperfezione dei planisferi celesti di cui aveva dovuto servirsi, ne formò uno da sè stesso, che poi pubblicò nel 1778 coll' approvazione dell' Accademia e sotto il suo privilegio. Tale planisfero, disegnato sull' equatore, è in due grandi fogli, e vi si vedono le 900 stelle del *Coelum australe stelliferum* di La Caille, sebbene, per le insinuazioni di Lemonnier nemico di quest' ultimo, non vi abbia disegnato le figure delle quattordici nuove costellazioni australi. In seguito fece comparire altri planisferi di diverse grandezze e sopra diversi orizzonti con particolarizzate istruzioni sul modo di valersene. Ma il suo capo lavoro è un *Mappamondo* delineato sull' orizzonte di Parigi, del quale niun altro ancora è stato pubblicato più perfetto. Il p. Crisologo ha pubblicato ancora una eccellente carta della Franca Contea, una memoria sul barometro, ed uno scritto sulla teoria della superficie attuale della terra, del quale Cuvier ha fatto grandi elogi, in un rapporto presentato all' Istituto. Morì a Gy a' dì 8 Settembre 1808. Per maggiori notizie si ricorra alla *Biografia universale*.

CRIVELLI (Giovanni), geometra e fisico distinto, nacque a Venezia il 20 Settembre 1691. Dopo aver compito i suoi studj nel seminario ducale sotto i padri Somaschi, prese in età giovanissima l' abito de' suoi maestri, professò rettorica e filosofia, e quindi fu nominato rettore del seminario patriarcale di Murano. Senza trascurare la cultura delle lettere, dedicossi più particolarmente alle scienze e divenne profondo nelle matematiche. Prese molta parte della celebre discussione sulla misura delle forze vive, e pubblicò su tale argomento una memoria nel *Gran Giornale dell' Europa* (1726), che gli meritò giusti elogi nel *Giornale de' Letterati* allora diretto da Apostolo Zeno e gli procacciò l' amicizia del celebre abate Conti. Cominciò allora tra il Crivelli ed il Conti, che a' suoi dì poteva considerarsi il Mersenne italiano, una corrispondenza sopra argomenti scientifici, ed una lettera dottissima del Crivelli, che si legge nella raccolta intitolata: *Scelte lettere di celebri autori all' abate Antonio Conti*, pubblicata a Venezia nel 1810 dall' abate Bettio, fa rincrescere che non sia stato fatto di pubblico diritto tutto questo commercio epistolare. Nel 1728 pubblicò gli *Elementi d' aritmetica numerica e letterale*; quest' opera, lodatissima negli *Atti di Lipsia*, divenne allora il libro di testo in tutte le scuole d' Italia, e fu tradotta in latino dall' autore nello stesso anno, dietro il voto generale che glie ne fu espresso. Nell' anno appresso pubblicò i suoi *Nuovi elementi di geometria*, ove la chiarezza si trova unita alla concisione, e che accolti non meno favorevolmente furono del pari tradotti in latino. Nel 1731 comparvero i suoi *Elementi di fisica*, Venezia, 2 vol. in-4, che posero il colmo alla di lui riputazione. Per giudicare con qual favore furono ricevuti, si legga l' elogio che ne fu fatto negli *Atti di Lipsia*, Tomo II del *Supplemento*, pag. 459.

Elevato dai suoi confratelli alla dignità di provinciale, il Crivelli ricevette nello stesso tempo i contrassegni della stima dei dotti più celebri del suo tempo,

che al suo giudizio sottoponevano le più ardue questioni di fisica e di geometria. Accolto come socio corrispondente nelle Accademie di Bologna e di Berlino e nella Società Reale di Londra, venerato e rispettato dal ceto più alto de' suoi concittadini, pareva che nulla dovesse turbare la sua vita ad un tempo pacifica e gloriosa; quando, tutto ad un tratto, e senza che se ne sia potuto penetrare il motivo, fu nel 1740 spogliato delle sue dignità, e rinchiuso nel convento di S^a. Maria della Salute, ove morì il 14 Febbrajo 1743, in età di cinquantadue anni. Trascurando di parlare degli scritti puramente letterarj del padre Crivelli, le altre sue opere relative alle matematiche sono: *Algoritmo, ossia Metodo di determinare le quantità espresse colle cifre numeriche e colle lettere*, Venezia, 1739, in-8. Una seconda edizione, con molte aggiunte e variazioni, de' suoi *Elementi di fisica*, Venezia, 1744, 2 vol., in-4, alla quale l'editore ha unito due dissertazioni sopra i problemi di Diofanto, che il p. Crivelli aveva già pubblicate nella *Raccolta* del Calogerà. In tale *Raccolta* si leggono pure del Crivelli due altre dissertazioni, una delle quali *sulla misura delle forze vive*, e l'altra *sulle leggi del moto*. Tra i suoi manoscritti lasciò pure dei trattati *sui luoghi geometrici*, *sulla quadratura delle curve*, *sul calcolo integrale*, ec. Il suo elogio è stato scritto dal suo confratello il padre Bernardo, e si legge nella raccolta calogeriana, e nella citata seconda edizione degli *Elementi di fisica*.

CRIVELLO (*Aritmetica*). Nome dato da Eratostene ad un metodo da lui inventato per determinare i *numeri primi*.

Questo metodo consiste nell'escludere dalla serie dei numeri naturali 1, 2, 3, 4.... tutti quelli che hanno dei divisori; i numeri che restano sono allora numeri primi.

Dopo avere scritto gli uni accanto agli altri i numeri naturali, si sopprimono primieramente tutti i *numeri pari*, perchè ad eccezione del 2, tutti gli altri hanno questo stesso numero per divisore, e non possono per conseguenza esser primi; così non rimane da considerarsi che la serie dei numeri impari.

3	5	7	$\overline{9}$	11	13	$\overline{15}$	17
19	$\overline{21}$	23	$\overline{25}$	$\overline{27}$	29	31	$\overline{33}$
$\overline{35}$	37	$\overline{39}$	41	43	$\overline{45}$	47	$\overline{49}$
$\overline{51}$	53	$\overline{55}$	$\overline{57}$	59	61	$\overline{63}$	$\overline{65}$
67	$\overline{69}$	71	73	$\overline{75}$	$\overline{77}$	79	$\overline{81}$
83	$\overline{85}$	$\overline{87}$	89	$\overline{91}$	$\overline{93}$	$\overline{95}$	97
$\overline{99}$	101	103	$\overline{105}$	107	109	$\overline{111}$	113
$\overline{115}$	$\overline{117}$	$\overline{119}$	$\overline{121}$	$\overline{123}$	$\overline{125}$	127	$\overline{129}$
131	$\overline{133}$	$\overline{135}$	137	139	$\overline{141}$	$\overline{143}$	$\overline{145}$
$\overline{147}$	149	151	$\overline{153}$	$\overline{155}$	157	$\overline{159}$	$\overline{161}$
163	$\overline{165}$	167	$\overline{169}$	$\overline{171}$	173	$\overline{175}$	$\overline{177}$
179	181	$\overline{183}$	185	$\overline{187}$	$\overline{189}$	191	193
$\overline{195}$	197	199	$\overline{201}$				

Ora, per escludere tutti i numeri che hanno 3 per divisore, si vede facilmente che, ciascun numero di questa serie superando di due unità quello che lo precede, il *primo* numero dopo 3 è $3+2$, il *secondo* è $3+2\times2$, e il *terzo* è $3+3\times2$; questo terzo numero sarà dunque divisibile per 3, come lo saranno pure tutti gli altri numeri che si succederanno di tre in tre posti. Così, nella serie superiore, si trova sempre un multiplo di 3 dopo due numeri che non lo sono, per conseguenza possiamo escluderli facilmente segnando con una linea i numeri che si succedono di tre in tre nella serie dopo il 3.

Prendendo ora il 5 per divisore, tutti i numeri divisibili per 5 saranno situati in modo che tra due di essi i più prossimi ve ne saranno quattro non divisibili per 5; è questa pure una conseguenza necessaria dell'accrescimento costante 2 dei numeri della serie. Si segnerà dunque con una linea ogni quinto numero dopo il 5, come 15, 25, 35, ec.

Prendendo quindi il 7 per divisore, si avranno sei numeri intermedj non divisibili per 7; così, segnando ogni settimo numero dopo il 7, si escluderanno tutti i numeri divisibili per 7.

Giunti al 9, è inutile il fare la stessa operazione, poichè il 9 essendo già segnato, tutti i numeri che dopo di esso si succedono di nove in nove sono anch'essi segnati necessariamente: si continuerà dunque a fare l'operazione pel divisore 11, e si segneranno tutti i numeri che di undici in undici vengono dopo di lui e che sono suoi multipli.

Proseguendo l'operazione, è chiaro che tutti i numeri che precedono quello al quale si giunge come ultimo divisore, e che non sono segnati, sono numeri primi. In tal modo si trova che i numeri primi al di sotto di 201 sono:

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199.

Questo metodo è ancora uno dei più spediti che siano stati trovati fino a questo giorno per la determinazione de' numeri primi. *Vedi* Numeri primi.

CROCE (*Astron*). Nome che qualche volta è stato dato alla costellazione del Cigno.

CROCE AUSTRALE (*Astron.*). Costellazione meridionale che comprende 17 stelle nel *Coelum australe stelliferum* di la Caille. I piloti trovano il polo sud per mezzo di quattro stelle che fanno parte di questa costellazione. Essa è stata formata da Royer. *Vedi* Costellazione.

CRONOLOGIA (Da χρονος, *tempo*, e λόγος, *discorso*). Scienza della misura o della divisione del tempo; essa si divide in due rami speciali che sono: la *cronologia teorica* e la *cronologia applicata*. La prima è una deduzione dell'astronomia, poichè è il risultato dell'osservazione de' fenomeni celesti, di cui questa scienza spiega le leggi; la seconda è un'applicazione agli umani avvenimenti di tale deduzione della scienza astronomica: come tale, essa forma la base essenziale della storia, ma noi non dobbiamo considerarla sotto quest'ultimo punto di vista.

Gli annali autentici di tutte le nazioni sono necessariamente posteriori alla prime osservazioni dell'astronomia, che dovettero aver per oggetto la divisione del tempo in periodi determinati. Così, per esempio, prima che fosse stata calcolata la durata dell'*anno* secondo il corso apparente del sole, o secondo le fasi della luna, che fosse stato quindi diviso l'anno in *mesi*, e divisi i mesi in un

certo numero di *giorni*, sembra difficile che gli uomini abbiano potuto conservare in un modo esatto la memoria delle cose passate. Questo lavoro ha dovuto cominciare dalla determinazione dei periodi i meno lunghi. Così lo spazio di tempo che scorre dal levare o dal tramonto del sole ad un altro levare o tramonto dello stesso astro ha verisimilmente servito di unità di misura per la fissazione di periodi più lunghi. I tempi che hanno preceduto o seguito le prime produzioni della scienza possono logicamente dividersi in tempi incerti e in tempi storici. Non ostante, adottando anco questo punto di partenza, regna oggigiorno una grande incertezza nella cronologia; le dissidenze di cui essa è la causa, le aberrazioni mostruose che essa ha generato, provengono ad un tempo e dalla diversità dei metodi che adottarono le nazioni più anticamente civilizzate, e dall' impossibilità in cui siamo di determinare con certezza il vero senso delle espressioni di cui esse si servivano per esprimere i periodi che noi chiamiamo, *anni*, *mesi* e *giorni*. Il fine che deve proporsi la scienza, ora che essa è al possesso della cognizione indubitata di alcuni grandi avvenimenti, che, combinati con osservazioni astronomiche esattissime, possono determinare in un modo invariabile le epoche principali, è evidentemente quello di stabilire una concordanza matematica tra le cronologie di tutti i popoli. Ad onta però di numerosi e stimabili lavori, quest' opera è appena cominciata.

Abbiamo esposto altrove (*Vedi* Anno e Calendario) la storia e la teoria degli elementi della cronologia; non ci resta ora che a far conoscere diverse parti di questa scienza che non dovevano entrare nelle considerazioni generali che erano l' oggetto principale di quegli articoli: esse saranno successivamente trattate nel corso di quest' opera. *Vedi* Eaa *degli Armeni*, *Cristiane*, *di Costantinopoli*, *di Spagna*, *dell' Egira*, *di Nabonassar*, *ec.*, Emerologia, Giorno, Mese, Olimpiade, Periodo.

CRONOMETRO (Da χρόνος, *tempo*, e μέτρον, *misura*). Nome generico degli strumenti che servono a misurare il tempo. È più particolarmente consacrato ad una specie di orologio costruito con molta precisione, per dare esattamente le suddivisioni di un secondo. Se ne fa uso in mare per trovare le longitudini. *Vedi* Longitudine.

CROUSAZ e non CROUZAS (Giovanni Pietro de), nato a Losanna il 13 Aprile 1663, si diede allo studio delle lettere, ma nel tempo stesso si applicò alle matematiche e fu ardente propugnatore della filosofia di Descartes. Dopo varj viaggi, tornato essendo in patria, fu successivamente pastore, professore di filosofia e rettore dell' Accademia. Nel 1724 fu chiamato a Groninga per insegnarvi le matematiche, e nel 1725 fu fatto socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Parigi. Morì il 22 Marzo 1750. Delle molte sue opere non citeremo che le seguenti: I *Géométrie des lignes et surfaces rectilignes et circulaires*, Amsterdam, 1718, 2 vol. in-8; II *Commentaires sur l' analyse des infiniment petits de l' Hôpital*, in-4; III *Traité d' algèbre*, in-8. Si hanno di lui ancora parecchie memorie inserite negli *Atti* dell' Accademia di Bordeaux della quale era membro. Si veda il suo elogio scritto da Fouchy nella *Storia* dell' Accademia delle Scienze di Parigi, 1750, pag. 779.

CTESIBIO, meccanico celebre di Alessandria, ma verisimilmente d'origine greca, fioriva in Egitto sotto il regno di Tolomeo Evergete II verso la CLXIV Olimpiade (circa 124 anni avanti Gesù Cristo). Era figlio di un barbiere, del quale egli stesso dovè esercitare la professione. Posto in tale oscura condizione, che sembrava dovergli chiudere ogni accesso alla scienza, non fu debitore che al solo suo ingegno de' suoi talenti e della sua celebrità. Dietro quello che ci vien narrato da Vitruvio, che ci ha conservato parecchie particolarità relative a quest'uomo straordinario, occupandosi egli un giorno nella bottega di suo padre dei do-

veri del suo stato, osservò che i contrappesi di uno specchio mobile, scorrendo nel tubo che gli conteneva, producevano un suono prolungato in forza della pressione dell'aria. Questa osservazione gli suggerì l'idea degli organi idraulici dei quali si è fatto ancora uso ne' tempi moderni. Su questo principio fabbricò una specie di vaso a forma di tromba in cui l'acqua che vi si gettava rendeva un suono strepitoso. Tale strumento parve tanto maraviglioso, che i suoi concittadini lo consacrarono nel tempio di Venere Zefiride. Fece quindi un gran numero di invenzioni. Fra le ingegnose produzioni meccaniche di Ctesibio, di cui Vitruvio ci ha lasciata la descrizione, si cita particolarmente una clepsidra, ossia orologio meccanico assai ingegnoso e molto complicato, che indicava le ore di notte e di giorno per mezzo di un indice mobile sopra una colonna. Gli si attribuisce pure l'invenzione della tromba aspirante e premente che porta anche oggigiorno il suo nome. Si sa che questa macchina è composta di due stantuffi che si muovono alternativamente, in modo che mentre uno di essi sale ed aspira, l'altro scende premendo l'acqua e la fa penetrare in un tubo comune. Il cavalier Morland, celebre meccanico dell'ultimo secolo, ed al quale si debbono importanti ricerche sull'elevazione delle acque, si è occupato moltissimo a perfezionare questa tromba, il cui meccanismo semplicissimo può produrre non ostante dei grandi vantaggi. Un altro scrittore dell'antichità, Filone di Bisanzio, attribuisce ancora a Ctesibio l'invenzione non meno ingegnosa di uno strumento assai somigliante al fucile a vento: era esso un tubo dal quale l'aria fortemente compressa scagliava un dardo. Il trattato che aveva composto sulle macchine idrauliche non è giunto fino a noi. Ctesibio aveva una moglie chiamata Taide, che possedeva estese cognizioni in questa parte di meccanica. Vitruvio, Plinio, Ateneo ed altri scrittori celebri dell'antichità parlano con la più grande ammirazione dei talenti e delle opere di Ctesibio. Egli fu eguagliato, se non superato, da Erone l'antico, che secondo alcuni biografi fu suo figlio, ma che certamente è stato suo discepolo.

CUBATURA DEI SOLIDI (*Geom.*). Metodo per misurare il volume dei corpi.

Allorquando i corpi proposti sono *solidi di rivoluzione*, vale a dire, quando possiamo concepirli generati dalla rivoluzione di una superficie piana intorno di un asse, il problema per determinare il loro volume dipende da una formula differenziale semplicissima, la deduzione della quale non presenta veruna difficoltà.

Sia infatti un solido $mCDy$ (*Tav.* LXXXV, *fig.* 6) formato dalla rivoluzione dell'area mistilinea $mAxy$, intorno della retta BX; se l'ascissa $Ax = x$ riceve un accrescimento $xx' = z$, quest' ascissa diverrà $x+z$, e il solido di rivoluzione $mCDy$ si aumenterà del corpo generato dalla rivoluzione del trapezio mistilineo $xyy'x'$ intorno del medesimo asse BX. Premesso ciò, se concepiamo z come *infinitamente piccola*, ovvero come la differenziale di x, allora l'arco infinitamente piccolo yy' sarà l'*elemento* della curva my, il trapezio $xyy'x'$ sarà l'*elemento* dell'area $mAxy$, e il solido $yy'ED$, l'*elemento* del corpo $mCDy$. Si tratta di trovare l'espressione di quest' ultimo elemento. Ora il trapezio $xyy'x'$ può considerarsi come un rettangolo la di cui rivoluzione produce un cilindro di un'altezza dx e di una base che ha per raggio l'ordinata $xy = y$; il volume di questo cilindro sarà perciò (*Vedi* CILINDRO)

$$\pi y^2 dx$$

π esprimendo il numero 3,1415926 . . . . . ossia il rapporto del raggio alla semi-circonferenza. *Vedi* CIRCOLO.

Ma questa quantità rappresentando l'*elemento* o la differenziale del solido, il suo integrale sarà il volume cercato, e V indicando questo volume, avremo

$$V = \int \pi y^2 dx \ldots\ldots (1).$$

Per arrivare a quest' espressione, non abbiamo adoprato punto i processi del *calcolo dei limiti*, che ancora adesso si pretende di sostituire al *calcolo differenziale*, come più rigoroso, quantunque non sia che un metodo indiretto che in altra parte valuteremo, e di cui accuratamente abbiamo evitato di servirci nei nostri precedenti articoli. È vero che questa sarà una nuova occasione da aspettarci, per parte di un gran geometra, l' accusa di non essere all'altezza delle matematiche moderne; ma, se abbiamo la disgrazia di non conoscere le scoperte delle quali il sig. Poncelet ha senza dubbio arricchito la scienza, e che gli hanno meritato il titolo di membro dell' istituto, scoperte che avremmo inserite nel nostro dizionario se le ricerche che ne abbiamo fatte fossero state più fortunate, non profitteremo però di questa circostanza per renderle la sua innocente accusa, il che d'altra parte sarebbe troppo facile al giorno d'oggi per sperarne la più piccola gloria; e preferiamo di aspettare i lavori futuri di questo accademico che verun risentimento non potrà impedirci di porre accanto degli Eulero e dei La Grange, se egli vuole somministrarcene l' occasione. Gli domandiamo solamente di usare della medesima generosità verso di noi e di sospendere il suo giudizio sopra la nostra opera fino al momento che essa sia terminata. Quanto ai nostri lettori, i motivi della nostra preferenza per i processi semplici, diretti e *rigorosi* del calcolo differenziale, propriamente detto, ai processi complicati e indiretti del calcolo dei limiti, gli saranno sufficientemente resi palesi agli articoli Calcolo differenziale e Calcolo dei limiti.

Riprendiamo la formula (1) ed applichiamola ad alcuni casi particolari.

I. *Determinare il volume dell' ellissoide allungata.*

Questo solido essendo formato dalla rivoluzione di una semi-ellisse intorno del suo grand' asse, l' equazione della curva generatrice, riportata al centro, è

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

a essendo il semi grand' asse, e b il semi piccolo asse.

Sostituendo questo valore di y^2 nell' equazione (1), si otterrà

$$V = \int \pi \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx,$$

e integrando

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Per determinare la costante C, osserveremo che quando il valore di $x = -a$ l' integrale è nullo perchè la curva si riduce allora ad un sol punto, avremo perciò

$$C = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2}{3} a^3$$

e quindi,

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} a^3\right).$$

Se in quest' espressione, facciamo $x = a$ per avere l' integrale definito compreso fra i limiti $x = -a$ e $x = a$, troveremo

$$V = \pi \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{4}{3} a^3.$$

Digitized by Google

ovvero, ciò che equivale al medesimo,

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2,$$

tale è il volume dell'ellissoide allungata.

Se si avesse $a = b$, l'ellisse diverrebbe un circolo, e questo volume sarebbe quello della sfera. In questo caso, si ha

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Donde si vede che il volume della sfera è eguale ai $\frac{2}{3}$ di quello del cilindro circoscritto, poichè il volume di un cilindro che ha per raggio della sua base a, e per altezza $2a$ è

$$\pi a^2 \times 2a = 2\pi a^3.$$

II. *Determinare il volume della paraboloide di rivoluzione.*

L'equazione della parabola riportata al vertice essendo

$$y^2 = 2px$$

nella quale $2p$ è il parametro; se si sostituisce nell'equazione (1), avremo

$$V = \int \pi 2px dx,$$

il di cui integrale è

$$V = \pi px^2 + C.$$

Il volume essendo nullo al vertice, ove abbiamo $x = 0$, per determinare la costante si ha l'equazione $0 = 0 + C$, donde $C = 0$, così, l'integrale completo è

$$V = \pi px^2.$$

Possiamo mettere quest'espressione sotto la forma

$$V = 2\pi px . \frac{x}{2},$$

ovvero

$$V = \pi y^2 . \frac{x}{2}$$

sostituendo invece di $2px$ il suo valore y^2. Ma πy^2 è l'area di un circolo di cui y è il raggio (*Vedi* Circolo, n.° 42), e per conseguenza $\pi y^2 x$ rappresentando il volume del cilindro, avente πy^2 per base, e x per altezza, vale a dire del cilindro circoscritto; così la paraboloide di rivoluzione è eguale in volume alla metà del cilindro circoscritto.

La cubatura della paraboloide trova la sua applicazione nel calcolo dell'escavazione prodotta dal getto delle miniere.

Per i solidi che non sono di rivoluzione. *Vedi* Volume

CUBICO (*Aritm.*). Un *numero cubico* è un numero formato dall'elevazione di un altro numero alla terza potenza, per esempio 8 è un numero cubico, perchè $8 = 2^3$.

Potenza cubica, è la medesima cosa che la *terza potenza*, come *radice cubica*, *radice terza* sono espressioni sinonime.

Un' equazione cubica è egualmente un' equazione del *terzo grado*. Vedi per la formazione delle potenze cubiche la parola Potenza, e per l'estrazione delle radici cubiche, quella estrazione delle radici. In questo punto non ci occuperemo che dell' *equazioni cubiche* quantunque l' epiteto cubico, per indicare le equazioni del terzo grado sia molto antiquato.

Equazione cubica (*Alg.*). L' equazioni cubiche o del terzo grado, sono equazioni nelle quali la più alta potenza dell' incognita è al terzo grado. La loro forma generale è

$$x^3+Ax^2+Bx+C=0$$

che possiamo riportare a

$$x^3+px+q=0 \ldots\ldots (1),$$

facendo sparire il secondo termine. *Vedi* Trasformazione.

Per risolvere quest' equazione, facciamo $x=y+z$, y e z essendo due nuove incognite la di cui determinazione ci condurrà a quella di x; elevando al cubo avremo

$$\begin{aligned} x^3=(y+z)^3 &= y^3+3y^2z+3yz^2+z^3 \\ &= y^3+z^3+3yz(y+z) \\ &= y^3+z^3+3yzx, \end{aligned}$$

ovvero

$$x^3-3yzx-y^3-z^3=0.$$

Perchè quest' equazione sia identica coll' equazione (1), bisogna che si abbia

$$p=-3yz,$$
$$q=-y^3-z^3,$$

donde si ricava

$$yz=-\frac{p}{3} \ldots\ldots\ldots (2),$$

$$y^3+z^3=-q \ldots\ldots (3).$$

Tali sono le condizioni alle quali i valori di y e di z debbano adempire affinchè la loro somma dia un valore di x capace di soddisfare all' equazione (1). Ora elevando l' equazione (2) al cubo, si ha

$$y^3z^3=-\frac{p^3}{27},$$

donde

$$y^3=-\frac{p^3}{27z^3}.$$

Sostituendo questo valore di y^3 nell' equazione (3) si ottiene

$$z^3-\frac{p^3}{27z^3}=-q$$

che si riduce a

$$z^6-\frac{p^3}{27}=-qz^3,$$

ovvero

$$z^6+qz^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

equazione del sesto grado che possiamo abbassare al secondo, facendo $z^3=t$, il che dà

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0.$$

Le radici di quest'equazione che si chiama la *ridotta*, sono i valori di y^3 e di z^3, perchè questi valori sono simmetrici, e perchè prendendo dall'equazione (2) il valore di z^3 per sostituirlo nell'equazione (3), si sarebbe arrivati ad un'equazione identica con quest'ultima.

Risolvendola (*Vedi* Secondo grado) si ha

$$t=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

e per conseguenza

$$y^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},$$

$$z^3=-\frac{q^2}{4}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}};$$

a motivo di $x=y+z$, se ne conclude

$$x=\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}+\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\right]}$$

quest'espressione vien chiamata la *formula di Cardano*. *Vedi* Algebra, Cardano e Caso irriducibile.

La formula di Cardano sembrerebbe non dare che un solo valore per x, ma possiamo facilmente riportarla a farle esprimere le tre radici. Per quest'effetto, osserviamo che io generale, u essendo una quantità qualunque, si ha non solamente

$$\sqrt[3]{u^3}=u,$$

ma ancora

$$\sqrt[3]{u^3}=\alpha u \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{u^3}=\beta u$$

1, α, β indicando le tre radici cubiche dell'unità. Così rappresentando per M ed N le quantità comprese sotto i radicali cubici, i valori di y e di z sono

$$y=M,\quad y=\alpha M,\quad y=\beta M,$$

$$y=N,\quad z=\alpha N,\quad z=\beta N;$$

valori che essendo combinati due a due per formare $x=y+z$ daranno tutte le radici della proposta. È importante fare osservare che fra queste combinazioni, quelle che non soddisfanno alla condizione (2) $yz=-\frac{p}{3}$ debbono essere riget-

Digitized by Google

tate, e che non rimangono che le tre seguenti

$$x = M + N,$$
$$x = \alpha M + \beta N,$$
$$x = \beta M + \alpha N,$$

ciò che facilmente possiamo verificare.

Le tre radici cubiche dell' unità essendo

$$1, \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

quelle dell' equazione (1) sono definitivamente

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]}.$$

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} +$$
$$+ \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}.$$

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} +$$
$$+ \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]} \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}.$$

Per esaminare la natura delle radici date da quest' espressioni, basta di considerare il radicale quadrato

$$\sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}$$

il quale sarà reale o *immaginario*, secondo che la quantità sotto il segno sarà positiva o negativa. Ora, possiamo avere

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0, \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Nel primo caso la quantità sotto il segno essendo positiva, il radicale è una quantità reale, e per conseguenza le due espressioni

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

$$\sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)}\right]},$$

sono ancora quantità reali; così la prima radice, che si compone solamente del-

la somma di queste quantità, è reale. Quanto alle due altre radici esse sono evidentemente *immaginarie*, poichè il prodotto di quantità reali per quantità *immaginarie* non può essere che *immaginario*.

Nel secondo caso il radicale quadrato divenendo zero, i due radicali cubi sono reali, e la prima radice sola è ancora reale.

Nel terzo caso $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ essendo negativo, il che non può succedere che quando $\frac{p^3}{27}$ è negativo e maggiore di $\frac{q^2}{4}$, il radicale quadrato, e quindi, i due radicali cubi sono quantità complicate d'immaginari, il che dà alle tre radici una forma immaginaria, questo caso singolare è stato esaminato all'articolo Caso IRRIDUCIBILE.

Quando non vi è che una sola radice reale, possiamo ancora servirci delle funzioni trigonometriche con successo, per calcolare il suo valore più prontamente che eseguendo le estrazioni delle radici indicate nelle formule. Infatti, possiamo porre in generale

$$\frac{p^3}{27}=A.\tang\varphi,$$

A essendo una quantità qualunque e φ un arco determinato dalla relazione

$$\tang\varphi=\frac{p^3}{27A}.$$

Così per rendere la quantità sotto il radicale quadrato un quadrato perfetto, basta fare

$$\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}\tang^2\varphi,$$

poiche allora questa quantità diviene

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4}+\frac{q^2}{4}\tang^2\varphi,$$

che si può mettere sotto la forma

$$\frac{q^2}{4}+\frac{q^2}{4}.\frac{\sen^2\varphi}{\cos^2\varphi},$$

ovvero

$$\frac{q^2\cos^2\varphi+q^2\sen^2\varphi}{4\cos^2\varphi},$$

sostituendo invece di $\tang^2\varphi$, $\frac{\sen^2\varphi}{\cos^2\varphi}$ espressione che è la medesima.

Il radicale quadrato divirne perciò

$$\sqrt{\left[\frac{q^2(\cos^2\varphi+\sen^2\varphi)}{4\cos^2\varphi}\right]}=\frac{q}{2\cos\varphi}\sqrt{\left(\cos^2\varphi+\sen^2\varphi\right)}=\frac{q}{2\cos\varphi}$$

a motivo di $\cos^2\varphi+\sen^2\varphi=1$.

Così la prima radice prende la forma

$$x = \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} + \frac{q}{2\cos\varphi}\right]} + \sqrt[3]{\left[-\frac{q}{2} - \frac{q}{2\cos\varphi}\right]}.$$

Ma la relazione

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4}\tang^2\varphi$$

dà

$$\frac{q}{2} = \frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\tang\varphi}.$$

Sostituendo questo valore in quello di x, si ottiene dopo le riduzioni,

$$x = -2\cot 2\omega \cdot \sqrt{\frac{p}{3}},$$

l'arco ω essendo dato dalla relazione

$$\tang\omega = \sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi},$$

e l'angolo φ dalla relazione

$$\tang\varphi = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}}.$$

Se q fosse negativo, il valore di x diventerebbe positivo e si avrebbe

$$x = 2\cot 2\omega\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Nel caso di p negativo, ossia dell'equazione

$$x^3 - px + q = 0$$

un metodo simile a quello che abbiamo seguito di sopra ci condurrebbe alle tre equazioni

$$\sen\varphi = \frac{2}{q}\cdot\sqrt{\frac{p^3}{27}},$$

$$\tang\omega = \sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\varphi},$$

$$x = -\frac{2}{\sen 2\omega}\sqrt{\frac{p}{3}},$$

delle quali la terza diviene

$$x = \frac{2}{\sen 2\omega}\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}$$

quando q è negativo, ben inteso che in quest' ultime espressioni si ha

$$\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}.$$

Il seguente esempio servirà a far rilevare l' utilità dell' uso di queste formule. Sia

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

l' equazione proposta; paragonandola con la forma generale

$$x^3 - px - q = 0,$$

avremo $p = 2$, $q = 5$ e il valore di x dipenderà dalle tre espressioni

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\text{sen } 2\,\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$\text{tang } \omega = \sqrt[3]{\text{tang } \frac{1}{2}\varphi} \quad \ldots\ldots (2),$$

$$\text{sen } \varphi = \frac{2}{q}\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{p}{3q} \times 2\sqrt{\frac{p}{3}} \quad \ldots\ldots (3).$$

Sostituendo i valori di p e di q in quest' espressioni, avremo

$$\text{sen } \varphi = \frac{2}{15} \times 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

ed operando per mezzo dei logaritmi

$$\begin{array}{r} \text{Log } 2 = 0,3010300 \\ \text{Log } 3 = 0,4771212 \\ \hline 9,8239088 \end{array}$$

$$\text{Log } \sqrt{\frac{2}{3}} = 9,1195544$$

$$\begin{array}{r} \text{Log } 2 = 0,3010300 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Log } 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 0,2129844$$

$$\begin{array}{r} \text{Log } 2 = 0,3010300 \\ \hline 0,5140144 \\ \text{Log } 15 = 1,1760912 \\ \hline \text{Log sen } \varphi = 9,3379232. \end{array}$$

Il che dà $\varphi = 12^\circ\, 34'\, 33'',\, 2$. Prendendo la metà di φ, e cercando nelle tavole il logaritmo di tang $\frac{1}{2}\varphi$, si avrà

$$\text{Log tang } (6^\circ\, 17'\, 16'',\, 6) = 9,0421341$$

di cui il *terzo* è

$$\text{Log}\sqrt[3]{\text{tang}\,\frac{1}{2}\,\varphi}\,,\ \text{ovvero (2) tang}\,\omega = 9{,}6807114.$$

Quest'ultimo logaritmo fa conoscere $\omega = 25^\circ\ 36'\ 49'',5$ e $2\omega = 51^\circ,13,39''$. Sostituendo nell'equazione (1) i valori di p e di $a\omega$, si ha

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{\text{sen}\,(51^\circ\ 13'\ 39'')}.$$

Così, prendendo nei calcoli precedenti il logaritmo, digià trovato, del numeratore di quest'ultima espressione, il valore di x è dato dalla semplice sottrazione

$$\text{Log}\,2\sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}2129844$$

$$\text{Log sen}\,(51^\circ,13'\ 39'') = 9{,}8918933$$

$$\text{Log}\,x = 0{,}3210911$$

donde si conclude

$$x = 2{,}0945514.$$

Abbiamo in un altro articolo (*Vedi* Approssimazione) trattato l'equazione $x^3 - 2x - 5 = 0$, con processi ben differenti, e possiamo assicurarci, paragonando i calcoli, della superiorità di quest'ultimo metodo, sotto il rapporto della prontezza. Trovato in principio dal Bombelli, reso quindi più generale dal Viète, esteso da Alberto Girard al caso *irriducibile*, questo modo di risoluzione dell'equazioni cubiche non presenta altra difficoltà che la cura che bisogna portare nel calcolo delle caratteristiche dei logaritmi pel quale non bisogna allontanarsi dalle regole esposte alle parole Estrazioni delle radici e Logaritmi.

Costruzione dell'equazioni Cubiche. *Vedi* Costruzione.

Parabola cubica. *Vedi* Parabola.

Cubare *un solido*. *Vedi* Cubatura.

CUBO (*Geom.*). Corpo solido regolare, terminato da sei facce quadrate eguali fra loro. *Vedi* Esaedro.

CUGNOT (Niccolò Giuseppe), nato a Void, in Lorena, il 25 Febbrajo 1725, e morto a Parigi il 2 Ottobre 1804. Nella sua gioventù, militò in Germania in qualità d'ingegnere. Nel 1763, nojatosi della vita militare, si recò a Parigi ove intese a dare lezioni di fortificazione, arte ch'ei possedeva a fondo. Immaginò una nuova specie di fucile che dal maresciallo di Sassonia fu adottata per gli ulani. Nel deposito delle macchine di Parigi si conserva tuttavia un carro da lui inventato che si moveva per mezzo del vapore dell'acqua: tale carro, costruito per commissione del duca di Choiseul, ministro della guerra, non fu posto in uso a motivo della troppo grande violenza dei suoi movimenti, che impediva di potergli dare una direzione. I principali scritti di questo ingegnere sono: I *Fortification de campagne, ou traité de la construction, de la défense et de l'attaque des retranchements*, Parigi, 1769, in-12, opera assai pregiata, quantunque inferiore a quella di Clairac; è stata tradotta in tedesco, Berlino, 1773, in-8; Il *Théorie de la fortification, avec des observations sur les différens systèmes qui ont paru depuis l'invention de l'artillerie, et une nouvelle manière de construire des places*, Parigi, 1778, in-12.

CULMINANTE (*Astron*). Il punto *culminante* di un astro è quello della massi-

Digitized by Google

ma sua altezza al di sopra dell'orizzonte, la quale ha luogo quando l'astro passa pel meridiano.

CULMINAZIONE (*Astron.*). Chiamasi con tal nome in astronomia l'istante del passaggio di una stella o di un pianeta pel meridiano, cioè il punto della massima sua altezza al di sopra dell'orizzonte.

L'osservazione della culminazione degli astri non è utile soltanto per determinare la latitudine di un luogo della terra; essa serve pure negli osservatorj stabili per determinarne la differenza di longitudine: ma bisogna allora che l'astro che si osserva collo strumento dei passaggi abbia un moto proprio assai sensibile da occidente in oriente. Ora, la luna sola gode della proprietà di rendere esattissimo questo metodo, ed è appunto per mezzo della differenza degl'istanti del suo passaggio al meridiano di due luoghi che si ottiene la differenza della loro longitudine.

Se uno degli osservatorj è Parigi, e se L è la longitudine occidentale dell'altro osservatorio rapporto al primo, L espresso in tempo alla ragione di 15 gradi per ora esprimerà il *tempo sidereo* scorso tra i passaggi di una stessa stella al meridiano dei due osservatorj; e siccome in un intervallo di tempo sì breve l'ascensione retta apparente della stella rimane la stessa, così è evidente che si è dovuto contare la stessa ora siderea nelle due stazioni, sebbene in realtà siano scorse L ore sideree. Ma rapporto alla luna, il cui movimento proprio verso l'oriente è rapidissimo, il tempo sidereo scorso dal suo primo passaggio fino al secondo è necessariamente di $L+a$ ore, indicando con a la quantità di cui si è aumentata la sua ascensione retta espressa in tempo sidereo. Ciò posto, sia d gradi il movimento di quest'astro in ascensione retta durante un'ora di tempo vero, e sia m il movimento, parimente in ascensione retta, del sole durante lo stesso spazio di tempo; le quali due quantità sono date nell'almanacco intitolato: *La Connaissance des temps*; allora d e $15a$ essendo archi descritti dalla luna nei tempi siderei $1^{or}+m$ e $L+a$, si ha questa proporzione:

$$1^{or}+m : L+a :: d : 15a;$$

donde

$$d(L+a)=15a(1^{or}+m),$$

relazione dalla quale si deduce la differenza di longitudine

$$L=\frac{a}{\frac{1}{15}d}\left(1^{or}+m-\frac{1}{15}d\right).$$

Per esempio, il 25 Ottobre 1830, si sono osservati a Parigi e a Koenigsbergi passaggi dell'orlo occidentale della luna, e si è ottenuto:

A Parigi, ora media	6or 54′ 53″,04
A Koenigsberg.	6 52 5,90
Differenza in tempo medio	2 47,14
Riduzione a tempo sidereo . . . +	0,46
Differenza in tempo sidereo	2′ 47″,60 = 167″,6 = a.

La *Connaissance des temps* dà il movimento orario del sole $m=9''$,583; dunque $1^{or}+m=6'\ 9''$,58; dallo stesso almanacco si ha di più

Asc. ret. della luna il 25 a mezzogiorno	310° 0′ 40″
idem a mezzanotte	316 41 57
Differenza in 12 ore	6° 41′ 17″

Quindi in un'ora vera . . . . . $d = 33'\ 26'',42$

$$\frac{1}{15}d = 2'\ 13'',76$$

Fattore $1^{or} + m - \frac{1}{15}d = 57'\ 55'',82 = 3475'',82$.

Finalmente, operando per mezzo dei logaritmi, si ottiene

$$L = 43'\ 54'',97 = 1^{or}\ 12'\ 34'',97.$$

Tale è, dietro queste due osservazioni corrispondenti, la longitudine di Koenigsberg contata da Parigi. Si osserverà non ostante che il movimento in ascensione retta della luna non essendo rigorosamente proporzionale al tempo, come lo abbiamo supposto nel calcolare a, converrebbe per maggior precisione ricorrere al metodo d'interpolazione, nel quale si tien conto delle differenze seconde (*Vedi* Interpolazione); ma qui bastava di dare un'idea del modo di applicare le culminazioni lunari alla determinazione delle longitudini geografiche. Diremo nonostante che le culminazioni confrontate della luna e di una stella in due luoghi differenti offrono un mezzo anco più facile per ottenere esattamente la differenza di longitudine, poichè il calcolo essendo fondato unicamente sul tempo sidereo scorso tra i due passaggi in ciascuna stazione, ne segue che un piccolo errore nella posizione del canocchiale e nell'ora del pendolo non ha alcuna influenza sensibile sul risultato cercato. Su questo proposito si potrà consultare l'*Astronomie pratique* di Francoeur.

Se nell'esempio precedente l'osservazione dell'orlo della luna non fosse stata fatta a Parigi, vi si supplirebbe calcolando primieramente l'ora siderea del passaggio del centro di quest'astro a Parigi pel 25 Ottobre 1830, e correggendola quindi del tempo sidereo che il semidiametro impiega a passare al meridiano, tempo che è dato dall'espressione $\frac{r}{15 \cos D}$, ove D indica la declinazione della luna ed r il suo semidiametro; le quali due quantità si trovano nella *Connaissance des temps*.

CULTELLAZIONE (*Geod.*). Con questo nome s'indica quel modo di misurare la superficie di un terreno in pendio, projettandola per mezzo di perpendicolari sopra un piano orizzontale. Questa parola è tratta dalla voce latina *cultello* che significa *mettere in piombo*.

Sia, per esempio, il rettangolo ABCD (*Tav.* LXXXV, *fig.* 7), la cui superficie fa parte di quella di una piaggia; dopo avere abbassato da ognuno de' suoi angoli una perpendicolare sopra un piano orizzontale MO, il quadrilatero MTOP rappresenterà l'area veramente produttiva del rettangolo ABCD, e quale deve figurare nella carta topografica del paese.

Questo metodo non risulta solamente dalla impossibilità che s'incontrerebbe di fare accordare le diverse parti di un piano, di cui le une fossero state misurate nel senso orizzontale e le altre nel senso dei pendii del terreno, ma ancora dal essere stato riconosciuto e dimostrato in pratica che i prodotti della cultura di un terreno inclinato non possono esser maggiori di quelli che si otterrebbero sulla projezione orizzontale di questo terreno, perchè le piante crescono verticalmente. Si veda il *Traité d'arpentage* di Lefevre, e per tutti i dettagli teorici il *Traité de topographie* di Puissant.

CUNEO. *Vedi* Conio, Zeppa, Biatta.

CUNHA (Giuseppe Anastasio da), dotto matematico, nato a Lisbona nel 1744. Suo padre, architetto decoratore di teatro, gli diede alcune lezioni di disegno

e di prospettiva, e quindi lo inviò al collegio de' padri dell'Oratorio per apprendervi il latino. Quivi, essendogli caduti tra le mani gli *Elementi di geometria* del p. Tosca, il giovane da-Cunha si diede interamente allo studio di tal libro, e colla forza del solo suo ingegno, simile in questo a Pascal, seppe riempiere i vuoti e correggere le imperfezioni che l'autore lasciate aveva nella sua opera. Si perfezionò quindi nella geometria, che divenuta era il suo unico divertimento, leggendo gli *Elementi di Euclide* esposti da Tacquet. Perduto avendo il padre prima che compiuti avesse i suoi studj, fu obbligato a darsi al mestiere delle armi e venne creato immediatamente sottoluogotenente nel reggimento d'artiglieria di Valenza. Ebbe egli la fortuna nella nuova sua carriera d'incontrare nel suo colonnello, Fevrier, un ufiziale colto, che conosciuto avendo il suo merito pose a sua disposizione una scelta biblioteca. Fu così nella vita agitata dei campi e delle guarnigioni che, pel solo impulso del suo talento e per l'amor dello studio, da-Cunha potè terminare la sua educazione ed acquistare in breve tempo cognizioni profonde e variate nelle lingue antiche e moderne, nella filosofia, nella storia, nelle belle lettere e soprattutto nelle matematiche. Potrà da un solo fatto giudicarsi della forza del suo ingegno: senza avere altra istruzione che quella ricavata dai libri del Tosca e del Tacquet, intraprese lo studio delle alte matematiche nell' *Arithmetica universalis* di Newton e nell' *Algebra* di Simpson; dopo di che passò immediatamente ai *Principia mathematica philosophiae naturalis* di Newton, commentati dai padri Leseur e Jacquier, e potè con sì limitati mezzi e primachè compiuta avesse l'età di ventisei anni, intendere perfettamente tale libro, su cui hanno sudato i geometri più dotti. In seguito facile gli riuscì la lettura delle opere dei Bernoulli, d'Eulero, di Clairaut e di d'Alembert.

Le estese e profonde cognizioni del da-Cunha non poterono restare lungo tempo occulte. Nel 1774 infatti i suoi talenti gli fecero ottenere una delle cattedre di matematiche nell'università di Coimbra, e fu con onore impiegato in diversi lavori fino al 1778, epoca in cui si vide arrestato per un ordine segreto dell'inquisizione e cancellato dal numero dei professori. Dopo due anni di prigionia, ricuperò la libertà, ma i patimenti sofferti avevano in modo alterata la sua salute, che da quel tempo non condusse più che una esistenza dolorosa. Ricusò diversi impieghi che dal governo gli furono esibiti, e solo accettò quello di direttore del collegio reale di S. Giorgio, pel quale compose i suoi *Principj matematici* che comparvero a Lisbona nel 1782. Quest'opera, che contiene un'esposizione affatto nuova ed originale delle basi fondamentali della scienza del calcolo, venne tradotta in francese da d'Abreu (*Vedi* Aaazu), amico e compagno di da-Cunha, e pubblicata a Bordeaux nel 1806 col seguente titolo: *Principes mathématiques de feu Joseph-Anastase da-Cunha, professeur à l'université de Coimbre, comprenant ceux de l'Arithmétique, de la Géométrie, de l'Algèbre, de son application à la Géométrie, et du Calcul différentiel et intégral, traités d'une manière entièrement nouvelle, traduits littéralement du portugais*, in-8; questa traduzione è stata nuovamente pubblicata a Parigi nel 1816, in-8. Uno degli allievi di da-Cunha ne ha dato il seguente ragguaglio nel *Moniteur* dell'8 Agosto 1811: » Quest'opera, profonda e fondata sopra una base » uniforme, si distingue per una grande concisione, pel rigore delle dimostra- » zioni e per molta originalità. Mercè il suo metodo, l'autore ha potuto racchiu- » dere in un volume di trecento pagine quanto vi ha d'essenziale nelle mate- » matiche, dalla nozione del punto fino al problema degl'isoperimetri, cioè il » complesso di quelle verità dalle quali come altrettante deduzioni dipendono » tutte le cognizioni matematiche. » Da-Cunha morì o piuttosto finì di languire il 31 Dicembre 1787.

CUNITZ (Maria), donna scienziata, che le sue cognizioni nell'astronomia resero celebre in Germania, nacque ne' primi anni del XVII secolo a Schweidnitz in Slesia. Nella sua gioventù apprese con somma facilità parecchie lingue antiche e moderne, e collo stesso successo studiò la storia, la medicina e le matematiche: essa si occupò parimente della pittura, ma la sua inclinazione la portò a coltivare più particolarmente l'astronomia, che secondo i pregiudizj del suo secolo essa confuse talvolta colle pratiche dell'astrologia giudiziaria. Verso l'anno 1630 sposò un medico gentiluomo slesiano, che si chiamava Elia Lewen, e che le aveva dato lezioni di matematiche e di astronomia. Non ostante il suo matrimonio, essa continuò a portare il nome della sua famiglia. Maria Cunitz e Lewen si erano serviti pei loro calcoli delle tavole danesi di Longomontano; ma in breve si accorsero che esse non corrispondevano colle loro osservazioni, ed adottarono le tavole ridolfine di Keplero assai più esatte. L'adoprare peraltro queste ultime era difficile a cagione dell'uso frequente dei logaritmi, cui sovente bisognava correggere; i coniugi astronomi cercarono dunque i mezzi di renderle più comode nella pratica. Avevano cominciata sì grande impresa, allorchè la guerra dei trent'anni venne ad interrompere il loro lavoro, e gli forzò ad abbandonare Schweidnitz per rifuggire in Polonia. Ricevettero ospitalità in un convento di donne, ove la Cunitz condusse a termine le sue tavole astronomiche, che vennero alla luce ad Oels in Slesia col titolo di *Uronia propitio, seu tabulae astronomicae mire faciles, vim hypothesium physicorum Kepleri complexae*, 1650, in-fol. Una seconda edizione di quest'opera fu pubblicata a Francfort nel 1651 con un'introduzione in latino ed in tedesco e con una dedica all'imperatore Ferdinando III. Lewen, che aveva fatto la prefazione, afferma che l'opera è interamente di sua moglie, e che egli non ha fatto che rivederla e farvi alcune correzioni. Parecchi matematici, e specialmente Wolf ne' suoi *Elementi di matematiche*, hanno parlato con elogio di quest'opera, nella quale peraltro le ipotesi di Keplero si trovano troppo spesso alterate. Da un passo della *Politica ecclesiastica* di Gilb-Voet, risulta che Maria Cunitz viveva ancora nel 1669. Lalande però afferma che morì a Pitscher il 22 Agosto 1664. Per altre particolarità relative a tale donna illustre si potrà ricorrere alla *Biografia universale*.

CUORE di Carlo II (*Astron.*). Stella di seconda grandezza situata sotto la coda dell'Orsa maggiore dalla parte della Chioma di Berenice, e precisamente sul collo di uno dei Cani da caccia. Questa denominazione le è stata data da Halley, che volle così onorare la memoria del re che fondò la Società Reale e l'Osservatorio d'Inghilterra. Nel catalogo di Ticone Brahé viene indicata coll'espressione di *informis inter caudam Ursae et Leonis*. E Flamsteed, che non volle adottare il nome datole da Halley, la chiama ora *claro sub cauda informis*, ed ora *in annulo ormillae Charae informis sub cauda Ursae*.

CUORE dell'Idra (*Astron.*). Stella di seconda grandezza nel cuore della costellazione dell'Idra; essa è la duodecima nel catalogo di Tolomeo, l'undecima in quello di Ticone Brahé, e la centesima quinta in quello di Flamsteed.

CUORE del Leone (*Astron.*). Stella di prima grandezza nella costellazione del Leone. È più comunemente conosciuta sotto il nome di *Regolo*. *Vedi* Regolo.

CURRO (*Mecc.*). Cilindro di legno che si sottopone ai grossi pesi, acciocchè questi vi scorran sopra quando voglionsi trasportare da un luogo ad un altro.

CURTZ (Alberto), in latino *Curtius*, gesuita nato a Monaco nel 1600 e morto nella stessa città nel 1671, insegnò le matematiche e la filosofia in diverse case del suo ordine in Baviera. Le opere principali del p. Curtz sono: I *Novum coeli systema*, Dillingen, 1626, in-4; II *Problema austriacum*, Monaco, 1655, III *Amussis Ferdinandea, sive problema architecturae militaris*, Monaco, 1651, in fol.; IV *Sylloge Ferdinandeo, sive collectaneo historiae coelestis e com-*

mentariis Tychonis Brahé ab anno 1582 ad 1601, Vienna, 1657, ed Augusta, 1666, 2 vol. in-fol. Tale libro, che comparve sotto il nome di *Lucii Barretti*, anagramma di *Alberti Curtii*, è una immensa raccolta di osservazioni di oltre 1000 pagine in-foglio. Essa è preziosa per i cultori dell'astronomia ad onta di alcuni errori che sono sfuggiti a Curtz e che Erasmo Bartholin ha notato in un'opera impressa a Copenhagen nel 1668, in-4. Il libro di Cortz è stato pubblicato con diversi frontespizj a Vienna, 1668; Ratisbona, 1672; Dillingen, 1675, e altrove. Più estese notizie su tale opera si rinvengono nella *Bibliographie astronomique* di Lalande.

CURVA (*Geom.*). Linea le di cui parti successive, infinitamente piccole, hanno direzioni differenti. Si spiega la generazione delle curve in una maniera meccanica, come segue:

Se si concepisce che un punto materiale riceva un impulso istantaneo, si muoverà, e nel suo moto descriverà una linea retta, ma se a ciascun istante esso è sottoposto ad una forza costante o variabile, che agisca in una direzione diversa da quella dell'impulsione primitiva, descriverà una linea curva. Questa linea sarà piana se è contenuta tutta intera in un piano; se questa condizione non è adempita, dicesi a doppia curvatura. Le linee curve sono rappresentate analiticamente da equazioni.

Le curve piane si dividono ordinariamente in due classi; in curve algebriche o geometriche, e in curve trascendenti o meccaniche. Le prime son quelle per le quali il rapporto fra l'ascissa e l'ordinata è espresso da quantità algebriche ordinarie; le seconde son quelle le di cui equazioni contengono quantità trascendenti.

Il primo che diede i mezzi di determinare le curve per mezzo dell'equazioni fu Cartesio. Egli chiamò geometriche le curve algebriche, riguardandole come le sole che dovessero essere impiegate nella soluzione dei problemi di geometria; ma il Newton, e dopo di lui il Leibnizio e l'Wolf, pensarono che nella costruzione di un problema, una curva non dev' essere preferita ad un'altra perchè essa ha un' equazione più semplice, ma bensì perchè essa è di una costruzione più facile. (*Vedi Aritmetica universale del* Newton).

Le Linee sono state classate secondo il grado dell'equazioni che le esprimono. Le linee del prim'ordine che sono tutte comprese nell'equazione

$$Ay+Bx+C=0,$$

esprimendo solamente delle rette, non possano, parlando propriamente, essere situate fra le curve; così le linee del second' ordine hanno ricevuto il nome di *curve del prim'ordine*. Esse sono espresse dall'equazione

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0.$$

Queste curve, che si chiamano ancora *sezioni coniche*, comprendono il circolo, l'ellisse, l'iperbola e la parabola. (*Vedi* queste parole).

L'equazione che comprende tutte le linee del terz'ordine, ovvero le curve del secondo, è la seguente

$$Ay^3+Bxy^2+Cx^2y+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Kx+L=0.$$

Le curve del terz'ordine sono espresse dall' equazione

$$\begin{aligned}Ay^4+Bxy^3+Cx^2y^2+Dx^3y+Ex^4+Fy^3+Gxy^2+\\+Hx^2y+Kx^3+Ly^2+Mxy+Nx^2+Py+Qx+\\+R=0\end{aligned}$$

e così dell'altre.

L' equazione delle linee del terz' ordine contenendo dieci costanti arbitrarie, si vede che il loro numero dev' essere estremamente considerabile. Il Newton le portò a 72; ma lo Sterling avendo scoperto quattro nuove specie d' iperbole di quest' ordine, e lo Stone avendone ancora trovate due, il numero totale dovrebbe esser portato a 78. Però l' Eulero, che le classa in sedici generi, afferma che ve ne sono ottanta varietà. Dice inoltre che vi sono più di cinquecento specie di linee del quart' ordine, dal che possiamo giudicare a qual numero debbono elevarsi le linee degli ordini seguenti.

La teoria delle curve forma uno dei rami i più importanti delle scienze matematiche, e per trattare questo soggetto con tutto lo sviluppo che merita, non bisognerebbe essere obbligati a limiti tanto stretti quanto quelli di quest' opera la quale, abbracciando la scienza in tutto il suo complesso, non può dare sopra le differenti parti delle quali essa si compone, le particolarità che si trovano nei trattati speciali, così ci limiteremo ad esprimere in questo punto le idee generali sopra la maniera con cui si possono trattare i due gran problemi nei quali si decompone la teoria delle curve piane.

I *Trovare l' equazione di una curva, la sua descrizione e le sue proprietà caratteristiche essendo date.*

1°. Proponiamoci di determinare l'equazione di una circonferenza di circolo, sapendo che una delle sue proprietà caratteristiche è quella di avere tutti i suoi punti egualmente lontani da un punto interno che si chiama centro.

Per quest'oggetto, immaginiamo pel centro O (*Tav.* LXXXV, *fig.* 8) di un circolo le due rette OX e OY perpendicolari fra loro; si conduca un raggio qualunque OM, e dal punto M si abbassi sopra OX la perpendicolare MP. Nel triangolo rettangolo OMP avremo la relazione

$$\overline{OM}^2 = \overline{PM}^2 + \overline{OP}^2.$$

Ora, per qualunque altro raggio, potremo costruire un triangolo simile al triangolo OMP, ed esprimere questo raggio in funzione di una parte della retta OX, differente da OP, e di una perpendicolare a questa retta. Se dunque indichiamo con r il raggio del circolo, con x il lato che segue la retta OX, e con y il lato che gli è perpendicolare, la relazione di sopra prenderà la forma

$$r^2 = y^2 + x^2;$$

ed essa sarà evidentemente l'equazione della circonferenza del circolo il di cui raggio è r, poichè la linea che essa esprime è il luogo di tutti i punti lontani dal centro O della distanza eguale ad r.

2°. Supponiamo che le due rette rettangolari XX′, e YY′ (*Tav.* LXXXV, *fig.* 9) essendo date, come pure il punto O preso sopra la retta XX′, si domandi il luogo del punto di mezzo del lato EH dell' angolo retto di una squadra HEO, di cui l' estremità H è obbligata ad appoggiarsi sopra la retta YY′, e di cui l' altro lato dell' angolo retto EO prolungato sufficientemente, debba sempre passare pel punto O. Il lato EH della squadra essendo di più eguale alla distanza AO.

Prenderemo le due rette XX′ e YY′ per gli assi delle coordinate, vale a dire chiameremo x le rette contate sopra la retta XX′, e y le rette contate sopra la retta YY′, o paralellamente ad essa. Sia M un punto del luogo corrispondente alla posizione OEH della squadra. Dai punti M ed E abbassiamo MP ed ER perpendicolari sopra XX′, e conduciamo EQ paralella a XX′. Facciamo AP$=x$, MP$=y$, EH$=$AO$=2a$. Il punto M essendo, per quello che abbiamo supposto,

il mezzo delle rette EI, $ME = a$, e $QE = PR = AP = x$; per conseguenza si avrà nel triangolo rettangolo MQE.

$$\overline{MQ}^2 = a^2 - x^2.$$

Ma i due triangoli OER e MQE son simili e danno la proporzione

$$ER : OR :: EQ : MQ,$$

ovvero

$$ER : 2a + 2x :: x : \sqrt{a^2 - x^2},$$

donde

$$ER = \frac{2x(a+x)}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Ma

$$MP \text{ o } y = ER + MQ;$$

dunque

$$y = \frac{2x(a+x)}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a^2 - x^2}$$

il che dà, effettuando i calcoli ed elevando i due membri al quadrato

$$y^2 = \frac{(a+x)^3}{a-x}$$

equazione che è quella di una cissoide.

Questi due esempi debbono bastare per far vedere come, con l'aiuto dei principii della geometria, combinati con i metodi analitici dati dall'algebra, si possa trovare un' equazione che esprima le relazioni che esistono fra i differenti punti di una curva della quale si conoscono alcune delle sue proprietà.

II. *Essendo data l' equazione di una curva, descriverla, e trovare le sue principali proprietà.*

Quando una curva piana è data dalla sua equazione, per poterla descrivere, si concepiscano due rette fisse che si taglino, e sopra delle quali si portino le lunghezze che si attribuiscono alle variabili contenute nell' equazione. Conducendo allora per questi punti delle rette paralelle a queste rette fisse, che si chiamano assi delle coordinate, la loro intersezione determina i punti della curva. L'angolo che gli assi formano fra di loro essendo del tutto arbitrario, lo supporremo retto in tutte le discussioni che faremo (*Vedi* Coordinate).

1.° Si domanda di tracciare la curva espressa dall' equazione

$$(y - x^2)^2 = x^3,$$

per il valore di y si deduce

$$y = x^2 (1 \pm x^{\frac{1}{2}}).$$

Quest' equazione decomponendosi in due parti

$$y = x^2 (1 + x^{\frac{1}{2}}) \quad \text{e} \quad y = x^2 (1 - x^{\frac{1}{2}}).$$

Si vede che la curva avrà due rami, che tutti due passeranno per l' origine delle coordinate, poichè nell' una e nell' altra per $x = 0$, si ha $y = 0$. Conside-

riamo subito la prima equazione. A misura che x aumenta positivamente, y aumenta ancora positivamente, e per $x=\infty$, $y=\infty$; questo ramo si estende dunque all' infinito nel senso delle X e delle Y positive. Se si danno ad x dei valori negativi, $x^{\frac{5}{2}}$ diventa immaginario, e per conseguenza questo ramo della curva non si estende punto dalla parte delle X negative.

Quando, nella seconda equazione si suppone $x=1$, si ha $y=0$, questo ramo della curva taglia l' asse delle X al punto n, (*Tav.* LXXXV, *fig.* 10) la distanza An supponendosi eguale all'unità. Per tutti i valori positivi di x, maggiori dell'unità, il fattore $1-x^{\frac{5}{2}}$ diventa negativo, e per conseguenza i valori di y sono negativi. E siccome per $x=\infty$, $y=-\infty$, questo ramo di curva si estende all' infinito nel senso delle X positive e delle Y negative. Per i valori negativi di x, $x^{\frac{5}{2}}$ divenendo immaginario, non vi sono più punti della curva dalla parte delle X negative.

Se si differenzia l'equazione, riguardando x come variabile indipendente, si trova, per la derivata, rapporto ad y

$$y'=2x\pm\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}},$$

esprimendo, per abbreviare, la prima derivata differenziale

$$\frac{dy}{dx} \text{ con } y';$$

questo valore divenendo zero per $x=0$, i due rami della curva sono all'origine tangenti all' asse delle X (*Vedi* Tangenti). Il punto A, che è comune ai due rami della curva è un punto d' inflessione della seconda specie. *Vedi* Punto d' inflessione.

2.° Supponiamo che si voglia costruire il luogo dell'equazione

$$(a^2-x^2)(x-b)^2=x^2y^2$$

si ricava pel valore di y

$$y=\pm\frac{x-b}{x}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Il valore di y essendo affetto dal doppio segno, a ciascun valore di x corrisponderanno due valori di y eguali e con segni contrari, e per conseguenza la curva avrà due rami.

Prendiamo AB$=b$ e AC$=a$ (*Tav.* LXXXV, *fig.* 11). Per $x=0$, $y=\infty$ i due rami della curva non incontreranno l'asse delle Y che all'infinito, questa retta è un asintoto (*Vedi* Asintoto). Per tutti i valori di x minori di b, il fattore $x-b$ è negativo, e allora il primo valore di y è negativo e il secondo positivo. I valori diminuiscono a misura che x aumenta, e finalmente per $x=b$ divengono tutte due nulli. I due rami della curva passano dunque pel punto B. Per $x>b$ il fattore $x-b$ divenendo positivo, il primo valore di y è positivo e il secondo negativo; vale a dire che il ramo della curva che si trovava al di sotto dell' asse delle X è passato al di sopra, e che quello che era al di sopra è passato al di sotto.

Finalmente per $x=a$ il fattore $\sqrt{a^2-x^2}$ divenendo zero, $y=0$ e i due rami della curva passano pel punto C. Per tutti i valori di x maggiori di a, il fattore $\sqrt{a^2-x^2}$ divenendo immaginario, non vi sono punti della curva al di là del punto C. Il punto B, pel quale passano i due rami della curva, si chiama punto multiplo (*Vedi* Punto multiplo); e la parte BdCsB è un nodo (*Vedi* Nodo).

Se ora diamo ad x dei valori negativi, il valore di y diviene

$$y=\pm\frac{x+b}{x}\sqrt{a^2-x^2}$$

per $x=0$, $y=\infty$, per conseguenza l'asse delle Y è ancora asintoto dei due rami della curva. A misura che il valore di x aumenta, il valore di y diminuisce; finalmente per $x=a$, $y=0$, e in questo punto i due rami della curva tagliano l'asse delle X. Per $x>a$ il fattore $\sqrt{a^2-x^2}$ divenendo immaginario, non vi sono punti della curva al di là del punto D.

Per sapere se vi è un punto d'inflessione in D, bisognerebbe differenziare il valore di y considerando x come variabile indipendente, e quindi fare $x=a$ nel valore di y'. Ora, in questo caso si troverebbe $y'=\infty$, e per conseguenza la curva in questo punto è tangente all'asse delle Y. (*Vedi* Tangenti).

Se nell'equazione della curva si avesse $a=b$, allora vi sarebbe un punto d'inflessione in B. Se $a<b$, si avrebbe allora un punto coniugato (*Vedi* Punto coniugato) Questa curva è la concoide. (*Vedi* le opere dei Mac-Laurin, Eulero e Carnot).

Il Newton ha fatto conoscere che le curve possono esser generate da dell'ombre. Se, dice il medesimo, sopra un piano infinito, rischiarato da un punto luminoso, si proiettano l'ombre di certe figure, avremo la proiezione delle curve. L'ombre delle sezioni coniche saranno sempre sezioni coniche; quelle delle curve del second'ordine saranno di quest'ordine, e così dell'altre curve.

La proiezione dell'ombra di un circolo potendo generare tutte le sezioni coniche, egualmente le cinque parabole divergenti genereranno con le loro ombre tutte le altre curve del second'ordine. Potremo egualmente, negli altri ordini, trovare alcune curve fra le più semplici che, con la loro ombra proiettata sopra un piano, potranno generare tutte le altre curve del medesim'ordine.

Si trova nelle Memorie dell'Accademia di Parigi una dimostrazione di queste proprietà, come pure esempi di alcune curve del second'ordine, determinate da un piano che taglia un solido generato dal moto di una linea retta indefinita sopra una parabola divergente, che passi sempre per un punto dato al di sopra del piano di questa parabola.

Il Mac-Laurin, nella sua opera intitolata *Geometria organica*, indica i mezzi per descrivere più curve del second'ordine, sopra tutto quelle che hanno un punto multiplo, per mezzo del moto di linee rette e angoli; ma il Newton considera uno dei problemi i più difficili, quello di descrivere con un moto continuo le curve che non hanno un punto multiplo.

Quando si taglia una superficie per mezzo di un piano, si determina una curva piana. L'intersezioni delle superfici del secondo grado per una serie di piani paralelli son curve simili e similmente situate (*Vedi* Superfici del second' grado). Due curve di un ordine qualunque, situate in un medesimo piano o in piani paralelli, son simili e similmente situate, allorchè dopo aver preso

nella prima un punto O (*Tav.* LXXXV, *fig.* 12) qualunque e condotto diversi raggi vettori OM, ON, si può trovare nella seconda un punto O′ tale che i raggi vettori O′M′, O′N′ condotti paralellamente ai primi e diretti in un medesimo senso, siano con i primi in un rapporto costante, vale a dire che si abbia

$$\frac{O'M'}{OM} = \frac{O'N'}{ON} = \ldots\ldots = K.$$

I punti O ed O′ si dicono centri di similitudine, e basta la loro esistenza perchè ve ne siano un'infinità.

Se i raggi vettori della seconda curva non fossero paralelli a quelli della prima, ma facessero angoli eguali con due rette OX e O′X′ di differente direzione, le curve sarebbero soltanto simili, e perchè fossero similmente situate, bisognerebbe far girare la seconda curva intorno del punto O′ di uno spazio angolare eguale all'angolo compreso fra le due rette OX e O′X′. Se dopo questo movimento si trasportasse la seconda curva paralellamente a se medesima, in maniera da far coincidere i due punti O ed O′, le due curve diventerebbero concentriche quanto al loro centro di similitudine.

Quando due curve son simili, possiamo prendere qualunque punto si voglia per centro di similitudine di una di loro, che vi sarà sempre per l'altra un centro corrispondente. Infatti siano le curve simili *ab* e AB (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 1) ne segue che esiste un punto O tale che dando ad *ab* una posizione conveniente *cd*, e tirando a volontà le linee OM, OM′ che tagliano le curve in M e N, M′ e N′, si avrà

$$OM : ON :: OM' : ON'.$$

Il punto O è un centro di similitudine: ora dico che le medesime condizioni possano essere adempite riguardo ad un punto qualunque G. Si tiri OG, GM e GM′; si conduca NH paralella a GM, si unisca HN′. Si avrà

$$OG : OH :: OM : ON :: OM' : ON';$$

dunque HN′ è paralella a GM′; dunque l'angolo NHN′ = MGM′. Per conseguenza si prendano sopra GM e GM′ le distanze GP = HN, e GP′ = HN′, quindi si dia alla curva *cd* una nuova posizione *ef* tale che HN venga a coincidere con GP, la linea HN′ coinciderà ancora con GP′. D'altra parte

$$GM : HN :: OG : OH :: GM' : HN';$$

dunque

$$GM : GP :: GM' : GP'.$$

Così le condizioni di similitudine sono ancora adempite prendendo il punto G in luogo del punto O, purchè si trasporti la curva *ab* in *ef*.

Qualunque sia il punto che si prende per centro di similitudine, il rapporto dei raggi vettori omologhi resta invariabile, poichè si ha

$$GM : GP :: OM : ON.$$

Questo rapporto potrebbe indicarsi col nome di *rapporto di similitudine*.

Data l'equazione di una curva, passiamo adesso a trovare l'equazione generale delle curve simili.

Sia AB (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 2) la curva di cui si dà l'equazione

$$F(x, y) = 0 \ldots\ldots (a).$$

Dall'origine si conducano i raggi OM, OM', ... e dividendoli proporzionalmente in m, m', ...: il luogo dei punti m, m' ... sarà una curva ab simile ad AB. Indichiamo con k il rapporto di OM a Om, con x e y le coordinate di un punto qualunque M della curva AB, con x' e y' quelle del punto omologo m: è evidente che si avrà

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{\text{OM}}{\text{O}m} = k \quad \text{donde } x = kx', \; y = ky'.$$

Mettendo questi valori nell'equazione (a), ne risulterà

$$F(kx', ky') = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (b),$$

la quale comprenderà tutte le curve simili alla proposta; e si otterranno dando al rapporto k tutti i valori possibili.

Ma queste curve avranno una situazione particolare: poichè l'origine è il centro di similitudine comune ad esse e alla curva proposta, e di più i raggi vettori omologhi son diretti seguendo la medesima retta. Diamo a queste curve un'altra situazione; e prima di tutto supponiamo che gli assi Ox e Oy trasportandosi parallelamente a loro medesimi in O'x' e O'y', la curva ab diventi cd. Essa avrà, relativamente a questi nuovi assi, la medesima equazione (b) che relativamente agli antichi; e se vogliamo continuare a riportarla a questa, basta di cangiarvi, x' in $x-a$, e y' in $y-b$, a e b essendo le coordinate del punto O' rapporto agli assi Ox, Oy. Con questo metodo si trova l'equazione

$$F[k(x-a), k(y-b)] = 0 \; . \; . \; . \; . \; (c)$$

che rappresenta tutte le curve simili alla proposta, e similmente situate.

Quest'equazione non ha ancora tutta la generalità desiderabile. Per arrivarvi, bisogna che gli assi Ox e Oy, invece di trasportarsi parallelamente a loro medesimi, siano spostati in una maniera qualunque nel loro piano. Supponiamo dunque che essi siano divenuti O'x', O'y' (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 3), e che cd sia la nuova posizione della curva ab; è evidente che l'equazione di cd relativamente ai nuovi assi, sarà ancora $F(kx', ky') = 0$; e la questione si riduce a trovare quale equazione si deve avere riportando la nuova curva ai medesimi assi Ox, Oy della curva AB.

Per passare dai primi assi agli ultimi, si ha (*Vedi* Trasformazione della Coordinata) le formule

$$y = a + \frac{x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) + y' \operatorname{sen}(\theta - \alpha')}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y = b + \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'}{\operatorname{sen}\theta}$$

nelle quali a e b sono le coordinate OG e GO' del punto O', θ l'angolo yOx, α e α' gli angoli x'O'E, y'OE, formati da O'x' e O'y' con una parallela all'asse Ox. In questo caso si ha $\alpha' = \theta + \alpha$ e per conseguenza queste formule divengono

$$x = a + \frac{x' \operatorname{sen}(\theta - \alpha) - y' \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta}$$

$$y = b + \frac{x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}(\theta + \alpha)}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Reciprocamente, si ricava da queste relazioni i valori di x' e di y', in funzione di x e di y, cioè:

$$x' = \frac{(x-a)\operatorname{sen}(\theta+\gamma)+(y-b)\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta},$$

$$y' = \frac{-(x-a)\operatorname{sen}\gamma+(y-b)\operatorname{sen}(\theta-\alpha)}{\operatorname{sen}\theta}.$$

Sostituendo questi valori nell' equazione $F(kx', ky')=0$, la curva cd sarà riportata agli assi primitivi, e in questa maniera avremo l' equazione la più generale delle curve simili alla curva data.

Per prima applicazione consideriamo la parabola di cui l' equazione è

$$y^2 = 2px,$$

se cangiamo x in kx, e y in ky, viene, ponendo $\frac{2p}{k} = 2p'$,

$$y^2 = 2p'x:$$

equazione che dà tutte le curve simili alla parabola, e la quale prova che queste curve sono esse medesime delle parabole. Facendo variare k, il parametro $2p'$ può prendere qualunque grandezza che si voglia; dunque tutte le parabole son simili.

Più generalmente consideriamo un' equazione algebrica

$$F(x, y, p) = 0,$$

nella quale non vi è che una sola costante p, e che è omogenea rapporto alle tre quantità x, y, p,: vale a dire che la somma degli esponenti di queste tre lettere è la medesima in tutti i termini, come ciò succede nell' equazione

$$y^3 - 3pxy + x^3 = 0.$$

Il cangiamento di x e y in kx e ky dà, per le curve simili, l' equazione

$$F(kx, ky, p) = 0.$$

Poniamo $p = kp'$: essa diventa

$$F(kx, ky, kp') = 0.$$

Supponiamo che la somma degli esponenti di x, y, p, in ciascun termine dell' equazione proposta, sia eguale ad m, è evidente che k^m sarà fattore comune dell' equazione precedente; per conseguenza, dopo aver diviso per k^m, si avrà un' equazione

$$F(x, y, p') = 0,$$

La quale differirà dalla propria soltanto perchè p' avrà preso il posto di p. Dall' altra parte p' potendo avere qualunque grandezza che si voglia a motivo di k, se ne conclude che tutte le curve date dall' equazione $F(x, y, p)$, facendosi variare p, son simili fra loro. Possiamo di più aggiungere che esse sono similmente situate, e che l' origine è un centro di similitudine che è comune ad esse.

Sia ancora l' equazione trascendente

$$y = M \log x$$

che rappresenta una famiglia di curve chiamate *logaritmiche*. Esse differiscono le une dall' altre a motivo del coefficiente M: ma esse incontrano tutte l asse

delle x ad una medesima distanza $OA=1$ (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 4), poichè $x=1$ dà $y=0$; ed esse hanno tutte per asintoto la parte inferiore dell' asse delle y, poichè $x=0$ dà $y=-\infty$. Inoltre, esse hanno la forma indicata nella figura.

Sostituiamo invece di x e y i valori kx, e ky, viene $ky=M\log kx$: donde facendo $M=M'k$,

$$y=M'\log kx=M'\log x+M'\log k.$$

Cangiamo l' origine, e poniamola in O' alla distanza $OO'=M'\log k$. Chiamando x', y' le nuove coordinate, avremo $x=x'$, $y=y'+M'\log k$, e l' equazione precedente si riduce a

$$y'=M'\log x'.$$

Quest'equazione rappresenta ancora una logaritmica, e siccome M' può prendere tutte le grandezze possibili, ne segue che tutte le logaritmiche son simili.

Per ultima applicazione proponiamoci di cercare le condizioni che debbono essere adempite allorchè due curve di second' ordine son simili e similmente disposte. Siano

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \ldots\ldots [1],$$
$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'y+E'x+F'=0 \ldots\ldots [2],$$

le equazioni delle due curve. Per quello che abbiamo detto per ottenere l' equazione (c), bisognerà, per avere tutte le curve simili alla prima, e similmente situate, sostituire invece di x e y i valori $k(x-a)$ e $k(y-b)$.

Ponendo per abbreviare, $A''=Ak^2$, $B''=Bk^2$, $C''=Ck^2$,

$$D''=-2Abk^2-Bak^2+Dk,\quad E''=-2Cak^2-Bbk^2+Ek,$$
$$F''=Ab^2k^2+Babk^2+Ca^2k^2-Dbk-Eak+F,$$

l'equazione risultante potrà scriversi come segue

$$A''y^2+B''xy+C''x^2+D''y+E''x+F''=0 \ldots [3].$$

Perchè la seconda curva data sia simile alla prima e similmente situata, bisogna che determinando convenientemente a, b, k, si possano rendere identiche le curve dell'equazioni (2) e (3); e perchè quest' identità abbia luogo, bisogna che dopo aver diviso le due equazioni, l'una per A' e l'altra per A'', i termini simili abbiano i medesimi coefficienti. Non eguagliando in principio che i coefficienti di xy e di x^2: si avrà

$$\frac{B'}{A'}=\frac{B}{A},\quad \frac{C'}{A'}=\frac{C}{A},\quad \text{ovvero}\quad \frac{A'}{A}=\frac{B'}{B}=\frac{C'}{C}$$

Così abbiamo digià queste condizioni, che *i coefficienti dei termini del seconda grado, nelle due equazioni date, debbono essere proporzionali.*

Supponiamo dunque che queste condizioni sieno adempite, e che si abbia $A'=A\rho$, $B'=B\rho$, $C'=C\rho$. Di più, facciamo $D'=d\rho$, $E'=e\rho$, $F'=f\rho$: l' equazione (2), essendo divisa per ρ, diverrà

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+dy+ex+f=0 \ldots (4).$$

Per completare l'identità delle curve, bisogna ancora porre

$$\frac{D''}{A''}=\frac{d}{A},\quad \frac{E''}{A''}=\frac{e}{A},\quad \frac{F''}{A''}=\frac{f}{A}.$$

Rimettiamo per A'', D'', E'', F'', i loro valori, e quest'equazioni divengono

$$-2Abk-Bak+D=dk \;.\;.\;.\;.\;.\;(5),$$
$$-2Cak-Bbk+E=ek \;.\;.\;.\;.\;.\;(6),$$
$$Ab^2k^2+Babk^2+Ca^2k^2-Dbk-Eak+F=fk^2 \;.\;.\;.\;(7).$$

Aggiungendo queste tre equazioni, dopo averle moltiplicate respettivamente per bk, per ak e per 2, si trova facilmente

$$2fk^2+dbk^2+eak^2+Dbk+Eak-2F=0 \;.\;.\;.\;.\;.\;(8).$$

Quest'equazione non contiene a e b che alla prima potenza, e si preferisce all'equazione (7), congiuntamente con l'equazioni (5) e (6), nella determinazione di a, b, k. Bisognerà che i valori delle coordinate a, b, siano reali, e inoltre che quello del rapporto k sia positivo. Cerchiamo quali condizioni risultano da ciò

Ponendo per abbreviare, $B^2-4AC=N$, $BD-2AE=G$, $Bd-2Ae=g$. $BE-2CD=H$, $Be-2Cd=h$, le equazioni (5) e (6) danno

$$a=\frac{G-gk}{Nk}\,,\quad b=\frac{H-hk}{Nk}\,;$$

e portando questi valori nell'equazione (8), fatti tutti i calcoli, viene

$$k^2=\frac{2FN-EG-DH}{2fN-eg-dh}\,.$$

Perchè il rapporto k abbia un valore reale e positivo, bisogna e basta che k^2 sia positivo. Così, abbiamo ancora questa condizione, che il *numeratore* e *il denominatore dell'espressione precedente debbono essere quantità del medesimo segno.*

I valori di a e di b essendo reali quando quello di k è reale, essi non danno luogo a nuove condizioni.

Allorquando le curve che si paragonano son parabole, N o B^2-4AC è zero, e i valori di a e di b sembrano diventare infiniti. Ma se avanti d'introdurvi l'ipotesi $N=0$, si sostituiscano i due valori di k, si troverà che nei due sistemi di valori che si ottengono per a e b, ve n'è uno che si compone ancora di quantità finite dopo l'ipotesi $N=0$.

Tuttavia, per evitare queste difficoltà di calcolo è meglio di rimontare all'equazioni (5), (6), (8). Eliminando a fra le due prime, b sparisce ancora, e si trova immediatamente k: si determina quindi a e b per mezzo dell'equazioni (5) e (8). Il valore che si ottiene per k è

$$k=\frac{G}{g}=\frac{BD-2AE}{Bd-2Ae}\,;$$

e se ne conclude che, nel caso in cui $B^2-4AC=0$, bisogna, invece dell'ultima condizione enunciata di sopra, che *le quantità* $BD-2AE$ e $Bd-2Ae$ *siano del medesimo segno.*

Allorquando due superfici si penetrano, esse determinano, con la loro intersezione una curva che, in generale è a doppia curvatura. Se le due superfici si attraversano, vi saranno due curve d'intersezione; e se la prima, o la curva di entrata, è piana, la seconda, o curva di uscita, sarà ancora piana. Se si concepisce che un punto materiale, ritenuto da una forza normale sopra una superficie curva, si muova in virtù di una forza, che agisca costantemente in una direzione differente, esso descriverà una curva la quale parteciperà ancora della curvatura della superficie, e che per conseguenza sarà a doppia curvatura. In ge-

nerale, le curve a doppia curvatura sono determinate dall' equazioni delle due superfici curve nelle quali si esprime che le coordinate sono eguali per alcuni valori particolari.

Una famiglia di curve comprende tutte quelle che possano esprimersi con la medesima equazione generale. Così $a^{m-1}x = y^m$ rappresenta una famiglia di curve, il di cui grado varia con m.

Curva agli approcci eguali. *Vedi* Approccio.

Una curva esponenziale è una curva definita da un' equazione esponenziale.

Curva funicolare. *Vedi* Catenaria.

Curva a Livello *Vedi* Livello.

Curva riflettente. *Vedi* Diottrica.

Curva della più pronta discesa. *Vedi* Brachistocrona.

CURVATURA (*Geom.*). Si chiama *curvatura* la quantità della quale un arco di curva infinitamente piccolo si allontana dalla linea retta. Siccome possiamo supporre che quest' arco infinitamente piccolo appartenga a un circolo, si misura la *curvatura* di una curva qualunque, in un punto dato, da quella del circolo che gli coincide in questo punto. Ora la curvatura dei circoli essendo tanto più grande quanto i raggi sono più piccoli, la curvatura di una curva, a ciascuno dei suoi punti, è in ragione inversa del raggio del circolo coincidente. Il circolo coincidente si chiama *circolo osculatore*. *Vedi* Osculatore.

Il raggio del circolo osculatore, con l' aiuto del quale si determina la curvatura di una linea curva, in un punto determinato, si chiama *raggio di curvatura*. Daremo alla parola *osculatore* la deduzione dell' espressione differenziale di questo raggio; in questo punto non considereremo che le sue applicazioni particolari.

fx essendo una funzione di x, sia $y = fx$, l' equazione di una curva qualunque, il suo raggio di curvatura è dato dall' espressione

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} \ldots\ldots (1),$$

x ed y considerandoli come dipendenti da un' altra variabile.

Se si considera x come una variabile indipendente, avremo $d^2x = 0$, e quest' espressione diverrà

$$\rho = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{\left[1+\frac{dy^2}{dx^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ovvero, per maggior semplicità

$$\rho = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \ldots\ldots (2),$$

indicando con y' e y'' le *derivate differenziali* $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Il valore della normale, $v = \pm y\sqrt{1+y'^2}$, introdotto nell' equazione (2) ri-

porta l'equazione del raggio di curvatura alla forma semplicissima

$$\rho = \pm \frac{\nu^3}{y'' . y^3} \ldots . (3),$$

che si applica al calcolo con facilità.

Per determinare il raggio di curvatura delle curve del secondo grado di cui l'equazione generale è

$$y^2 = 2px + qx^2$$

si differenzierebbe due volte di seguito quest'equazione, onde determinare y' e y'', per le quali si troverebbe

$$y' = \frac{p+qx}{y}, \quad y'' = -\frac{p^2}{y^3}$$

il che darebbe pel valore di ρ, servendosi dell'equazione (3)

$$\rho = \pm \frac{\nu^3}{p^2} \ldots \ldots \ldots (4);$$

applichiamo queste formole ad alcuni casi particolari.

1. Sia la curva proposta una parabola volgare di cui l'equazione è

$$y^2 = 2px,$$

p esprimendo il *semi-parametro*.

In questa curva, la normale essendo $\nu = \sqrt{y^2 + p^2}$, avremo sostituendo nell'equazione (4) e non prendendo che il segno +

$$\rho = \frac{(y^2 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p^2}.$$

Vale a dire che nella parabola *il raggio di curvatura è eguale al cubo della normale diviso pel quadrato del semi-parametro.*

Così per avere il raggio di curvatura di un punto qualunque della curva, basta di dare ad y il valore che corrisponde a questo punto, per esempio, se si trattasse del vertice della curva ove si ha $y = 0$, dando questo valore ad y si avrebbe

$$\rho = p,$$

il che prova che la curvatura della parabola al suo vertice, è la medesima che quella del circolo descritto col semi-parametro per raggio.

2. Cerchiamo adesso il raggio di curvatura della cicloide, curva di cui l'equazione è

$$x = \text{arc}\,[\text{sen} = \sqrt{(2ry - y^2)}] - \sqrt{y(2r - y)}$$

r essendo il raggio del circolo generatore. *Vedi* Cicloide.

Differenziando due volte di seguito, si trova per y' e y'',

$$y' = \frac{\sqrt{2r - y}}{\sqrt{y}}, \quad y'' = -\frac{r}{y^2}$$

e si ha di più

$$\nu = \sqrt{2ry},$$

valori che, introdotti nell' equazione (2), danno per ρ

$$\rho = 2\sqrt{2ry}.$$

Ma siccome $v = \sqrt{2ry}$, si arriva a questa conseguenza, che merita di essere particolarmente osservata, cioè, nella cicloida il raggio di curvatura è doppio della normale.

Le equazioni di un gran numero di curve essendo date in funzioni delle coordinate polari, era necessario di aver ρ espresso in funzioni delle medesime coordinate. Il suo valore è

$$\rho = \frac{(r'^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}{2r'^2 - rr'' + r^2}$$

l' angolo del raggio vettore con l' asse essendo preso come variabile indipendente, r essendo il raggio vettore variabile, e r' e r'' le derivate differenziali.

Il valore del raggio di curvatura variando con le coordinate della curva, per ciascun punto di questa vi è un circolo osculatore differente. I centri di questi circoli determinano una nuova curva che è la sviluppata della prima e alla quale i raggi di curvatura son tangenti. *Vedi* Sviluppata.

Per determinare il raggio di curvatura di una curva a doppia curvatura, si ha la relazione

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}.$$

La variabile indipendente essendo l' arco di curva s che è determinato dall' equazione differenziale,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Proponiamoci di cercare il raggio di curvatura di una *spirale*. Una delle equazioni di questa curva è

$$z = ar \text{ arco tang } \frac{y}{x} \ldots\ldots (1).$$

L' asse delle Z è l' asse del cilindro sul quale è tracciata la spirale, e l' origine delle coordinate è ad uno dei punti delle superfici del cilindro, r è il raggio del circolo generatore del cilindro; $a = \text{tang}\,\theta$; θ essendo l' angolo d' inclinazione della retta che genera la spirale col piano delle XY, che è perpendicolare all' asse delle Z.

La second' equazione della spirale è

$$x^2 + y^2 = r^2 \ldots\ldots (2):$$

equazione della proiezione del circolo generatore del cilindro sul piano delle XY.

Differenziando due volte di seguito le equazioni (1) e (2), riguardando s come variabile indipendente si trova

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{-x}{r^2(1+a^2)},$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{-y}{r^2(1+a^2)},$$

$$\frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Mettendo questi valori in quello di ρ si ottiene

$$\rho = r(1+a^2) = r\rho \sec^2\varphi,$$

il che indica che nella spirale il raggio di curvatura è costante.

La curvatura delle superfici in un punto dato si determina con i raggi di curvatura delle sezioni fatte nella superficie da piani che passano per la normale. Fra queste sezioni, ve ne sono sempre due principali di cui i raggi di curvatura, che portano il nome di raggi principali, sono *maximum* o *minimum*. I piani di questi raggi sono perpendicolari l'uno all'altro.

Per determinare il raggio di curvatura ρ di una sezione normale qualunque si ha la relazione.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R'}\cos^2\varphi + \frac{1}{R''}\operatorname{sen}^2\varphi$$

R' e R'' essendo i due raggi principali, e φ l'angolo che fa le sezione con una delle sezioni principali. Questa relazione è stata trovata da Eulero.

Quando i due raggi di curvatura principali sono del medesimo segno, il raggio di curvatura ρ ha ancora il medesimo segno; e siccome segue lo stesso per tutte le sezioni normali, succede che pel punto che si considera, esse sono tutte da una medesima parte del piano tangente alla superficie; si dice allora che la superficie è convessa al punto M. Il più piccolo dei due raggi principali è un *minimum*, e l'altro un *maximum*.

Se $R' = R''$, allora $\rho = R'$, il che prova che tutte le sezioni normali hanno la medesima curvatura, e che una qualunque fra di loro può esser presa come sezione principale. Questo è ciò che ha luogo per tutti i punti di una sfera, e in un'ellissoide di rivoluzione, per i due punti che sono sopra l'asse.

Se R' è positivo e R'' negativo, la superficie sarà *non-convessa*, poichè vi saranno delle sezioni normali al di sopra del piano tangente e altre al di sotto. R' sara un minimum, e $-R''$ un maximum analitico solamente rapporto ai raggi negativi.

Il teorema del Meusnier dà i mezzi di calcolare il raggio di curvatura ρ', di una sezione obliqua qualunque, poichè il medesimo prova che essa è eguale alla proiezione sopra il suo piano del raggio di curvatura ρ della sezione normale che passa per la medesima tangente. Relazione espressa dall'equazione

$$\rho' = \rho \cos\omega,$$

ω essendo l'angolo compreso fra i piani delle due sezioni.

Queste differenti formule non sussistono che quando il piano tangente alla superficie nel punto che si considera, è preso per piano delle XY; per calcolare questi raggi nel caso generale bisogna ricorrere alle linee di curvatura.

Si chiamano linee di curvatura di una superficie, il seguito di punti pei quali due normali consecutive s'incontrano. Sopra qualunque superficie, esistono due serie di linee di curvatura che le dividono in quadrilateri curvilinei infinitamente piccoli, i di cui lati si tagliano ad angoli retti. Le due linee di curvatura che passano per un punto, sono tangenti alle due sezioni principali.

Se si calcolano i raggi di curvatura della superficie per un punto determinato, vale a dire le porzioni della normale comprese fra il punto, e quelli ove essa è tagliata dalle due normali vicine, si vede che esse coincidono in grandezza e in posizione con i raggi di curvatura delle sezioni principali, il che rende più generali i risultamenti enunciati di sopra.

Per maggiori particolarità sopra una teoria tanto importante, vedi le opere del Monge e del Leroy.

Digitized by Google

CURVE ECCENTRICHE. (*Mecc.*). Sotto questo nome vengono indicati dei piatti che hanno una curvatura determinata, e che si adattano ad un'asse che gira per stare in luogo delle manovelle, il di cui moto non è giammai ben regolare. Questi organi meccanici trasformano il moto circolare continuo in rettilineo alternativo. (*Vedi* Composizione delle macchine.)

Supponiamo che si trattasse di far salire e discendere alternativamente con una velocità uniforme il fusto MN (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 7), mobile fra i denti in terzo *g*, *g*. Avendo adattato all'asse A del moto una curva eccentrica PQ della quale in seguito indicheremo la costruzione, si farà riposare sopra la sua grossezza l'estremità del fusto MN guarnito di una girella N per diminuire l'attrito, è evidente che a ciascuna rivoluzione della curva, rappresentata nella figura, il fusto si eleverà per tutto il tempo che la girella si appoggerà sopra una delle metà di questa curva e che essa si abbasserà, tanto per l'effetto del suo peso, quanto per l'effetto di una molla, nel tempo che la girella si appoggerà sopra l'altra metà. Il punto della maggiore elevazione corrisponderà al momento in cui l'estremità P dell'eccentrico arriverà sotto la girella, e il punto del maggiore abbassamento a quello in cui il punto Q si troverà nella verticale.

Analizzando accuratamente le circostanze del moto che vogliamo dare al fusto, possiamo sempre facilmente trovare la curva capace di produrlo. In questo caso la condizione da adempire essendo che un punto qualunque dell'eccentrico descriva archi eguali intorno del centro dell'asse, nel tempo che il fusto si eleva o si abbassa di quantità eguali, il tracciare la curva è semplicissimo.

Avendo presa la retta AB (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 8), eguale alla distanza dal centro dell'asse al punto della maggiore elevazione della girella, e, sopra questa retta, la parte AQ eguale alla più piccola elevazione, si descriverà dal punto A come centro, con AB per raggio, una circonferenza di circolo che si dividerà in un numero pari di parti eguali, 12 per esempio; si segneranno i punti di divisione con i numeri I, II, III, ec., alla destra e alla sinistra di B, in modo che ciascuna semicirconferenza porti sei numeri. Ciò fatto, e dopo aver condotto i raggi AI, AII, ec., si dividerà BQ, che rappresenta una scorreria intera del fusto, in sei parti eguali che si segneranno con i numeri 1, 2, 3, ec., a partire da Q. Dal centro A, con i raggi AQ, A1, A2, A3, ec., si descriveranno successivamente delle circonferenze, e le loro intersezioni con i raggi del medesimo numero saranno tanti punti della curva cercata. Si vede immediatamente che tutti i diametri di questa curva passando pel centro A sono eguali alla distanza fondamentale PQ del punto P al punto d'inflessione Q.

Se, in vece di un moto uniforme, si trattasse di produrre un moto vario, secondo una legge qualunque, si dividerebbe BQ in sei parti aventi fra loro i rapporti dati da questa legge, e tutto il rimanente della costruzione sarebbe il medesimo.

Gli eccentrici la curvatura dei quali si determina nella precedente maniera non producono che un'andata e che una venuta in una delle loro rivoluzioni complete; ma quando si è ben compreso il principio della loro costruzione, è facile di estenderlo ai casi di un numero qualunque di scorrerie nel tempo di una rivoluzione della curva.

Si abbia, per esempio, da descrivere un eccentrico capace di produrre quattro andate e quattro venute del fusto, eguali fra loro e di un moto uniforme. Dopo aver preso, come qui sopra, la rette AD e AQ (*Tav.* LXXXVI, *fig.* 9), respettivamente eguali alla maggiore e alla minore distanza dall'estremità del fusto al centro A del moto, si descriverà una circonferenza col raggio AD e si dividerà in principio in quattro parti eguali; si dividerebbe in sei se si volessero sei andate e sei venute, e così di seguito; si dividerà DQ in un numero qualunque di

parti eguali, che si segneranno con i numeri 1, 2, 3, ec., a partire da Q; e dal centro A, si descriveranno successivamente delle circonferenze con i raggi AQ, A1, A2, ec. Ciò fatto, si dividerà ciascuno quarto di circonferenza in un numero di parti eguali doppio di quello delle parti di DQ. Qui DQ essendo diviso in quattro, divideremo ciascun quarto in otto parti eguali, e si segneranno i punti di divisione con i numeri I, II, III, IV, a partire da ciascuna estremità dell'arco, come ciò è fatto nella figura pel quarto BD, dimodochè il numero IV corrisponderà alla metà dell'arco; dal centro A si condurranno dei raggi a ciascun punto di divisione, e le loro intersezioni con le circonferenze dal medesimo numero saranno dei punti della curva.

Il Deparcieux, che si è molto occupato delle curve eccentriche, ha dato nelle *Memorie dell' Accademia delle Scienze* di Parigi per l'anno 1747, dei metodi facili per descriverle in tutti i casi.

CURVILINEO (*Geom.*). Le figure curvilinee sono aree racchiuse da linee curve, come il circolo, l'ellisse, il triangolo sferico, ec. *Vedi* Figura.

Angolo curvilineo. Si dà questo nome all'angolo formato dall'incontro di due linee curve.

CUSA (Niccolò de), cardinale, così chiamato da un villaggio della diocesi di Treveri sulla Mosella, ove nacque nel 1401. Non dobbiamo qui parlare delle di lui profonde cognizioni in ogni ramo di scibile umano, nè delle sue opere di filosofia, di teologia e di metafisica, nè delle importanti missioni che da varj pontefici in diversi tempi gli furono affidate; tali titoli, che a quest' uomo celebre danno un diritto incontrastabile ad esser conservato nella memoria dei posteri, non somministrerebbero argomento per far parola di lui in questo Dizionario. Esso però merita di esservi rammentato per le sue opere di matematiche, di geometria, e di astronomia, che suppongono cognizioni più estese di quelle che si avevano al suo tempo, sebbene talvolta vi si incontrino delle idee alquanto singolari. Aveva indirizzata a Niccolò V alcune ricerche sulla quadratura del circolo, che confutate vennero da Regiomontano. Propose pure al concilio di Basilea un progetto per la riforma del calendario, al quale i grandi affari, di cui era occupato quel concilio, impedirono che si prestasse l'attenzione che meritava. Il cardinale de Cusa è stato pure il primo, tra' moderni, che intraprendesse di resuscitare l'ipotesi di Pitagora sul moto della terra, rinnovata poi con miglior successo da Copernico e da Galileo. Morì a Todi nell'Umbria il dì 11 Agosto 1464. Tutte le sue opere sono state stampate a Basilea nel 1565, in 3 vol. in 4.

CUSPIDE. *Vedi* Regresso.

CYSAT (Giovanni Battista), nato a Lucerna nel 1588, si fece gesuita nel 1604, e divenne professore di filosofia e di matematiche ad Ingolstadt. Dopo essere stato successivamente rettore de' collegi di Lucerna, d'Inspruck e di Aich-Staedt, tornò in patria e vi morì il 3 di Marzo 1657. Tra le altre opere ha composto: *Mathematica astronomica de loco, motus magnitudine et causis cometae annorum* 1618 *et* 1619, Ingolstadt, 1619, in-4. Fu il primo ad osservare con un telescopio la cometa di quegli anni, e credè di ravvisarvi alcune ineguaglianze da altri non avvertite. Sostenne pure uno dei primi che il corso di quella cometa era regolare e che si faceva con un moto retto e non circolare. Nel 1631 osservò ad Inspruck il passaggio di Mercurio sul sole. Tale fenomeno, annunziato da Keplero da due anni, non fu scorto che da quattro o cinque osservatori, e perfezionò molto la teoria di quel pianeta. Cysat godeva di una grande reputazione presso gli astronomi del suo tempo, e Riccioli l'onorò dando il suo nome ad una delle macchie della luna.

Digitized by Google

D

DAN

DACIA (Pietro di), danese, rettore dell' università di Parigi nel 1326, e poscia canonico della cattedrale di Ribe nel Jotland. Scrisse varie opere di astronomia, e tra le altre un *Computo ecclesiastico*, ed un *Trattato del calendario*. Il primo di tali trattati è stampato in latino nel sesto volume degli *Scriptores rerum danicarum*, ed ambedue esistono in francese in un bel manoscritto in pergamena della biblioteca reale di Copenhagen.

D' ALEMBERT. *Vedi* ALEMBERT (d').

DALESME (Andrea), fisico francese, eletto nel 1699 membro dell' Accademia delle Scienze di Parigi colla qualità di meccanico pensionario, fu dichiarato veterano nel 1706, perchè i molti impieghi che erano stati a lui affidati gl' impedivano di adempire al doveri di accademico. Nella raccolta delle memorie dell' Accademia delle Scienze dal 1705 al 1717 si trovano parecchie invenzioni di Dalesme, tutte relative ad oggetti di pubblica utilità: fra le altre è notabile la descrizione di un martinetto ingegnosissimo, che produce una doppia forza del martinetto ordinario e che si logora meno facilmente. La scoperta però che più d'ogni altra fa onore a questo abile meccanico è quella della stufa che tuttora porta il suo nome, nella quale il fumo è obbligato a discendere nel braciere e a convertirsi in fiamma; invenzione ingegnosa che ha suggerito a Lebon l' idea del termolampo. Dalesme morì nel 1727.

DALRYMPLE (Alessandro), geografo inglese, membro della Società Reale di Londra, nacque in Scozia nel 1737. Giovane ancora, entrò al servizio della compagnia delle Indie, per commissione della quale fece parecchi viaggi nell' arcipelago delle Indie orientali e riconobbe con somma diligenza tutte le coste che potè visitare. In ricompensa di tali lavori fu nominato idrografo della compagnia e quindi idrografo regio. Morì il 19 Giugno 1808. Molte, e tutte importanti, sono le opere pubblicate da Dalrymple sulla geografia: il lettore potrà vedere l' elenco delle principali nella *Biografia universale*; noi ci contenteremo di rammentare il *Repertorio orientale*, *pubblicato a spese della compagnia delle Indie*, 1791-94, 2 vol. in-4, che è una raccolta di un gran numero di carte marine e di memorie utilissime per la navigazione nei mari delle Indie.

DANAIDE (*Idraul.*). Specie di ruota a reazione che riceve l' azione motrice dall' acqua, inventata dal Manoury d' Ectot. prenderemo la descrizione della medesima dai signori Lanz e Betancourt.

» Questa macchina può comprendersi, come lo dice benissimo il Petit, nel numero delle ruote idrauliche; essa si riduce a un tino idraulico di legno *ncdd'c'n'* (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 1) il cui fondo è forato nel suo centro da un orifizio circolare *rr* (*vedi* l' elevazione e il taglio (*b*)). A traverso di questo orifizio passa un asse verticale di ferro *pq* ritenuto in alto per mezzo di un collare, e che po-

sa, nella sua parte inferiore, sopra un pernio che gli permette di girare sopra se medesimo, trasportando il tino al quale è fissamente attaccato per mezzo di quattro bracci di ferro, dei quali se ne vedono due *cc'* ed *ee'* nel taglio (*a*), e i due altri *dd'* e *ff'* nel taglio (*b*). Quest'asse, diretto secondo l'asse della curva, non chiude completamente l'orifizio centrale *rr* che esso traversa; al contrario lascia intorno della sua circonferenza una corona vuota donde l'acqua affluente può uscire. Un diaframma circolare *ss* fissato all'asse verticale *pq* e ai bracci *cc'* ed *ee'*, immediatamente al di sotto di questi, divide il tino in due parti eguali *ncc'n'*, e *cdd'c'* le quali non possano comunicare l'una coll'altra che per la corona vuota che resta fra il diaframma circolare e la superficie interna del tino. La parte inferiore *cdd'c'*, è divisa in otto caselle da altrettanti diaframmi *t*, quattro dei quali partono dall'asse *pq* verso la circonferenza, e quattro altri non arrivano l'asse, per non ostruire troppo l'orifizio *rr*. Questi diaframmi formati da superfici piane, discendono dal diaframma circolare fino alla base del tino. L'acqua arriva alla parte superiore del tino per un tubo di condotto B, che si ripiega convenientemente per lasciarla uscire da un orifizio *x* (elevazione e taglio (*a*)), sotto la forma di una nappa d'acqua che batte tangenzialmente in tutta la superficie concava di questa parte, mette il tino in moto, discende alla parte inferiore della corona vuota regolata fra il diaframma *ss* e la superficie interna del tino, s'impegna nelle caselle di già indicate, e esce finalmente dall'orifizio *rr* per cadere nel tubo di scaricamento R. Tale è la descrizione e il giuoco di questa macchina, che l'autore ha eseguita con i massimi vantaggi nelle differenti manifatture. Egli vi ha aggiunto un perfezionamento il quale consiste a sostituire ai diaframmi *t* a superficie piane, altri diaframmi in forma di spirali i quali si prolungano salendo fino al limite superiore *nn'* del tino, attraverso la corona vuota del mezzo. La forma che egli dà a questi nuovi diaframmi gli permette di sopprimere l'orlo *nn'* che serviva ad impedire che l'acqua si versasse al di fuori; pare che con quest'ultima modificazione la perdita delle forze vive sia diminuita considerabilmente. »

DANTE (Pietro Vincenzo), gentiluomo di Perugia della famiglia dei Rinaldi, viveva nel quindicesimo secolo e morì nel 1512 in età assai avanzata. Questo dotto, di cui grande era la reputazione e come matematico e come architetto, si applicò ancora alla poesia, e s'immaginò che le sue composizioni imitassero talmente la sublimità di quelle di Dante, pel quale d'altronde professava un'ammirazione senza limiti, che volle assumere il nome del divino poeta e trasmetterlo a' suoi discendenti. È autore di un *Comento* italiano sulla *Sfera* di Sacrobosco, impresso a Perugia nel 1544, ed ivi ristampato con aggiunte nel 1574.

DANTE (Giulio), figlio del precedente, morto nel 1575, si rese anch'esso celebre per le sue cognizioni nelle matematiche e nell'architettura. Costrusse la magnifica chiesa di San Francesco d'Assisi, e lasciò scritto un trattatello *De alluvione Tyberis*, ed alcune note sugli ornamenti di architettura.

DANTE (Teodora), sorella di Giulio Dante, fu celebre in Italia per le grazie del suo spirito e pe' suoi talenti nelle matematiche, cui ella insegnò a suo nipote Ignazio Dante.

DANTE (Pellegrino), più noto sotto il nome di padre Ignazio, che egli assunse entrando nell'ordine de' domenicani, nacque a Perugia nel 1537 da Giulio Dante. Uscito da una famiglia che aveva dato varj matematici distinti, Ignazio gli superò tutti in talento e in reputazione. Fino dall'infanzia coltivò con successo le matematiche, nè cessò di applicarvisi nella vita religiosa che abbracciò di buon'ora. Giovine ancora, ne diede pubbliche lezioni a Bologna; e tale fu la fama che si acquistò, che Cosimo I de' Medici, desideroso di udirlo, lo fece venire a Firenze. Lo stesso onore ricevè egli dal papa Gregorio XIII, che lo chiamò a

Roma, lo incaricò di levare le piante di diverse piazze dello Stato pontificio, e gli conferì nel 1583 il vescovado di Alatri. Ma il p. Ignazio Dante è celebre principalmente per il servizio reso all'astronomia moderna coll'aver fatto costruire il primo uno gnomone abbastanza considerabile da poter fissare gli equinozj ed i solstizj. Quello, ch'egli eresse nel 1575 nella chiesa di S. Petronio di Bologna, non era non ostante di tutta la perfezione desiderabile, poichè declinava dal meridiano di alcuni gradi. Devesi peraltro considerare che nella costruzione di questo strumento egli non si propose che di mostrare, con una osservazione per così dire popolare, di quanto l'equinozio di primavera si scostava dal 21 Marzo, epoca nella quale si supponeva che avvenisse; ed in questo rapporto è certo che lo gnomona non aveva bisogno di una maggiore esattezza. Questo gnomone servì di base a quello che nel 1654 fece costruire nella stessa chiesa Giovan Domenico Cassini. (*Vedi* Giovan Domenico Cassini).

Il p. Ignazio Dante ha lasciato parecchie opere, tra le quali citeremo: I *Trattato dell' uso e fabbrica dell' astrolabio e del planisferio*, Firenze, 1568, in-4. Ne pubblicò nel 1578 un' edizione aumentata ed arricchita della descrizione di molti nuovi strumenti astronomici; II Una traduzione italiana della *Sfera* di Proclo, Firenze, 1573, in-4; III *Commentario alle regole della prospettiva di Jacopo Barozzi*, Roma, 1583, in-fol. Quest'opera contiene le dimostrazioni matematiche delle regole della prospettiva, di cui Vignola si era contentato di dare la sola pratica; IV *Le scienze matematiche ridotte a tavole*, Bologna, 1577, in-fol. Quest' opera comprende quarantacinque tavole sinottiche, la cui composizione presuppone una grand' erudizione nell' autore; oggigiorno può esser consultata come un monumento curioso dello stato della scienza verso la fine del XVI secolo; V *La prospettiva di Euclide, tradotta con alcune annotazioni; insieme con la prospettiva di Eliodoro, tradotta da Ignazio Dante*, Firenze, 1573, in-4; VI *Anemographia in anemoscopium verticale instrumentum*, Bologna, 1578, in-fol; VII Un comento italiano sul trattato *De latino radio* di Latino Orsini, Roma, 1583, 1586, in 4; VIII Dei comenti sulla *Sfera* di Sacrobosco, ec. Ignazio Dante morì il 19 Ottobre 1586, mentre si preparava a lasciare Alatri per recarsi a Roma, ove lo aveva chiamato il pontefice Sisto V, che voleva averlo presso la sua persona.

DANTE (Vincenzo), fratello d' Ignazio Dante, pubblicò un' opera intitolata: *Libro primo delle perfette proporzioni*, Firenze, 1567, in-4. Tale opera doveva comprendere quindici libri, ma non comparve che il primo.

DANTE (Giovanni Battista), altro matematico di Perugia, ma che non era probabilmente della stessa famiglia dei precedenti, si acquistò molta celebrità verso la fine del secolo XV, per un' esperienza di meccanica che merita di esser riferita. In occasione delle feste del matrimonio di Bartolommeo Alviano colla sorella di Giovanni Paolo Baglioni, Giovan Battista Dante, mediante due grandi ali meccaniche di sua invenzione, ardì lanciarsi dalla torre più alta di Perugia, traversò la piazza, e si librò lungo tempo in aria in mezzo alle acclamazioni della moltitudine. Per mala sorte uno dei ferri che serviva a far manovrare l'ala sinistra si ruppe, e l'ardito meccanico cadde sul tetto della chiesa della Madonna e si fracassò una gamba. Guarito che fu, andò ad insegnare le matematiche a Venezia, ove morì di febbre non avendo ancora quarant'anni. Aveva fatto precedentemente molti saggi delle sue ali ed aveva anzi, dicesi, traversato in tal guisa il lago di Perugia. Si consulti su tal proposito l'*Athenaeum augustum* del p. Oldoini gesuita, e la *Perugia illustrata* del Vermiglioli.

DARQUIER (Agostino), nato a Tulosa il 23 Novembre 1718. La sua inclinazione lo portò allo studio dell' astronomia, scienza cui coltivò con ardore e successo fino alla sua morte avvenuta il 18 Gennajo 1802. Darquier era socio dell' Istituto na-

zionale. I suoi scritti sono: I *Uranographie, ou Contemplation du ciel à la portée de tout le monde*, Parigi, 1771, in-16. Quest' operetta contiene le figure delle costellazioni, ed è comodissima per apprendere a conoscere il cielo. L' autore l'aveva composta per la d'Etigny, il cui marito era intendente di Auch, e l' ha fatta ristampare in seguito alle sue *Lettres sur l'astronomie*; II *Observations astronomiques faites à Toulouse*, Avignone, 1777, in-4; Darquier ne pubblicò un secondo volume a Parigi nel 1782, e ne stampò la continuazione nelle *Memorie* dell' Accademia delle Scienze di Tolosa, e nell' *Histoire céleste française* di Lalande; III *Observation de l'éclipse du soleil du 24 Juin 1778, ec., troduite de l'espagnol*, Tolosa, 1780, in-8, opuscolo ristampato nel *Journal de physique*, di Aprile 1780; IV *Lettres sur l'astronomie pratique*, 1786, in-8; V *Élémens de géométrie, traduits de l'anglais de Simpson*, 1766, in-8; VI *Lettres cosmologiques sur la construction de l'univers, traduites de l'allemand de Lambert*, Amsterdam, 1801; le note sono di d'Ultenthove, che fu l'editore.

DASSIÉ, costruttore di vascelli del re di Francia ad Hâvre, si applicò con successo alla pratica dell'arte sua e divenne pure peritissimo nella scienza nautica, cui ebbe campo di porre in pratica in varj viaggi che fece in America. I suoi scritti sono: I *Architecture navale avec le routier des Indes orientales et occidentales*, Parigi, 1677, in-4. Questo libro riuscì utilissimo nel suo tempo, esponendo moltissime cose che invano sarebbersi ricercate in altri autori, ma oggi è affatto dimenticato pei progressi immensi che ha fatto l' architettura navale, nè è più da consultarsi che per la storia dell' arte. II *Description générale des côtes de l'Amérique avec les moeurs et usages des peuples qui les habitent*, Rouen, 1677, in-4; III *Le pilote expert*, Hâvre, 1683, in-4; Anco questo libro, sebbene attesti lo zelo e le cognizioni dell'autore, non serve più per la pratica.

DASYPODIUS (Corrado), celebre matematico del XVI secolo, nato a Strasburgo, era figlio di Pietro Rauchfuss, dotto ellenista di Frauenfeld in Svizzera, che aveva cambiato il suo nome, che significava in tedesco *piede villoso*, nel nome di Dasypodius, che ha in greco il medesimo significato. Corrado Dasypodius fu professore di matematiche a Strasburgo: egli si diede particolarmente allo studio de' geometri greci, e rese un gran servizio alla scienza pubblicando in greco ed in latino i primi due libri di Euclide, e le proposizioni dei tredici libri susseguenti, Strasburgo, 1564, in-8: a lui si attribuisce pure una traduzione degli *Sferici* di Teodosia, e dell' *Ottica* e della *Catottrico* di Euclide. Pubblicò ancora dei comenti sui primi sei libri di Euclide in seguito ad un lavoro cominciato da Cr. Herlinus, che l' avea preceduto nella sua cattedra. Quest' opera intitolata: *Analysis geometrica sex librorum Euclidis*, Strasburgo, 1566, in fol. non è che un lavoro pedantesco, in cui le dimostrazioni del celebre geometra greco si trovano presentate sotto la forma di sillogismi, dimanierschè una proposizione di quindici a venti linee viene stemperata in parecchie pagine e non è sovente che più intrigata, o almeno è più difficile di tenerle dietro. Il primo e il quinto libro sono di Herlinus; gli altri quattro appartengono a Dasypodius. Egli proponevasi di raccogliere e di pubblicare in un sol corpo tutti i matematici greci, ma la morte lo rapì il 26 Aprile 1600, in età di 68 anni, prima che avesse potuto mandare ad esecuzione questo progetto. Il famoso orologio della cattedrale di Strasburgo, che per lungo tempo è stato reputato il più bello di tutta l'Europa, venne eseguito nel 1580 sui disegni di Dasypodius. Egli stesso ne diede la descrizione nel suo *Heron mathemoticus*, Strasburgo, 1580, in-4. Si hanno di Dasypodius anco le seguenti opere: I *Institutionum mathemoticarum volumen primum, secundum et tertium*, Strasburgo, 1567-70, 2 vol. in-8; II *Protheoria mathematica*, Strasburgo, 1593, in-8. III Λεξικον, *seu Dictionorium mathematicum, in quo definitiones et divisiones continentur Arithmeticae, Geo-*

metriae, *Astronomiae et Harmoniae*, *graece et latine*, Strasburgo, 1573, in-8; ed ivi, 1579, in-8, seconda edizione arricchita della traduzione di Erone alessandrino, e della nomeoclatura dei vocaboli geometrici. Per maggiori notizie su questo matematico si consulti Blomhof, *Saggio sulla vita e sulle opere di Corrado Dasypodius*, con una prefazione di Kaestner, Gottinga, 1798, in-8.

DATO. Termine generale col quale s'indica nelle matematiche qualunque specie di grandezza che si suppone conosciuta. Così, si dice un numero *dato*, una linea *data* ec.

In generale i *dati* di un problema sono le quantità conosciute per mezzo delle quali bisogna costruire le quantità incognite o cercate.

Allorquando la posizione di una figura geometrica è conosciuta, si dice ancora che questa figura è *dato di posizione*. Per esempio, quando un circolo è realmente descritto sopra un piano, il suo centro è *dato* di posizione, la sua circonferenza è *data* di grandezza, e il circolo è *dato* di posizione e *dato* di grandezza.

DECADE (*Aritm.*). Questa parola fu impiegata dagli autori antichi per indicare ciò che attualmente si chiama una *diecina*. Gli autori del calendario repubblicano l'avevano adottata nella loro terminologia, e i loro tre periodi di dieci giorni nei quali essi dividevano i mesi, portavano il nome di *decadi*.

DECAGONO (*Geom.*) (da δεκα, *dieci* e da γωνια *angolo*). Figura piana che ha dieci lati e dieci angoli.

Quando gli angoli sono eguali fra loro, come pure i lati, il *decagono* dicesi *regolare*. Allora può inscriversi e circoscriversi al circolo. *Vedi* Circolo, numeri 24 e 26.

La somma degli angoli di un decagono essendo eguale a 8 volte 2 retti (*Vedi* Poligono), ossia a 16 retti, l'angolo del decagono regolare è equivalente a $\frac{16}{10}$ d'angolo retto. Quest'angolo è perciò di 144° sessagesimali

Se indichiamo con r il raggio del circolo circoscritto a un decagono regolare, il lato di questo decagono sarà dato dall'espressione

$$c = r \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

c indicando questo lato. Questa relazione può servire a determinare il raggio del circolo circoscritto allorquando il lato è conosciuto; perciò gli vien dato la forma

$$r = \frac{2c}{\sqrt{5} - 1}.$$

Essa è dedotta dalla divisione in *medio ed estrema ragione* del raggio del circolo circoscritto; il lato del decagono regolare essendo eguale al più grande dei due segmenti. *Vedi* Esagono.

Così, per inscrivere un decagono regolare in un circolo dato, bisogna dividere il suo raggio in media ed estrema ragione (*Vedi* Applicazione dell'Algebra n.° 20), e il più gran segmento è il lato del decagono.

La superficie di un poligono regolare qualunque essendo eguale alla metà del prodotto del suo perimetro pel suo *apotema*, siccome il perimetro del decagono è eguale a 10 volte il suo lato, la sua superficie sarà

$$S = 5c \cdot h,$$

S indicando la superficie, e h l'apotema. Ma l'apotema essendo uno dei lati

dell'angolo retto del triangolo rettangolo che ha il raggio del circolo circoscritto per ipotenusa e il semi-lato del decagono per terzo lato, abbiamo

$$h = \sqrt{\left[r^2 - \frac{c^2}{4}\right]} = \frac{1}{2}\sqrt{(4r^2 - c^2)},$$

così l'espressione della superficie è

$$S = \frac{5}{2}\, c\sqrt{(4r^2 - c^2)}.$$

Per avere questa superficie solamente in funzione del lato, o solamente in funzione del raggio, basta sostituire in quest'ultima eguaglianza, il valore di r in c, o quello di c in r, e si ottiene

$$S = \frac{5c^2}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}},$$

$$S = \frac{5r^2}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

Calcolando i coefficienti di c^2 e di r^2, queste due espressioni si riducono a

$$S = 7,694209 \times c^2,$$
$$S = 2,938927 \times r^2;$$

il che è sufficiente per la pratica.

Alcune volte si dà il nome di Decagono a un'opera di fortificazione composta di 10 bastioni. *Vedi* Fortificazione.

DECAGRAMMO. Misura di gravità eguale a 10 grammi.

DECALITRO. Misura di capacità eguale a dieci litri.

DECAMETRO. Misura di lunghezza eguale a dieci metri. *Vedi* Misura.

DECANO (*Astron.*) Nome che gli antichi astronomi davano all'arco di dieci gradi, o al terzo di un segno. *Vedi* Segno.

DECILE o DESTILE (*Astron.*). Antica parola di astronomia o piuttosto di astrologia, colla quale s'indicava l'*aspetto* (*Vedi* Aspetto) di due pianeti distanti l'uno dall'altro di 36 gradi o della decima parte dello zodiaco.

DECIMALE. La divisione decimale è quella che ha luogo di *dieci* in *dieci*; così la nostra scala di numerazione è una *scala decimale*, perchè il valore delle cifre aumenta di dieci in dieci secondo il posto che esse occupano. *Vedi* Numerazione.

Frazioni decimali. Si chiamano così le frazioni che hanno per denominatori delle potenze intere del dieci, tali come $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{55}{1000}$, ec. Dalla natura del nostro sistema di numerazione, possiamo esprimerle, facendo astrazione dai loro denominatori, solamente pel posto che facciamo occupare alle cifre dei loro numeratori. Infatti, avendo convenuto di dare ad una cifra un valore dieci volte maggiore quando è posta alla sinistra di un'altra, di quello che essa esprime isolatamente, se adottiamo questa regola in tutta la sua generalità, è evidente che il valore relativo di più cifre scritte le une accanto all'altre, deve diminuire di dieci in dieci andando da sinistra a destra; così nella quantità rappresentata da 5555, la seconda cifra vale 10 volte meno della prima, la terza dieci volte meno della seconda, e cento volte meno della prima, e la quarta

Digitized by Google

dieci volte meno della terza, o cento volte meno della seconda, e mille volte meno della prima. Se dunque la prima esprime 5 unità assolute, la seconda esprimerà $\frac{5}{10}$, la terza $\frac{5}{100}$, e la quarta $\frac{5}{1000}$. Questa circostanza viene indicata da una virgola situata dopo la cifra dell'unità, vale a dire che nel caso in questione si scrive 5,555, allora le cifre alla sinistra della virgola sono le cifre intere e quelle alla destra sono le cifre decimali; in questa maniera, la scala completa di numerazione è

ec.	1	1	1	1	1	,	1	1	1	1	1	ec.	
	diecimila	mille	centinaja	diecina	unità		decimo	centesimo	millesimo	dieci millesimo	centomillesimo		
. . . . . ec.													ec. . . . .

Quando non vi sono interi, in luogo della cifra delle unità si pone uno zero; così 0,1 indica $\frac{1}{10}$, 0,54 indica $\frac{54}{100}$, 0,003 indica $\frac{3}{1000}$, e così di seguito.

Questa maniera di scrivere le frazioni decimali, introdotta dal geometra inglese Oughtred, facilita estremamente i calcoli, e possiamo vedere agli articoli Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione, Divisione, Estrazione delle radici, ed Elevazione a potenze che vengono eseguite sopra queste frazioni tutte le operazioni dell'aritmetica con altrettanta facilità come sopra i numeri interi.

Si riduce una frazione ordinaria in frazione decimale, dividendo il suo numeratore pel suo denominatore, dopo aver cominciato ad aggiungere tanti zeri alla destra delle cifre del numeratore quanti ne sono necessarii acciocchè l'operazione si faccia esattamente, o per ottenere una sufficiente approssimazione, se la frazione ordinaria non può esprimersi esattamente con una frazione decimale. Per ridurre $\frac{3}{4}$ per esempio in frazione decimale, bisogna aggiungere due zeri, e si ha

$$\frac{300}{4} = 75,$$

allora il dividendo essendo stato reso cento volte maggiore, il quoziente è egualmente 100 volte più grande, così, in luogo di esprimere 75 unità, esso non deve esprimere che una quantità cento volte minore, vale a dire $\frac{75}{100}$, ovvero 0,75; si ha perciò

$$\frac{3}{4} = 0,75.$$

Se si trattasse della frazione ordinaria $\frac{5}{7}$, qualunque sia il numero degli zeri che si aggiungesse alla destra del 5, sarebbe impossibile di effettuare esattamente la divisione per 7, e in questo caso, non possiamo ottenere che una frazione de-

cimale approssimativa; così, aggiungendo 1, 2, 3, 4, 5, ec., zeri, e dividendo senza tener conto dell'ultimo resto, si ha

$$\frac{50}{7}=7 \quad \text{ovvero} \quad \frac{5}{7}=0,7,$$

$$\frac{500}{7}=71 \quad \text{ovvero} \quad \frac{5}{7}=0,71,$$

$$\frac{5000}{7}=714 \quad \text{ovvero} \quad \frac{4}{7}=0,714,$$

$$\frac{50000}{7}=7142 \quad \text{ovvero} \quad \frac{5}{7}=0,7142.$$

Il che si potrebbe continuare all'infinito, poichè dopo aver trovato sei cifre in quoziente, l'ultimo resto è di nuovo 5, e il medesimo periodo di 6 cifre ricomincia; dimodochè si ha

$$\frac{5}{7}=0,714285 \quad 714285 \quad 714285 \ldots \text{ all'infinito.}$$

La frazione decimale prende allora il nome di *frazione periodica*. *Vedi* Periodico.

Il problema di ridurre una frazione ordinaria in frazione decimale, può essere reso generale nella seguente maniera.

Sia $\frac{N}{M}$ una frazione ordinaria qualunque, e siano a, b, c, d, e, ec., le cifre decimali che danno

$$\frac{N}{M}=a.10^{-1}+b.10^{-2}+c.10^{-3}+d.10^{-4}+e.10^{-5}+ec.$$

abbiamo $N<M$, e si tratta di determinare a, b, c, d, e, ec.

Moltiplicando i due membri di quest'eguaglianza per 10 essa diviene

$$\frac{N.10}{M}=a+b.10^{-1}+c.10^{-2}+d.10^{-3}+e,10^{-4}+ec.$$

Allora a esprime degli interi, e b diviene la prima cifra decimale o la cifra dei *decimi*. Abbiamo dunque, indicando con N' il resto della divisione di $N.10$ per M

$$\frac{N.10}{M}=a, \text{ resto } N'$$

vale a dire

$$\frac{N}{M}=a+\frac{N'}{M}$$

e per conseguenza

$$\frac{N'}{M}=b.10^{-1}+c.10^{-2}+d.10^{-3}+ec.$$

Digitized by Google

Moltiplicando di nuovo i due membri di quest'eguaglianza per 10 essa diviene

$$\frac{N' \cdot 10}{M} = b + c \cdot 10^{-1} + d \cdot 10^{-2} + e \cdot 10^{-3} + \text{ec.},$$

ovvero

$$\frac{N' \cdot 10}{M} = b, \quad \text{resto } N''$$

indicando con N'', il resto della divisione di $N' \cdot 10$ per M. Si ha perciò ancora,

$$\frac{N' \cdot 10}{M} = b + \frac{N''}{M}$$

e

$$\frac{N''}{M} = c \cdot 10^{-1} + d \cdot 10^{-2} + e \cdot 10^{-3} + \text{ec.}$$

e così di seguito; donde è facile di concludere la seguente regola. Si moltiplica il numeratore per 10, e si divide il prodotto pel denominatore, il quoziente sarà la prima cifra decimale o la cifra dei *decimi*; si moltiplica quindi per 10 il resto della divisione, e si divide questo secondo prodotto pel denominatore, il quoziente sarà la seconda cifra decimale o la cifra dei *centesimi*; si moltiplica di nuovo per 10 il secondo resto, e si divide il prodotto pel denominatore, il quoziente sarà la terza cifra decimale o la cifra dei *millesimi*; si moltiplica ancora l'ultimo resto per 10, e si continua sempre nella medesima maniera, fino a tanto che si abbia per resto zero, o un numero già trovato. Nel primo caso, l'operazione è terminata; nel secondo, il periodo è trovato. Se dopo aver moltiplicato uno dei resti per 10, il prodotto fosse minore del denominatore, la divisione non potrebbe effettuarsi; allora, la cifra decimale corrispondente sarebbe zero, e bisognerebbe considerare questo prodotto come un resto, e moltiplicarlo per 10 per ottenere la cifra decimale seguente.

Sistema decimale. La divisione di dieci in dieci, essendo il fondamento dell'aritmetica, si è creduto che fosse naturale di adottarlo nei pesi e misure, quantunque esso non sia il più comodo, e adesso il nostro sistema metrico è *decimale*. L'esporremo alla parola Misura.

DECLINANTE (*Gnom.*). Si chiamano *quadranti declinanti* nella gnomonica, quei quadranti verticali la cui sezione coll'orizzonte fa un angolo col primo verticale. Se s'immagina che il piano del primo verticale giri intorno alla linea dello zenit e del nadir, questo piano diverrà *declinante* e non sarà più tagliato ad angolo retto dal meridiano. Alcuni chiamano declinante qualunque piano verticale o non verticale, la cui sezione coll'orizzonte non coincide col primo verticale. Altri poi chiamano declinante qualunque piano che non guarda alcuno dei quattro punti cardinali, cosicchè secondo essi perchè un piano non sia declinante basta che passi per la linea orizzontale che va da levante a ponente, o da mezzogiorno a settentrione. *Vedi* Gnomonica.

DECLINATORE (*Gnom.*). Strumento che serve a determinare l'inclinazione o la declinazione dei piani sui quali si vogliono costruire dei quadranti solari.

DECLINAZIONE (*Astron.*). La *declinazione* di un astro è la sua distanza dall'equatore celeste misurata sull'arco del circolo massimo che passa per l'astro e pei poli della sfera. Essa è, rapporto ai corpi celesti, ciò che è la *latitudine* rapporto ai luoghi terrestri.

La declinazione è o *boreale* o *australe*, secondochè l'astro si trova nell'emisfero boreale o nell'emisfero australe.

Per trovare la declinazione di un astro, si osserva prima l'altezza del polo al di sopra dell'orizzonte, vale a dire la latitudine del luogo ove si fa l'osservazione (*Vedi* Latitudine), e quindi si misura l'altezza dell'astro nel momento del suo passaggio pel meridiano, ovvero la sua distanza dallo zenit, che è il complemento dell'altezza. Quando la distanza dell'astro dallo zenit, che si chiama *boreale* se l'astro è nella parte boreale del cielo ed *australe* se l'astro è nella parte australe, ha la medesima denominazione della latitudine del luogo, la loro *somma* è la *declinazione*, la quale è della stessa denominazione della latitudine: se poi al contrario la distanza dallo zenit ha una denominazione opposta a quella della latitudine, la loro *differenza* è la *declinazione*, la cui denominazione è la stessa di quella della maggiore tra le due quantità. Questa regola è abbastanza evidente per non aver bisogno di dimostrazione.

Per esempio, l'elevazione del polo nord essendo di 47° 20′, l'altezza del sole al suo passaggio pel meridiano si è trovata eguale a 33° 25′, e per conseguenza la sua distanza dallo zenit eguale a 56° 35′: questa distanza è *australe*. Le denominazioni essendo differenti, la differenza tra 56° 35′ e 47° 20′, ossia 9° 15′, sarà la declinazione cercata, che è *australe*, perchè la distanza *australe* del sole dallo zenit è maggiore della latitudine *boreale*.

Le declinazioni insieme colle ascensioni rette servono a fissare la posizione degli astri sulla volta celeste, come le latitudini e le longitudini terrestri servono a fissare la posizione dei luoghi sulla terra.

Il moto proprio degli astri e la precessione degli equinozj facendo variare continuamente le loro ascensioni rette e le loro declinazioni, queste quantità si trovano anticipatamente calcolate nella *Connaissance des temps* di ogni anno pei bisogni dell'astronomia e della navigazione. *Vedi* Catalogo.

Circoli di declinazione. Si dà questo nome ai circoli massimi della sfera che passano pei poli del mondo, e sui quali si misura la declinazione.

Paralelli di declinazione. Si chiamano così i circoli minori della sfera, paralelli all'equatore.

Parallasse di declinazione. Arco del circolo di declinazione, che misura la quantità di cui la declinazione di un astro è aumentata o diminuita in forza della *parallasse di altezza*. *Vedi* Parallasse.

Refrazione di declinazione. Arco del circolo di declinazione, che misura la quantità di cui la declinazione aumenta o diminuisce in forza dell'effetto della refrazione.

Declinazione del piano verticale (*Gnom.*). Arco dell'orizzonte compreso tra il primo verticale e la sezione del piano del quadrante coll'orizzonte. *Vedi* Declinanta.

Declinazione dell'ago magnetico o della bussola. *Vedi* Variazione.

DECOMPOSIZIONE DELLE FORZE. (*Mec.*). Possiamo sempre sostituire una forza a due o più altre, che agiscano in direzioni differenti, e di cui essa sarebbe la *risultante*. Questa decomposizione, la di cui possibilità riposa sopra i medesimi principii della *composizione delle forze* è di un grand'uso nella meccanica. *Vedi* Forza.

DECOMPOSIZIONE DELL'EQUAZIONI (*Alg.*). Per risolvere un'equazione spesso si decompone in più altre che ne sono i suoi fattori; ed è con questo mezzo che Descartes è arrivato alla soluzione dell'equazioni del quarto grado decomponendo l'equazione generale

$$x^4+Ax^2+Bx+C=0,$$

in fattori del secondo grado

$$x^2+ax+b, \qquad x^2+cx+d$$

o ponendo l'eguaglianza ipotetica

$$x^4+Ax^2+Bx+C=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d).$$

Vedi Biquadratico.

DECUPLATO. Si chiama *rapporto decuplato* quello che esiste fra le *radici decime* di due numeri. Così a e b sono in *rapporto decuplato* di a^{10} e b^{10}; in generale, M ed N essendo due numeri qualunque, $\sqrt[10]{M} : \sqrt[10]{N}$ è il *rapporto decuplato* di M ad N. È importante di non confondere *decuplato* e *decuplo*.

DECLUPO. Termine di aritmetica che s'impiega per indicare una quantità *dieci* volte maggiore di un'altra. Per esempio, 40 è *declupo* di 4; 100 è declupo di 10, ec., ec.

DECUSSAZIONE (*Ottica*). Il punto di *decussazione* è quello in cui più raggi si tagliano, come il fuoco di uno specchio, d'una lente, ec.

DEE (Giovanni), matematico inglese nato a Londra il 13 Luglio 1527 da genitori oscuri. Di buon'ora si diede con ardore allo studio delle matematiche e dell'astronomia, e non tardò ad acquistare celebrità per le sue estese cognizioni nei diversi rami di queste scienze. Fu probabilmente questa fama esagerata del suo sapere che immerse Dee in gravi errori e diede ai suoi lavori una falsa direzione. La sua reputazione lo seguì sul continente, dove si recò nel 1548. A Lovanio fu consultato come un oracolo, nè fu accolto con minor premura e rispetto a Parigi, ove diede pubbliche lezioni di geometria e commentò Euclide. Di ritorno in patria, si abbandonò a tutti gli errori dell'astrologia giudiziaria, e fu appunto per oggetti relativi a tale pretesa scienza che la regina Elisabetta si valse più volte de' suoi talenti, sebbene questa principessa lo adoperasse in altri lavori più degni delle cognizioni che realmente possedeva, siccome la riforma del calendario: il suo lavoro su tale proposito si trova manoscritto nella biblioteca cottoniana. Nel 1578 Dee abbandonò di nuovo l'Inghilterra, e si diede a pratiche affatto indegne della scienza, e che da alcuni lo hanno fatto porre nella stessa classe di Borri e di Cagliostro: noi non lo seguiremo in queste diverse fasi della sua vita, che fu trista, agitata da vane speranze, e consumata in lavori senza risultato. La regina Elisabetta essendo giunta in cognizione dell'estrema miseria nella quale quest'uomo celebre era caduto, lo chiamò in Inghilterra, ove restò fino alla sua morte avvenuta nel 1608 a Mortlake nella contea di Surrey.

Ad onta dello stato di miseria in cui visse lungo tempo, Dee era giunto a formarsi una bellissima biblioteca ed un gabinetto di curiosità non poco notabile. Fra le opere che ha pubblicato, e che tutte più o meno portano l'impronta delle idee che formarono la sua infelicità, non citeremo che le seguenti: I *Monos hieroglyphica, mathematice, mogice, cabalistice et analogice explicato*, Anversa, 1564, in-4; ivi, 1584; Francfort, 1591, in 8; quest'opera si trova pure stampata nel tomo secondo del *Theatrum chemicum* di Zetzner impresso a Strasburgo nel 1659; II *Propoedeumata aphoristica de praestantioribus quibusdam naturae virtutibus*, Londra, 1556, 1558, 1568, in-4; III *Parallacticae commentationis proxeosque nucleus*, Londra, 1573, in-4; IV *De stella admirando in Cassiopeiae asterismo coelitus demissa ad orbem usque Veneris, iterum in coeli penetralia perpendiculariter retracta*: tale dissertazione è seguita da un'altra intitolata: *Hipparchus redivivus*. Per ulteriori informazioni su questo dotto si ricorra alla *Biografia universale*, e a Lilly, *History of his life and times from 1602 to 1681*, Londra, in-8.

DEFETTIVO. (*Vedi* Difettivo).

DEFICIENTE (*Aritm.*). Quando la somma delle parti aliquote di un numero è minore di questo numero, si chiama *deficiente*, in opposizione al numero che si chiama abbondante, nel quale ha luogo il contrario. 10, per esempio, è un

numero deficiente, perchè la somma delle sue parti aliquote, 1, 2, 5, è minore di questo medesimo numero.

DEFINIZIONE. In generale con questa parola s'intende la specificazione dei caratteri che distinguono un oggetto, ovvero l'enumerazione dell'idee semplici che formano un'idea composta.

I logici riconoscono due specie di definizioni: quelle dei *nomi* e quelle delle *cose*. Le prime hanno per oggetto di spiegare il senso o la significazione di una parola; le seconde, quello di *limitare* un oggetto per distinguerlo da tutti gli altri. Le difinizioni matematiche, non ostante quello che ha preteso di dirne d'Alembert nell'encicopledia, non sono semplici definizioni di nomi; esse hanno ancora un carattere essenzialmente distinto delle difinizioni puramente fisiche, poichè in fisica, l'oggetto è dato e precede la sua definizione, nel mentre che nelle matematiche l'oggetto è *costruito* dalla medesima sua definizione. Infatti, definire nelle matematiche, vale operare una sintesi intellettuale il di cui risultamento è un oggetto egualmente intellettuale, realizzabile per verità nello *spazio* o nel *tempo*, ma che non esisteva avanti questa sintesi. Così, quando si definisce il *Triangolo: un'estensione piana limitata da tre rette che si tagliano due a due*, non solamente fissiamo il senso della parola *triangolo*, ma ancora costruiamo intellettualmente l'estensione particolare che indicheremo d'ora in avanti con questo nome. Ora, questo triangolo, non è ne un triangolo *rettangolo*, ne un triangolo *isoscele*, ne un triangolo *equilatero*, non è finalmente alcun triangolo particolare, esso è il triangolo *in generale*, il triangolo *tipo*, di cui tutti quelli che si possono descrivere fisicamente non sono che immagini grossolane di casi particolari. Ci potrà esser detto, che ci siamo elevati per *astrazione* all'idea generale del triangolo, dopo avere *osservato* dei triangoli di diverse specie, quando, al contrario non è che passando per nuovi limiti o per nuove sintesi che dall'idea generale discenderemo all'idee particolari di triangolo *rettangolo isoscele*, *equilatero*, ec.? Il carattere distintivo della *definizione matematica* è perciò quello di *creare* gli oggetti della scienza il di cui andamento è ancora dato dal più alto grado di certezza, perchè essa non opera che sopra le sue proprie costruzioni e che in tutte le sue proposizioni la sintesi ha sempre preceduto l'analisi.

DEGAULLE (Giovanni Batista), ingegnere della marineria, professore di navigazione, e corrispondente dell'Istituto, nato nel 1732 ad Attigny, servì dapprima sui vascelli dello stato e del commercio; ma le sue infermità costretto avendolo ad abbandonare il mare nel 1766, passò ad insegnare idrografia all'Hâvre, e poi ad Honfleur, ove morì il 13 Aprile 1810. Occupato sempre in tutto ciò che tendeva ad accrescere i vantaggi ed il bene della navigazione, inventò alcuni strumenti nautici e pubblicò diverse carte marine assai stimate, e tra le altre quella della Manica. Pubblicò ancora le seguenti memorie: I *Sur les travaux des ports du Hâvre, de Dieppe, ec.*, in-4; II *Instruction détaillée sur la manière de finir la vérification des boussoles*, 1803, in-8; III *Construction et usage du sillomètre*, in-12; IV *Nouveau moyen de mesurer la hauteur du soleil avec l'octant sans voir l'horizon*, in 12.

DEGEN (Carlo Ferdinando), matematico danese, nato il primo Novembre 1766, dopo aver sostenuto diversi impieghi nella istruzione pubblica ottenne nel 1814 una cattedra di matematiche nell'università di Copenhagen, e morì in quest'ultima città nel 1825. Degen scrisse parecchie memorie interessanti che si leggono negli *Atti* dell'Accademia delle Scienze di Copenhagen: nelle *Nuove Memorie* di quella di Pietroburgo, Tom IX, 1824, si trovano di lui, in francese, delle *Méditations sur un système de recurrences combinées, et sur la manière de détacher chacune des séries d'avec ce système, et de le continuer séparément et indépendamment des séries conjointes*. Ha pubblicato pure la seguente memo-

rie: *Canon Pellianus, sive tabula simplicissima aequationis celebratissimae* $y^2 = ax + 1$ *solutionem pro singulis numeri dati valoribus ab* 1 *usque ad* 1000 *in numeris integris exhibens*, Copenhagen, 1817, in-4.

DEIDIER (L'Abate), geometra francese del secolo XVIII, e professore di matematiche alla scuola di artiglieria di La Fère, si rese celebre per la pubblicazione di parecchie opere elementari, che hanno molto servito a diffondere e render più facile la scienza. I suoi trattati se sono rimasti oggi al di sotto dei progressi immensi che hanno fatto la matematiche, si distinguono però per la chiarezza, la precisione, l'ordine e l'abbondanza delle materie, e potrebbero essere ancora consultati con frutto. Si hanno di lui: I *Arithmétique des géomètres, ou nouveaux élémens de mathématiques*, Parigi, 1739, in-4; II *La science des géomètres, ou la théorie et la pratique de la géomètrie*, Parigi, 1739, in-4; III *La mesure des surfaces et des solides par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité*, Parigi, 1740, in-4; IV *Calcul différentiel et calcul intégral, expliqués et appliqués à la géométrie*, Parigi, 1740, in-4; V *Mécanique générale, pour servir d'introduction aux sciences physico-mathématiques*, Parigi, 1741, in-4 Questi cinque volumi formano un corso compiuto di studj matematici; VI *Élémens généraux des principales parties des mathématiques, nécessaires à l'artillerie et au génie*, Parigi, 1745, 2 vol. in-4; l'autore compose quest'opera rifondando i primi due volumi del corso precedente, ad aggiungendovi un trattato di prospettiva; essa fu ristampata nel 1773 con parecchie aggiunte e variazioni fatte da Para du Phanjas, che al titolo originale aggiunse le espressioni: *édition dirigée, rectifiée, présentée avec plus d'ordre et de goût, et en plusieurs articles réformée ou perfectionnée par l'auteur de la théorie des êtres sensibles*; in questa seconda edizione manca però il corso di prospettiva che fu stampato separatamente con note di Cochin e col titolo di *Traité de perspective*, Parigi, 1773, in-4; VII *Le parfait ingénieur français, ou la fortification offensive et défensive*, Amsterdam, 1734, in-4; ivi, 1744; Parigi, 1757, in 4; Lipsia, 1762, in-4: quest'opera fu tradotta in tedesco e pubblicata a Lipsia nel 1762, in-4; VIII *Nouvelle réfutation de l'hypothèse des forces vives*, in-12.

DELAMARCHE (C. F.), nato nel 1740 e morto nel 1817, ha pubblicato un *Traité de la sphère et de l'usage des globes célestes et terrestres*, Parigi, 1790, assai stimato e che ha avuto cinque edizioni di cui l'ultima è del 1825.

DELAMBRE (Giovan Batista Giuseppa), uno de'più celebri astronomi di questo secolo, nacque ad Amiens il 19 Settembre 1749. Le disposizioni che manifestò durante i suoi primi studi non annunziavano certamente il posto che un giorno avrebbe occupato nella scienza. Egli seguì con assiduità le lezioni dell'abate Delille, e l'affezione particolare che per lui prese quell'amabile ed elegante scrittore sembrava che secondando le stesse sue inclinazioni dovesse eccitarlo a seguire la carriera delle lettere. Compito in patria il corso di rettorica, Delambre desiderava di recarsi a Parigi per proseguirvi e terminarvi gli studi, ma i suoi mezzi pecuniarj erano insufficienti per le spese che a tal fine occorrevano: a questo inconveniente però pose rimedio l'amicizia di Delille, che gli procurò un posto gratuito nel collegio di Plessis. Spirato il tempo pel quale tener doveva quel posto, uscì dal collegio, e poichè la sua famiglia non poteva sopportare il grave dispendio di mantenerlo a Parigi per prolungare il periodo de' suoi studi, piuttosto che tornare in patria prescelse di procurarsi da sè medesimo i mezzi di sussistenza. Dopo più di un anno d'indecisione e di privazioni, imprese a tradurre delle opere straniere in francese, e così furono da lui eseguite nei primi quindici anni dopo la sua uscita dal collegio parecchie traduzioni di autori latini, greci, italiani ed inglesi. Egli dava ancora private lezioni di belle lettera, e col frutto di queste due occupazioni non solo fu in grado di provvedere a' suoi biso-

gni, che stante la sua rigorosa parsimonia erano ben limitati, ma potè ancora formarsi una scelta biblioteca dei migliori autori.

Frattanto essendosi recato a Compiègne per educarvi un giovine, si diede allo studio delle matematiche onde insegnarle al suo allievo. Delambre aveva allora venticinque anni, ma il carattere distintivo del suo talento era il coraggio e la perseveranza, quindi gli riuscì di superare tutte le difficoltà che in tale ardua impresa ebbe ad incontrare. Tornato a Parigi onde assumervi l'educazione dei figli del sig. d'Assy, continuò a dedicare tutte le ore di ozio che gli rimanevano alle matematiche, ed in breve vi divenne forte abbastanza da intraprendere da sè solo lo studio dell'astronomia. Egli aveva già letto e commentato le opere di Lalande, quando si presentò ad ascoltare le lezioni che questo celebre astronomo dava al collegio di Francia: vi si fece immediatamente distinguere per la profonda sua erudizione, ed in breve divenne l'allievo prediletto e l'amico del professore, che volle pure averlo per collaboratore nei suoi lavori.

Nel 1785 presentò nelle Memorie dell'Accademia di Berlino gli elementi dell'orbita solare dedotti dalle osservazioni di Maskelyne col metodo di La Caille: in seguito riprese questo stesso lavoro, e col metodo delle equazioni di condizione costruì per la prima volta le tavole solari che Lalande inserì nel 1792 nella terza edizione della sua *Astronomia*. Delambre era all'Accademia delle Scienze, nel 1787, il giorno in cui Laplace lesse la sua teoria delle grandi ineguaglianze di Saturno e di Giove: colpito dall'importanza delle scoperte di quel gran geometra, formò tosto il progetto di calcolare di nuovo tutte le osservazioni di quei due pianeti; e le tavole che effettivamente calcolò furono dall'Accademia stampate nel 1789. Quando la recente scoperta del pianeta Urano eccitava l'attenzione degli astronomi, Delambre si occupò nel 1789 a formare le tavole del suo moto, indotto forse a ciò dall'avere l'Accademia delle Scienze proposto per il concorso dell'anno 1790 la determinazione della sua orbita. Quantunque quel pianeta non avesse percorso che un piccolo arco della sua orbita negli otto anni che erano scorsi dalla sua scoperta, poichè ne impiega 80 a fare l'intera sua rivoluzione, riuscì a formare delle tavole abbastanza esatte che ottennero il premio proposto. In quel tempo Laplace presentò una nuova teoria dei satelliti di Giove, e le tavole di questi satelliti formarono appunto l'oggetto di un premio che nel 1792 fu accordato ad un immenso lavoro di Delambre. Tali importanti fatiche gli aprirono finalmente le porte dell'Accademia delle Scienze di Parigi, ove fu ricevuto ad unanimità di suffragj il 15 Febbrajo 1792 nella sezione di di geometria in rimpiazzo di Charles.

Nello stesso anno 1792 Delambre fu incaricato insieme con Méchain di misurare la meridiana della Francia. Si pensò in quel tempo che la maggior perfezione che si era data agli strumenti avrebbe potuto condurre a risultati più esatti, se si fosse misurato un arco del meridiano più grande di quello che fin allora si era adoperato. Oltre questo vantaggio, che non erasi potuto ricavare dagli altri lavori dei quali essa era stata precedentemente l'oggetto (*Vedi* Cassini e La Caille), questa grande operazione trigonometrica doveva aver quello di fissare in un modo esattissimo l'unità fondamentale per tutte le misure dell'estensione. L'arco del meridiano che Delambre e Méchain furono incaricati di misurare si stendeva da Dunkerque fino a Barcellona e comprendeva circa nove gradi, estensione più grande di tutte le altre che fino allora erano state determinate. Le operazioni astronomiche e geodetiche di questa bella impresa furono eseguite da Delambre nella parte boreale, cominciando da Dunkerque e proseguendo fino a Rodez, mentre Méchain fece quelle della parte australe da Rodez fino a Barcellona in Spagna. Negli ultimi giorni di Giugno 1792, Delambre cominciò la triangolazione nei contorni di Parigi, e la proseguì con attività fino al 1793, epoca in cui le grandi

turbolenze politiche di quei tempi procellosi l'obbligarono ad abbandonare il suo lavoro, cui non riprese che nel Giugno 1795 dopo diciotto mesi d'interruzione, e colla sua coraggiosa ed infaticabile perseveranza lo terminò nel Novembre 1798. In quell'epoca i lavori riuniti di Delambre e di Méchain furono consegnati ad una commissione di dotti stranieri e nazionali che su di essi fissò la lunghezza definitiva del metro nel 1799. Delambre fece circa i due terzi di quella vasta operazione i cui elementi e risultati sono con ammirabile fedeltà riferiti nella *Base del sistema metrico*, opera interamente compilata da Delambre e coronata nel 1810 nell'occasione dei premj decennali.

Nel tempo che questo infaticabile astronomo era occupato della misura della meridiana, non solo misurò ancora con nuovi metodi immaginati da Borda e con estrema esattezza due altre basi di 6000 tese, l'una presso Melun e l'altra presso Perpignano, ma completò altresì e pubblicò le tavole trigonometriche decimali di Borda, alle quali premise un esteso discorso sulle formule atte alla costruzione delle medesime. Delambre entrò nell'Ufizio delle longitudini allorchè fu istituito nel 25 Giugno 1795, e nel 13 Dicembre successivo alla prima formazione dell'Istituto fu eletto nella sezione di geometria. Gli furono quindi affidate alte funzioni politiche, e nel 31 Giugno 1803 la classe delle Scienze dell'Istituto lo nominò suo segretario perpetuo, il che però non gl'impedì di passare nel 1807 al collegio di Francia a darvi lezioni di astronomia nella cattedra rimasta vacante per la morte di Lalande.

In mezzo a tali moltiplici occupazioni, Delambre seppe trovar tempo a compiere un gran numero di vaste ed importanti opere, di cui una sola parte sarebbe stata sufficiente ad occupare l'intera vita di qualunque laborioso scrittore. Fece nuovamente i calcoli delle tavole solari, che nel 1792 aveva aggiunto all'*Astronomia* di Lalande, e i risultati principali di questa faticosa operazione furono pubblicati nel 1802 nella *Meccanica celeste*; mentre le nuove tavole solari che ne formò vennero adottate dall'Ufizio delle longitudini e pubblicate nel 1806. Costruì nuove tavole dei satelliti di Giove, e compose un corso compiuto di astronomia teorica e pratica che fece dimenticare immediatamente quello di Lalande. Aveva 63 anni, quando imprese a scrivere la storia dell'astronomia da' suoi più remoti tempi fino a noi: niuno era più atto di lui per un tale gigantesco lavoro, e niuno forse se ne sarebbe meglio disimpegnato nel breve tempo che v'impiegò. In questa, come anche nelle altre sue opere, è stato rimproverato di poca chiarezza e di poco metodo, ma i suoi stessi nemici non hanno potuto negargli una rara imparzialità ed un amore il più puro per la verità. Non intendiamo per questo di dire che siano affatto prive di fondamento alcune delle mende che gli sono state apposte; nessuna umana produzione ne è esente: è indubitato però che i suoi scritti, che ancora lungo tempo saranno stimati e consultati con frutto, gli hanno giustamente meritato un posto distinto fra gli astronomi ed i geometri moderni. Cavaliere e poscia ufficiale della Legione d'Onore, cavaliere dell'ordine di S. Michele, ascritto alla maggior parte delle estere accademie, onorato della stima universale, Delambre fu tolto alla scienza e a' numerosi suoi amici il 19 Agosto 1822.

Ecco i titoli delle sue opere: I *Tables de Jupiter et de Saturne*, Parigi, 1789, in-4; dovevano far parte di un volume di memorie di dotti stranieri che non terminò e di cui non comparvero che queste sole tavole; II *Tables du Soleil, de Jupiter, de Saturne, d'Uranus et des satellites de Jupiter*, inserite nell'*Astronomia* di Lalande, Parigi, 1792; III *Méthodes analytiques pour la détermination d'un arc du méridien, précédées d'un memoire de M. Legendre sur le même sujet*, Parigi, 1799, in-4; IV *Tables trigonométriques décimales*, ou *Tables des logarithmes des sinus, sécantes et tangentes, suivant la division*

du quart de cercle en cent degrés, et précédées de la Table des logorithmes des nombres, ec., calculées par Charles Bordo, revues, augmentées et publiées par J. B. J. Delambre, anno IX (1801) in-4; V *Tables du Soleil*, pubblicate dall'Ufizio delle longitudini nel 1806, in-4; VI *Base du système métrique décimal, ou Mesure de l'arc du méridien compris entre les parallèles de Dunkerque et Barcelone fait dans 1792 et années suivantes par MM. Méchain et Delambre, rédigée par Delambre*, Parigi, 1806, 1807, 1810, 3 vol. in-4; quest'opera fa parte della raccolta dell'Istituto di Francia; VII *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis l'an 1789, et sur leur état actuel*, presentato all'imperatore il 6 Febbrajo 1808, e impresso a Parigi nel 1810 in-4; VIII *Abrégé d'astronomie, ou Leçons élémentaires d'astronomie théorique et pratique données au Collège de France*, Parigi, 1813, in-8, e ivi, 2ª ediz., 1837, in-8; IX *Traité complet d'astronomie théorique et pratique*, Parigi, 1814, 3 vol. in-4; X *Tables écliptiques des satellites de Jupiter, d'après la théorie de M. de Laplace et la totalité des observations faites depuis 1662 jusqu'à l'an 1802*, Parigi, 1817, in-4; XI *Histoire de l'astronomie ancienne*, Parigi, 1817, 2 vol. in-4; XII *Histoire de l'astronomie au moyen âge*, Parigi, 1819, in-4; XIII *Histoire de l'astronomie moderne*, Parigi, 1821, 2 vol. in-4; XIV *Histoire de l'astronomie au dix-huitième siecle, publiée par M. Mathieu*, Parigi, 1827, in-4; XV *Histoire de la mesure de la terre*, opera postuma che è ancora sotto il torchio.

Oltre queste opere separate, Delambre ha pubblicato un gran numero di memorie nelle collezioni di Pietroburgo, Torino, Stockholm e Berlino, indipendentemente da quelle inserite nella raccolta dell'Istituto di Francia. Altre ventotto memorie di lui sopra differenti soggetti di astronomia, di geodesia, di storia dell'astronomia, ec., si leggono nell'Almanacco *La Connaissance des temps*, dal 1788 al 1820, e per vederne i titoli si riscontrino gl'indici che a tal collezione ha aggiunto Coste negli anni 1807 e 1822. Nel *Supplimento* alla *Biografia universale* si trovano indicati tutti i fonti onde attingere più minute notizie intorno a questo dotto astronomo.

DELFINO (*Astron.*) Costellazione boreale situata presso l'equatore celeste (*Tav.* LIX); essa è una delle quarantotto costellazioni di Tolomeo, e comprende 18 stelle nel Catalogo britannico. Trovasi rammentata coi diversi nomi di *Delphinus*, *Delphin*, *Animal repandirostrum*, *Incurvicervicum*, *Piscium rex*, *Hermippus*, *Simus*, *Persuasor Amphitrites*, *Vector Arionis*, *Tyrrheni nauta*, *Apollo*, *Musicum signum*, *Neptunus*, *Triton*.

Il Delfino era riguardato dagli antichi come amico e difensore degli uomini. Telemaco fu salvato da un delfino, come pure il celebre poeta lirico Arione; il delfino servì a scoprire Anfitrite e a piegarla ai voti di Nettuno; quest'animale era ancora riguardato come il simbolo del Dio del mare; Apollo si cangiò in delfino; finalmente i poeti dicono che Tritone figlio di Nettuno avendo servito gli Dei nella guerra dei Giganti col mezzo di una tromba da lui inventata che mandava un suono terribile, fu in ricompensa cangiato in delfino e posto nel cielo.

DELFINO (Federico), medico ed astronomo nato a Padova nel 1477. Si acquistò molto nome nella medicina; ma alcuni disgusti che ebbe a provare nell'esercizio di tal professione lo indussero ad abbandonarla e a dedicarsi esclusivamente all'astronomia, scienza a cui sentivasi naturalmente inclinato e nella quale fece rapidi progressi. Nel 1521 successe a Tommaso Filologo nella cattedra di astronomia della università di Padova, e vi rimase fino alla sua morte avvenuta nel 1547. Abbiamo di lui: *De fluxu et refluxu oquae maris, subtilis et erudita disputatio.* — *De motu octavae sphaerae*, Venezia, 1559, in-fol. Questa prima

edizione è dovuta a Girolamo Contarini, uno degli allievi di Delfino; ne esiste una seconda fatta a Basilea, 1577, in-fol., a cui si aggiunse il *Trattato dell'olometro* di Abele Foulon, tradotto in latino da Niccolò Stoup. Papadopoli nella sua *Historia gymnasii patavini*, I, 306, cita ancora di Delfino: *Annotationes in Tabulas Alfonsinas. — Liber de phoenomenis sublunaribus et astronomica parallaxi.* Si veda il *Supplimento* alla *Biografia universale*.

DELISLE (Claudio), geografo francese, nato a Vancouleurs nella diocesi di Toul il 5 Novembre 1644 e morto a Parigi il 2 Maggio 1720. Ha lasciato un trattato di geografia intitolato: *Introduction à la géographie, avec un traité de la sphère*, Parigi, 1746, 2 vol. in-12, che da alcuni è stato erroneamente attribuito a Guglielmo Delisle suo figlio.

DELISLE (Guglielmo), figlio del precedente, e primo geografo del re di Francia, nacque a Parigi il 28 Febbrajo 1675 e morì nella stessa città il 5 Gennajo 1726. Sebbene le sue cognizioni matematiche non fossero estesissime, non abbiamo voluto passar sotto silenzio il suo nome, perchè a giusta ragione viene egli riguardato come il fondatore della moderna geografia. Fu egli infatti il primo che cessando dal copiare le antiche mappe con qualche insignificante cambiamento, come unicamente si faceva prima di lui, si servì delle osservazioni astronomiche per fissare sulle carte le posizioni dei diversi luoghi, e dove tali osservazioni mancavano, seppe con raro talento supplirvi collo studio e col confronto sì degli antichi autori che dei più recenti viaggiatori. Se oggi esistono carte più perfette e più esatte della sue, non è perciò meno vero che a lui interamente sia dovuta la gran riforma che fu fatta nel sistema della geografia. Con nostro rincrescimento adunque l'indole di questo Dizionario ci vieta di entrare in maggiori particolarità su questo dotto e sulle sue opere, intorno alle quali non possiamo che rimandare il lettore alla *Biografia universale*.

DELISLE (Giuseppe Niccolò), figlio di Claudio Delisle, nacque a Parigi nel 1688. L'ecclissi del sole del 12 Marzo 1706 stimolò in siffatto modo la sua curiosità, che la sua vocazione da quell'istante fu decisamente fissata. Il desiderio di conoscere le cause di quel fenomeno lo indusse a darsi con ardore allo studio delle matematiche nelle quali fece rapidi progressi. Avendo, nel 1710, ottenuto il permesso di abitare nel Luxembourg, vi eresse un piccolo osservatorio, e si applicò con tal successo all'astronomia, che l'Accademia delle Scienze di Parigi lo accolse nel suo seno nel 1714. Vi lesse varie memorie intorno all'osservazione dei solstizj, ad un ecclissi di Venere, ad un ecclissi di Giove e de' suoi satelliti colla luna, ec. Osservò il passaggio di Mercurio sul sole nel 1723 dall'Osservatorio reale, e l'ecclissi totale del sole de' 22 Maggio 1724 nel Luxembourg, dove, dopo esserne stato per alcun tempo espulso, gli era stata restituita la sua abitazione.

Nel 1724 Delisle si recò a Londra ove fu benissimo accolto da Newton e da Halley; il primo dei quali gli fece dono del suo ritratto, ed il secondo gli comunicò le tavole astronomiche, cui non pubblicò che lungo tempo dopo. Di ritorno in Francia, Delisle cedè all'invito dell'imperatrice Caterina che lo chiamò a Pietroburgo per fondarvi una scuola di astronomia. Si trattenne in quella città 22 anni, e le assidue cure che si diede per propagarvi l'amore e lo studio di tale scienza contribuirono non poco a fare acquistare celebrità alla scuola da lui eretta. Ne' brevi istanti di libertà che lasciavangli i doveri del suo ufizio, fece diversi viaggi e ne tornò con grandissimo numero di fatti rilevanti per la fisica e per la geografia. Tornato in Francia nel 1747, Delisle riprese le sue funzioni nell'Accademia delle Scienze, e posto avendo il suo osservatorio nel palazzo di Cluni, ivi ricominciò le sue osservazioni con uno zelo cui nè l'età nè la debolezza della sua salute non poterono scemare. Ascritto alle principali accademie

scientifiche dell'Europa, Delisle morì a Parigi il dì 11 Settembre 1768, logorato dagli anni e più di tutto dalla sua eccessiva assiduità al lavoro.

Ecco la lista delle sue opere: I *Mémoires pour servir à l'histoire et aux progrès de l'astronomie, de la géographie et de la physique*, Pietroburgo, 1734, in-4; di quest'opera si prometteva un secondo volume che non è mai uscito alla luce; II *Eclipses circumjovialium, sive immersiones et emersiones quatuor satellitum Jovis, ad annos 1734, 1738 et menses priores 1739*, Berlino, 1734, in-4; III *Avertissement aux astronomes sur l'éclipse annulaire du soleil que l'on attend le 25 Juin*, Parigi, 1748, in-8; è questo, dice Lalande, un trattato storico ottimamente scritto e molto compiuto degli ecclissi annulari; IV *Mémoire sur les nouvelles découvertes au nord de la mer du Sud*, Parigi, 1752, in-4; e ivi, 1753, in-4, seconda edizione con parecchie aggiunte e nuove carte; V Un gran numero di osservazioni inserite nei giornali del tempo, e nelle Raccolte delle Accademie di Pietroburgo, di Berlino e di Parigi. Nella *Biografia universale* il lettore potrà trovare altre notizie su questo infaticabile astronomo.

DELISLE (Luigi), fratello dei due precedenti, coltivò con successo l'astronomia, fu ammesso nell'Accademia delle Scienze ed accompagnò suo fratello in Russia. Visitò le parti più settentrionali di quell'impero sì in Europa che in Asia onde fissare la posizione astronomica de' punti più importanti. Nel 1741 s'imbarcò al Kamtchatka sopra uno dei bastimenti della squadra comandata dal capitano Bering per andare in scoperta; ma rifinito dalle fatiche fu obbligato a tornare al porto di Avatcha, ove morì il 22 Ottobre dello stesso anno. I suoi scritti sono: I *Recherches du mouvement propre des étoiles fixes, par des observations d'Arcturus, faites par Picard, et comparées avec de pareilles observations faites au Luxembourg*, memoria inserita nella raccolta dell'Accademia delle Scienze di Parigi per l'anno 1727; II *Observations astronomiques*, questo scritto si legge nelle *Memorie* dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1729.

DEMANDRE (Claudio Francesco), meccanico francese, nato verso il 1728 ad Amance, immaginò un nuovo *motore*, col quale fece diverse esperienze tutte riuscite felicemente, e che egli volle quindi applicare a far risalire i battelli sui fiumi navigabili, allo spurgo dei porti e finalmente alle trombe per gl'incendj, come si vede nel rapporto fatto all'Accademia delle Scienze nel 1772, nell'altro fatto alla stessa società nel 1785 da Vandermonde, e in un terzo rapporto fatto nel 15 Gennajo 1791 dai commissarj Coulomb, Vandermonde e Borda. Quest'ultimo rapporto, mentre riconosceva nel motore di Demandre un'ingegnosa macchina, non lo credè suscettibile di produrre i grandi vantaggi che il suo autore se ne riprometteva. Essendo perciò riuscite vane tutte le domande fatte da Demandre per ottenere una indennizzazione delle grandi spese da lui fatte nelle diverse sue esperienze, se ne accorò tanto che morì di dolore a Parigi il 3 Dicembre 1803.

DEMBARRÈRE (Giovanni), generale francese nato a Tarbes il 3 Luglio 1747, e morto a Parigi sul principio del 1828. Ha pubblicato: I *Coup-d'oeil sur les diverses parties de la science militaire, principalement sur celles qui appartiennent à l'arme du genie*, opuscolo in 8; II *Projet de changement à operer dans le système des places fortes*, Parigi, 1817, in-8.

DEMETRIANO, o DESTRIANO, architetto contemporaneo d'Adriano, si rese celebre per uno sforzo di meccanica che ha pochi esempj nella storia dell'arte, vale a dire per la traslazione della statua di Nerone detta il *Colosso*. Questa statua, che dietro un passo oscuro di Plinio da alcuni si crede che fosse di marmo e da altri di bronzo, aveva centodieci piedi romani di altezza a detta di Plinio, e centoventi secondo Svetonio (circa cento o centodieci piedi parigini). Trovavasi tale immensa mole nella *Via sacra* in faccia al tempio della Pace. Allorchè Adriano volle fabbricare sul terreno che essa occupava il tempio di Venere e di Roma, Deme-

Digitized by Google

triano la sollevò da terra e sospesa la fece trasportar ritta da ottanta elefanti dirimpetto al Coliseo dalla parte della Via sacra e del Campidoglio, ove formò complesso colla fontana chiamata *Meta sudans*, di cui sussistono ancora le rovine. Questo prodigio è stato rinnovato anco nei tempi moderni da Alberti e da Carburi. Si vedano questi nomi nel Dizionario.

DEMETRIO, matematico della scuola d' Alessandria, citato da Pappo nelle sue *Collezioni matematiche*, nelle quali gli attribuisce un trattato sulle curve intitolato: *Lineares aggressiones*. Quest'opera non è giunta fino a noi, ma la menzione che ne fa Pappo può fortificare la congettura che gli antichi avessero, su tale argomento importante, delle cognizioni ed una teoria assai più estesa di quello che generalmente si suppone. Si crede che Demetrio vivesse durante il secondo secolo dell'era nostra.

DEMOCRITO, uno de' più celebri e de' più illustri filosofi dell' antichità, nacque secondo l'opinione più comunemente ricevuta dai cronologi in Abdera, città della Tracia, nel terzo anno della LXXVII olimpiade (470 anni av. G. C.). Per dare un' idea del lustro e dell' opulenza della sua famiglia, Diogene Laerzio pretende, probabilmente tenendo dietro agli annalisti più antichi, che suo padre desse ospitalità al fastoso Serse. Secondo tale tradizione, il re, mosso dalle generose cure delle quali era stato l' oggetto, lasciò alcuni caldei ed alcuni maghi presso il suo ospite, acciocchè terminassero l' educazione del suo figlio. A tale circostanza avrebbe dovuto Democrito le cognizioni morali e scientifiche che poco tempo dopo divulgò a tutta la Grecia. Per mala sorte questo fatto è non poco difficile a conciliarsi coll' invasione de' Persiani, che accadde circa dieci anni avanti l'epoca nella quale si crede di poter porre la nascita di Democrito. Comunque sia, dopo la morte di suo padre, il filosofo abderitano si trovò padrone insieme con due suoi fratelli di una fortuna immensa; egli però lasciò loro tutte le terre e le case, e non si riservò che il solo danaro. La sua parte, che fu la minore, era, dicesi, di cento talenti, somma che presso a poco equivale ad un mezzo milione di franchi. Padrone di tal somma, e inspirato dall'amore delle scienze, volle percorrere il mondo civilizzato. Andò prima in Egitto, ove i sacerdoti gl' insegnarono la geometria; di là passò nell' Asia, scorse la Persia, penetrò fino nell' Indie e tornò per l'Etiopia. Si trasferì quindi nella Magna Grecia, dove Leucippo, capo e rinnovatore della setta eleatica, insegnava il sistema del vuoto e degli atomi, sistema in origine inventato dai filosofi orientali. È probabile che visitasse ancora la città di Atene ed ivi assistesse alle lezioni di Socrate e di Anassagora.

Ritornato in patria rovinato da' suoi lunghi viaggi, ebbe asilo in casa di suo fratello Damasi, e per eludere la legge che presso gli abderitani privava degli onori della sepoltura chiunque avesse dissipato il suo patrimonio, lesse ai suoi concittadini il suo *Trattato sul gran mondo*. Il popolo, incantato dalla bellezza di quest'opera, gli decretò i più grandi onori, e decise che i suoi funerali sarebbero fatti a spese del tesoro pubblico. Noi non seguiremo questo filosofo in tutte le fasi della sua vita, bastandoci di esporre qualche parte del suo sistema che meriterebbe un esame profondo e particolarizzato. La maggior parte delle sue idee sul mondo fisico e morale appartengono alla scuola di Pitagora e alla setta eleatica, nella quale insegnavasi il sistema degli atomi e del vuoto. Socrate parlando di Democrito diceva che era degno di esser paragonato con quelli che avevano riportato la palma nelle cinque specie di combattimenti nei giuochi olimpici. Egli facea così allusione alla estensione e alla profondità delle sue cognizioni. Secondo Cicerone, il suo stile aveva tutta l' eloquenza e tutto l' incanto di quello di Platone; così alla forza del pensiero univa Democrito la forza dell'espressione. Leggendo la lista delle sue opere, delle quali Diogene Laerzio ci ha lasciato i titoli,

si scorge che la storia naturale, l'anatomia, la medicina, la morale, le lettere, le arti, la geometria e la fisica furono a vicenda il soggetto delle meditazioni di questo spirito straordinario. Sotto questi ultimi rapporti, le opinioni ed i lavori di Democrito appartengono essenzialmente alla storia della scienza.

La geometria fu uno dei principali oggetti degli studj di Democrito; si congettura, dai titoli di alcuni de' suoi scritti, che esponesse uno dei primi la dottrina elementare sui contatti dei circoli e delle sfere, sulle linee irrazionali e sui solidi. Vitruvio lo associa ad Anassagora nella invenzione della prospettiva e dell'ottica di cui dimostrò i principj in un trattato intitolato: *Actinographia*. Nessuna delle opere opere di Democrito sull'astronomia fisica e matematica ha per mala sorte resistito al tempo divoratore, talchè siamo obbligati a limitarci a fare delle congetture dietro i titoli delle opere che consacrò a questa scienza. Pare che proponesse una nuova disposizione del calendario greco. Ha pubblicato delle effemeridi ed una uranografia, e gli si attribuisce una felice ipotesi sulla costituzione della via lattea: il suo splendore, diceva egli, non è altro che la luce riunita di una moltitudine di piccole stelle, ciascuna delle quali in particolare sfugge per la sua tenuità ai nostri occhi. Noi abbiamo maggiori notizie sul suo sistema dell'universo, sistema notabile nel quale s'incontra un gran numero d'idee riprodotte poi dal celebre Descartes. Democrito attribuiva il moto e la formazione dei corpi celesti a vortici di atomi, che avendo aderito gli uni agli altri in circostanze particolari avevano formato delle concrezioni sferiche. Credeva che il moto proprio dei pianeti da occidente in oriente non fosse che un'apparenza, che essi non ne avessero che uno solo la cui direzione era da oriente in occidente; ma che i pianeti più vicini al nostro globo essendo i più lontani dal primo mobile obbedissero meno al suo moto e restassero indietro, donde nasceva il loro moto apparente in oriente.

Le idee fondamentali di Democrito sono state benissimo ridotte in quanto alla sostanza alle seguenti proposizioni. » Il sapere dell'uomo non è che il sentimento » delle sue proprie affezioni.—Niuna cosa si fa dal nulla, nè può risolversi in ciò » che non è; dunque tutto ciò che è, è composto di principj che sussistono di per » sè stessi: questi principj sono gli atomi e il vuoto. — In tutto ciò che esiste » non vi ha di reale che questi due principj.—Gli atomi sono infiniti in numero, » siccome il vuoto lo è in capacità.—Gli atomi sono di una tale tenuità che sfug- » gono alla vista; la loro solidità gli rende inalterabili; le loro figure sono variate » all'infinito. Tali atomi sono i corpi primitivi che si muovono nel vuoto infinito, » il quale non ammette niuna di quelle relazioni di situazione indicate da queste » parole: *alto*, *basso*, *mezzano*, *estremo*. — Il moto degli atomi non ha avuto » principio; egli è da tutta l'eternità; per esso gli atomi si attraggono, si respin- » gono, si uniscono, si separano; e da tali unioni, da tali separazioni risultano la » composizione e la scomposizione di tutti i corpi.— I corpi non differiscono tra » loro che pel numero, per la figura e per la disposizione reciproca degli atomi, » di cui si compongono. — I mondi stessi, disseminati in numero infinito, qualun- » que sia la loro eguaglianza o la loro ineguaglianza reciproca, non hanno altra ori- » gine e sono sommessi alle stesse variazioni. Il moto rapido degli atomi è la sola » anima che penetra tali mondi coll'attività del fuoco. — Il fuoco stesso è com- » posto di atomi rotondi sempre agitati. »

Si pretende che Democrito vivesse fino all'età di cento nove anni. Intorno alla sua vita ed alla sua filosofia si potrà consultare: Hill, *De Philosophia Epicurea, Democritea et Theophrastea*, Ginevra, 1669; Ploucqoet, *De placitis Democriti Abderitae*, Tubinga, 1767; Cudworth, *Intellectual system*; Fabricio, *Bibliotheca graeca*, Vol. II, pag. 628, ediz. di Harles; e il Disionario di Bayle.

DENEB (*Astron*). Parola araba che significa *coda* e di cui si sono serviti gli astro-

nomi per indicare alcune stelle, come: *Deneb adigege*, la stella della coda del Cigno, *Deneb algedi*, quella della coda del Capricorno, *Deneb elecet*, quella della coda del Leone.

DENOMINATORE (*Aritm.*). Si chiama così quello dei due numeri di una frazione che indica in quante parti l'unità è stata divisa; si scrive al di sotto dell'altro numero, separandoli per mezzo di una piccola linea. Per esempio nella frazione $\frac{3}{4}$ *tre quarti*, 4 è il *denominatore*, e indica che l'unità è stata divisa in quattro parti. *Vedi* Algebra n.° 12 e Frazione.

DENSITA' (*Fisica*). Rapporto della massa di un corpo al suo volume, o quantità di materia che contiene un corpo in un volume determinato. Di due corpi eguali in volume, come un centimetro cubo d'oro e un centimetro cubo di legno di quercia, il più *denso* è quello che è più pesante, e per conseguenza quello che contiene maggior materia o che ha maggior *massa*. La massa è sempre proporzionale al peso.

Le densità di due corpi qualunque che hanno uno stesso volume stanno dunque in rapporto diretto delle masse; e le densità di due corpi che hanno la stessa massa stanno in ragione inversa dei volumi.

Combinando queste due proposizioni, se ne deduce la seguente proposizione generale, donde emana tutta la teoria della densità: *Le densità di due corpi stanno in ragione composta del rapporto diretto delle masse e del rapporto inverso dei volumi.*

Indicando dunque con D e D′ le densità di due corpi le cui masse sono M ed M′ e i volumi V e V′, si avrà

$$D : D' :: \frac{M}{V} : \frac{M'}{V'} \ldots\ldots (1).$$

E siccome le masse sono proporzionali ai pesi, così si può stabilire ancora quest'altra proporzione

$$D : D' :: \frac{P}{V} : \frac{P'}{V'} \ldots\ldots (2),$$

indicando con P e P′ i pesi.

Per confrontare le densità di due corpi basta dunque conoscere i loro pesi e i loro volumi; poichè se si sa, per esempio, che un primo corpo, il cui volume è di 3 centimetri cubi, pesa 4 grammi, e che un secondo corpo, il cui volume è di 5 centimetri cubi, pesa 7 grammi, si ha

$$D : D' :: \frac{4}{3} : \frac{7}{5} :: 20 : 21,$$

donde si conclude che la densità del primo corpo sta a quella del secondo come 20 a 21.

Le densità relative dei corpi prendono il nome di *pesi specifici*, quando confrontandoli tra loro sotto volumi eguali, si prende una di queste densità per unità o per termine di confronto. Così, dopo aver trovato che 500 centimetri cubi d'oro pesano 9680 grammi, che 500 centimetri cubi d'argento pesano 5237 grammi, e che 500 centimetri cubi d'acqua stillata pesano 500 grammi, e sapendo in forza della proporzione (2) che a volumi eguali le densità stanno come i pesi, se ne conclude che le densità dell'acqua, dell'oro e dell'argento stanno tra loro come i numeri 500, 9680, 5237. Ora, dividendo questi tre numeri per 500, per rendere il primo termine eguale all'unità, i loro rapporti non cam-

biano; dunque queste densità stanno tra loro come 1 : 19,36 : 10,474; vale a dire che prendendo per unità la densità dell'acqua, quelle di uno *stesso volume* d'oro e d'argento, o, il che è lo stesso, i *pesi specifici* dell'oro e dell'argento sono rappresentati da 19,36, e 10,474.

Se si potesse misurare con esattezza il volume dei corpi solidi, basterebbe una bilancia per determinare la loro densità; ma, nel maggior numero dei casi, è impossibile l'ottenere geometricamente questa misura, e, in tutti, è assai più spedito e più esatto il ricorrere ai mezzi che ci somministra l'idrostatica. Si sa che un corpo solido immerso in un liquido vi perde una parte del suo peso eguale a quello del volume d'acqua che esso occupa; così, pesando nell'acqua più corpi che abbiano uno stesso peso nell'aria, vale a dire pesando, per esempio, nell'acqua un chilogrammo d'oro e un chilogrammo d'argento, le perdite di peso che ne risulteranno saranno i pesi respettivi dei volumi di acqua spostati dall'oro e dall'argento, volumi che sono necessariamente eguali a quelli dei chilogrammi d'oro e d'argento, a che hanno tra loro lo stesso rapporto. Ma, in forza delle proporzioni (1) e (2), quando le masse o i pesi sono gli stessi, le densità stanno in ragione inversa dei volumi; così questi volumi stando tra loro nel rapporto del peso delle quantità d'acqua spostate, ne segue che le densità stanno in ragione inversa di questi stessi pesi; e in tal maniera si giunge a determinare la densità, senza aver bisogno di conoscere il volume dei corpi.

È appunto a tale oggetto che è stata inventata la Bilancia idrostatica rappresentata dalla figura 2 della tavola LIV. Sotto ognuno dei due piatti si trova un gancio, ad uno dei quali si attacca con un crino o con un filo sottilissimo l'oggetto di cui si vuol conoscere la densità. Si pongono dei pesi nell'altro piatto, per conoscere il peso assoluto di questo oggetto, che quindi s'immerge nell'acqua: l'equilibrio si altera, e per ristabilirlo si pongono dei pesi sul piatto dalla parte del corpo, e questi pesi fanno conoscere il peso del volume di acqua spostato.

Non è nemmeno necessario che i corpi di cui si vuol conoscere la densità relativa abbiano lo stesso peso assoluto, poichè essendo P e P′ i pesi assoluti dei due corpi, e p e p' i pesi che essi perdono quando si pesano nell'acqua, i rapporti $\frac{p}{P}$, $\frac{p}{P'}$, ridotti allo stesso denominatore, divengono $\frac{pP'}{PP'}$, $\frac{p'P}{PP'}$; si può dunque considerare PP′ come il peso comune, e pP', $p'P$ come i pesi perduti.

Per determinare la densità relativa dei liquidi, si fa uso ancora della bilancia idrostatica o di strumenti detti *areometri* (*Vedi* Areometro). Quanto ai corpi gassosi, si calcola la loro densità mediante la differenza tra il peso di un pallone di vetro pieno di un gas e il peso dello stesso pallone nel quale sia stato fatto il vuoto. Prenderemo dall'*Annuaire* dell'Ufizio delle Longitudini la seguente tavola dei pesi specifici di un gran numero di sostanze: essa è la più esatta e la più completa che esista.

Pesi specifici dei gas, prendendo per unità quello dell'aria.

Nomi dei gas	Densità trovata	Densità calcolata	Nomi degli Osservatori
Aria.	1,0000	. . . . .	. . . . .
Gas idriodico	4,443	. 4,340 .	Gay-Lussac.
Gas fluosilicico.	3,573	. . . . .	Davy.
Gas cloroborico.	3,420	. . . . .	Dumas.

Nomi dei gas	Densità trovata	Densità calcolata	Nomi degli Osservatori
Gas clorocarbonico		3,399	
Idrogene arsenicato	2,695	2,695	Dumas.
Cloro	2,470	2,426	Gay-Lussac e Thénard.
Ossido di cloro		2,315	
Acido fluoborico	2,371		Davy.
Acido solforoso	2,234		Thénard.
Cianogene	1,806	1,819	Gay-Lussac.
Idrogene fosforato	1,761		Dumas.
Protossido d'azoto	1,520	1,527	Colin.
Acido carbonico	1,5245		Berzélius, Dulong.
Acido idroclorico	1,2474		Biot e Arago.
Idrogene protofosforato	1,214		Dumas.
Acido idrosolforico	1,1912		Gay-Lussac e Thénard.
Ossigene	1,1026		Berzélius, Dulong.
Deutossido d'azoto	1,0388	1,0364	Bérard.
Idrogene bicarbonato	0,9780		de Saussure.
Azoto	0,976		Berzélius, Dulong.
Ossido di carbonio	0,957	0,967	Cruikshanck.
Ammoniaca	0,5967	0,5910	Biot e Arago.
Idrogene carbonico delle paludi	0,555	0,559	Thomson.
Idrogene	0,0688		Berzélius, Dulong.

Pesi specifici dei vapori, supponendo che quello dell' aria sia preso per unità, e che i vapori siano ridotti mediante il calcolo a 0° e 0m,76.

Nomi dei vapori	Densità trovata	Densità calcolata	Nomi degli Osservatori
Aria	1,0000		
Bicloruro di stagno	9,199	8,993	Dumas.
Vapore di iodio	8,716		*id.*
Vapore di mercurio	6,976		*id.*
Vapore di zolfo	6,617		*id.*
Protocloruro d'arsenico	6,300	6.297	*id.*
Cloruro di silicio	5,939	5,959	*id.*
Etere idriodico	5,4749		Gay-Lussac.
Canfora ordinaria	5,468	5,314	Dumas.
Etere benzoico	5,409	5,241	Dumas e Boullay.
Etere ossalico	5,087	5,081	*id.*
Protocloruro di fosforo	4,875	4,807	Dumas.
Essenza di trementina	4,763	4,765	*id.*
Cloruro giallo di zolfo	4.730		*id.*
Naftalina	4,528	4,492	*id.*

Digitized by Google

Nomi dei vapori	Densità trovate	Densità calcolate	Nomi degli osservatori
Vapore di fosforo	4,355	4,325	Dumas.
Cloruro rosso di zolfo	3,700		*id.*
Liquore degli Olandesi	3,443		Gay-Lussac.
Acido iponitrico	3,180		Dulong.
Etere acetico	3,067	3,066	Dumas e Boullay.
Solfuro di carbonio	2,644		Gay-Lussac.
Etere iponitroso	2,626	2,606	Dumas e Boullay.
Etere solforico	2,586		Gay-Lussac.
Etere idroclorico	2,212		Thénard.
Cloruro di cianogene	2,111	2,112	Gay-Lussac.
Spirito piracetico	2,019	2,020	Dumas.
Alcool	1,6133		Gay-Lussac.
Acido idrocianico	0,9476	0,9360	*id.*
Acqua	0,6235	0,624	*id.*

Pesi specifici dei liquidi e dei solidi, prendendo per unità quello dell' acqua stillata a 18° centigradi.

Liquidi

Acido solforico	1,8409
Acido nitroso	1,550
Acqua del mar Morto	1,2403
Acido nitrico	1,2175
Acqua del mare	1,0263
Latte	1,03
Acqua stillata	1,0000
Vino di Bordeaux	0,9939
Vino di Borgogna	0,9915
Olio d'oliva	0,9153
Etere muriatico	0,874
Olio essenziale di trementina	0,8697
Bitume liquido detto *Nafta*	0,8475
Alcool rettificatissimo	0,792
Etere solforico	0,7155

Solidi

Platino	in lamine	22,0690
	passato alla filiera	21,0417
	battuto	20,3366
	purificato	19,5000

Oro	battuto	19,3617
	fuso	19,2581
Tungsteno		17,6
Mercurio (a 0°)		13,598
Piombo fuso		11,3523
Palladio		11,3
Rodio		11,0
Argento fuso		10,4743
Bismuto fuso		9,822
Rame in fili		8,8785
Rame fuso		8,7880
Molibdeno		8,611
Arsenico		8,308
Nickel fuso		8,279
Uranio		8,1
Acciajo oè temperato nè battuto		7,8163
Cobalto fuso		7,8119
Ferro lavorato		7,7880
Stagno fuso		7,2914
Ferro fuso		7,2070
Zinco fuso		6,861
Antimonio fuso		6,712
Tellurio		6,115
Cromio		5,9
Iodio		4,9480
Spato pesante		4,4300
Diamante giallo di Ceylan		4,4161
Rubino orientale		4,2833
Zaffiro orientale		3,9941
Zaffiro del Brasile		3,1307
Topazio orientale		4,0106
Topazio di Sassonia		3,5640
Berillo orientale		3,5489
Diamanti i più pesanti (leggermente rosei)		3,5310
— i più leggeri		3,5010
Flint-glass inglese		3,3293
Spato fluore rosso		3,1911
Tormalina verde		3,1555
Asbesto		2,9958
Marmo di Paro (calce carbonata lamellare)		2,8376
Agata onice		2,8160
Smeraldo verde		2,7755
Perle		2,7500
Carbonato di calce		2,7182
Diaspro		2,7101
Corallo		2,680

Cristallo di monte puro	2,6530
Agata orientale	2,615
Feld-spath limpido	2,5644
Cristallo di Saiot-Gobain	2,4882
Porcellana della China	2,3847
Solfato di calce	2,3117
Porcellaoa di Sèvres	2,1457
Solfo nativo	2,0332
Avorio	1,9170
Alabastro	1,8740
Antracite	1,8
Allume	1,720
Carbooe fossile	1,3292
Gayac	1,259
Ambra gialla	1,078
Sodio	0,9726
Ghiaccio	0,930
Potassio	0,8651
Legoo di faggio	0,852
Frassioo	0,845
Tasso	0,807
Legno di olmo	0,800
Melo	0,733
Melaraocio	0,705
Abete giallo	0,657
Tiglio	0,604
Cipresso	0,598
Cedro	0,561
Pioppo bianco di Spagna	0,529
Sassofrasso	0,482
Pioppo comooe	0,383
Sughero	0,240

Per collegare tra loro le precedenti tavole di pesi specifici, aggioogeremo che, dietro le ricerche dei signori Biot e Arago, il peso dell'aria atmosferica asciutta, alla temperatura del ghiaccio che si fonde e sotto la pressione di $0^m,76$, è, a volume eguale, $\frac{1}{770}$ di quello dell'acqua stillata.

Per termine medio, in un gran numero di pesi, si è trovato che, alla temperatura di zero e sotto la pressione di $0^m,76$, il rapporto del peso dell'aria a quello del mercurio è di 1 a 10466.

Queste tavole, il coi uso è così importante in fisica, danno la soluzione di un problema interessante: esse servono a determinare il peso assoluto di un corpo per mezzo del suo volume, e reciprocamente. Per esempio, se si vool sapere quanto pesa un pezzo di ferro fuso il cui volume è 125 decimetri cubi, cercando nella tavola dei solidi si trova 7,207 pel peso specifico del ferro fuso, il che ci fa conoscere che le densità dell'acqua e del ferro stanno tra loro come 1 a 7,207;

basta dunque sapere quanto pesano 125 decimetri cubi d'acqua e moltiplicare questo peso per 7,207, onde conoscere il peso di 125 decimetri cubi di ferro. Ora la base del nostro sistema di pesi è la seguente:

Un centimetro cubo d'acqua stillata pesa un grammo; per conseguenza un decimetro cubo, che equivale a 1000 centimetri cubi, pesa 1000 grammi o un chilogrammo.

125 decimetri cubi d'acqua pesano dunque 125 chilogrammi, e 125 decimetri cubi di ferro fuso pesano 125×7,207 o 900 chilogrammi e 875 millesimi.

Se al contrario si cercasse il volume di un pezzo di avorio del peso di 255 grammi, il peso specifico dell'avorio, 1,917, dato dalla tavola, ci fa conoscere che il peso di un centimetro cubo d'acqua essendo un grammo, quello del centimetro cubo d'avorio è 1,917 grammi: così, dividendo 255 grammi per 1,917, si avrà il numero dei centimetri cubi contenuti nel pezzo d'avorio, vale a dire il suo volume. Questo volume è dunque eguale a 133 centimetri cubi, più $\frac{39}{1917}$.

La densità dei corpi non è sempre la stessa, poichè l'azione del calorico che gli dilata più o meno, aumentando il loro volume senza aumentare la loro quantità di materia, fa variare la densità: è dunque essenziale, quando si vogliono fare delle esperienze, di ridurre i corpi alla stessa temperatura, ed è appunto alla mancanza di questa avvertenza che debbono attribuirsi le differenze che esistono tra le tavole di pesi specifici date da varj fisici.

Densità della terra. La determinazione della densità della terra, paragonata con quella dell'acqua o di un altro corpo noto, ha vivamente eccitato l'attenzione dei matematici; e sebbene sembri a primo aspetto che la soluzione di un tal problema sia impossibile, pure la scienza è arrivata ad ottenere dei risultati che se non sono interamente esatti, hanno almeno il merito di una grande approssimazione.

La *densità della terra* è una densità media risultante dalle densità di tutti i corpi che la compongono, ed è evidente che ciascuna porzione isolata della terra ha una densità particolare; così, con questa espressione, noi intendiamo la densità media della massa intera della terra; in una parola, il rapporto che esiste tra il suo peso e quello di un egual volume di acqua, poichè abbiamo preso l'acqua per termine di confronto.

La prima idea di determinare la densità della terra è dovuta a Bouguer; essa gli fu suggerita dalla deviazione del filo a piombo de' suoi stromenti, occasionata dall'attrazione del monte Chimborazo, mentre era occupato a misurare un grado del meridiano in vicinanza di Quito, nel Perù.

La quantità di questa deviazione non fu allora determinata esattamente; ma trentaquattro anni dopo, il celebre astronomo inglese Maskelyne misurò colla massima esattezza la deviazione del filo a piombo prodotta dall'attrazione della montagna Shehalien in Scozia, ed allora fu possibile di paragonare la forza attrattiva della montagna colla forza attrattiva della terra intera, e per conseguenza la densità della montagna con quella della terra. Hutton, per mezzo di calcoli immensi, valutò questa densità a 4 $\frac{1}{2}$, prendendo per unità quella dell'acqua: ma egli aveva preso per basa un'approssimazione del peso specifico della montagna al di sotto di quello che essa doveva avere, perciò ricominciò in seguito, insieme col professore Playfair, i suoi calcoli e fissò questa densità a 5.

Per mezzo di principj simili, ma facendo uso di metodi differenti, Cavendish ha stabilito che la densità della terra sta a quella dell'acqua come 5,48 a 1. Così, prendendo un medio tra questi diversi rapporti, si ha 5,24 : 1, che probabilmente è assai prossimo al vero.

Densità dei Pianeti. La densità dei corpi stando nel rapporto composto del rapporto diretto delle masse e del rapporto inverso dei volumi (1), quando sono dato due di queste cose è facile dedurne la terza: così il curioso problema di determinare la densità dei pianeti si riduce a quello di determinare le loro *masse* (*Vedi* Pianeti). Questo masse, ottenute per mezzo delle leggi dell'attrazione generale, danno per le densità specifiche, prendendo per unità quella della terra, i seguenti risultati

Terra	1,00000
Sole	0,25226
Mercurio	2,58330
Venere	1,02400
Marte	0,65630
Giove	0,20093
Saturno	0,10349
Urano	0,21085

Vedi Massa e Pianeti.

DENTI (*Mec.*). Scabrosità delle quali si arma la circonferenza di una ruota per trasmettere il moto che gli è impresso. *Vedi* Incastratura.

DENTI delle ruote (*Vedi* Incastratura).

DENYS (Guglielmo), sacerdote e professore d'idrografia a Dieppe. Egli era allievo e successore di Caudron nella cattedra di scienza nautiche fondata da Descalier. In un'epoca in cui il ministro Colbert, presagendo la futura importanza della marina, era intento a promoverne in ogni maniera l'avanzamento, Denys si applicò con ardore all'insegnamento dell'idrografia, e dalla sua scuola uscì un gran numero di allievi che passarono a professare questa scienza nei principali porti del regno. Questo zelante professore morì verso il 1680 lasciando: I *L'art de noviger perfectionné par la connaissance de la variation de l'aimant, ou traité de la variation de l'aiguille aimantée*, Dieppe, 1666, in-4 di 220 pag., con fig.; II *L'art de noviger dans sa plus haute perfection, ou traité des latitudes*, Dieppe, 1673, in-4 di 500 pagine.

DEPARCIEUX (Antonio), matematico francese, nato nel 1703 a Cessoux presso Nimes. I suoi genitori, semplici agricoltori, non avevano mezzi per supplire alle spese della sua educazione, perciò le disposizioni primaticce che manifestò per lo studio sarebbero rimaste del tutto sterili, se un protettore della sua famiglia, assumendo sopra di sè questo carico, non lo avesse fatto entrare nel collegio di Lione, ove si distinse tosto pei suoi rapidi progressi nelle matematiche. Terminati i suoi studj, si recò a Parigi, e privo di qualunque altro mezzo fuori de' suoi talenti, si diede in principio a fare orologi solari per guadagnarsi il vitto. Tale lavoro gli procurò in breve una specie di agiatezza, ed allora ebbe campo di far conoscere con dotti scritti i suoi talenti e le sue cognizioni. Fu fatto censore reale e membro dell'Accademia delle Scienze di Parigi, e di quelle di Berlino, di Stockholm, di Metz, di Lione e di Montpellier, e morì a Parigi il 2 Settembre 1768. Oltre sedici memorie tutte importanti e relative ad oggetti di utilità generale, le quali si leggono nella raccolta dell'Accademia delle Scienze dal 1735 al 1768, abbiamo di Deparcieux: I *Tables astronomiques*, Parigi, 1740, in-4; II *Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique, avec un traité de gnomonique et des tables de logarithmes*, Parigi, 1741, in-4; III *Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine, d'où l'on déduit la manière de déterminer les rentes viagères, tant simples qu'en tontines*, Parigi, 1746., in-4; IV *Réponses aux objections faites à M. Déparcieux sur son livre*

des Probabilités de la durée de la vie humaine, Parigi, 1746, in-4; V *Additions à l' Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine*, Parigi, 1760, in-4; VI *Mémoires sur la possibilité et la facilité d' amener auprès de l'Estrapade, à Paris, les eaux de la rivière d'Ivette*, Parigi, 1763, in-4, ristampate con aggiunte nel 1777. Nella *Biografia universale* sono indicati i fonti da cui si possono attingere maggiori notizie su questo dotto.

DÉPARCIEUX (Antonio), nipote del precedente, si rese distinto anch' esso nelle scienze fisiche e matematiche. Nato a Cessoux-le-Vieux, fu chiamato a Parigi da suo zio e studiò nel collegio di Navarra. Non aveva più di venti anni quando fu surrogato a Brisson nella cattedra di fisica creata da Nollet; e nelle sue lezioni si fece particolarmente distinguere per la continua applicazione delle matematiche a tutti i problemi della fisica. Fu più volte consultato dal governo e dalle persone incaricate della amministrazione delle finanze sul modo di stabilire la durata della vita umana, relativamente alle tontine e alle rendite vitalizie. Egli si proponeva anzi, su tal proposito, di pubblicare una seconda edizione, molto aumentata, dell' opera di suo zio sullo stesso argomento. Fu appunto dietro un suo rapporto che l'assemblea costituente rigettò un progetto seducente di una *cassa di risparmj* che le era stato presentato, e di cui il geometra, in un giorno di lavoro, analizzò e distrusse tutte le basi. Oltre un *Trattato di matematiche* ad uso dell' università, nel quale ad ogni regola tien dietro l'applicazione della medesima ad un problema importante e fatto per risvegliare la curiosità, Déparcieux ha pubblicato: I *Traité des annuités, ou des rentes à terme*, Parigi, 1781, in-4; II *Dissertation sur le moyen d' élever l' eau par la rotation d' une corde verticale sans fin*, Amsterdam, 1782, in-8; III *Dissertation sur les globes aréostatiques*, Parigi, 1783, in 8. In questi scritti si ammira la stessa erudizione, ordine, precisione e chiarezza, che caratterizzavano le lezioni pubbliche di questo stimabile professore. Déparcieux morì a Parigi il 23 Giugno 1799 di un' ostruzione al piloro prodotta dalla funesta abitudine da esso contratta di lavorare immediatamente dopo i suoi pasti. Ha lasciato inedito un *Corso completo di Geometria*, e numerosi materiali per un *Trattato d'algebra e di calcolo differenziale e integrale*.

DEPRESSIONE DELL' ORIZZONTE (*Astron.*). *Vedi* Abbassamento dell' Orizzonte.

DERAND (Francesco), gesuita francese, nato nella diocesi di Metz, nel 1588, e morto ad Agde il 26 Ottobre 1644, insegnò le matematiche nei collegj del suo ordine e si applicò soprattutto all' architettura. È principalmente conosciuto per la sua *Architecture des voûtes, ou l'art des traits et coupe des pierres*, Parigi, 1643, in-fol. Quantunque quest'opera sia stata superata da quelle di Larue, e di Frézier, viene ancora consultata con frutto e può bastare pei casi i più ordinarj.

DERHAM (Guglielmo), dotto ecclesiastico inglese, nato a Stowton presso Worcester nel Novembre 1657. Studiò all' università di Oxford, e vi si fece osservare pe' suoi rapidi progressi nelle scienze fisiche e matematiche. Sebbene entrato negli ordini nel 1682 e fatto nel 1689 rettore di Upminster nella contea di Essex, continuò a coltivare le scienze; che anzi si servì delle stesse sue cognizioni scientifiche per raccogliere nuove prove dell' esistenza e della saggezza del creatore. Ascritto fino dal 1697 alla Società Reale di Londra, Derham morì nella sua parrocchia di Upminster il 5 Aprile 1735. La lista delle molte sue opere si trova nel *Biographical Dictionary*: noi non citeremo che le seguenti: I *Artificial Clock-Maker*, trattato elementare di orologeria che è stato sovente ristampato. Fu tradotto in francese e stampato a Parigi nel 1731, in-12, sulla terza edizione che è del 1714. Tale opera contiene sui suoni meccanici, sulla storia delle scoperte in orologeria, sui planetarj o macchine astronomiche, particolarità curiose

che erano nuove a quell'epoca. La quarta edizione del 1734, in-12. è molto accresciuta. II *Physico-theology*, Londra, 1713; III *Astro-theology*, Londra, 1714. Questi due volumi, che formano due parti di un'opera sola, sono stati tradotti in molte lingue. IV Le *Transazioni filosofiche* della Società Reale di Londra contengono, dal 20° al 39° volume inclusive, trentacinque memorie di Derham sopra varj argomenti di fisica, di matematica, d'astronomia, di storia naturale, ec. Nella *Biografia universale* si troveranno le indicazioni opportune per ottenere più estese notizie su tale dotto ecclesiastico.

DERIVAZIONE (*Alg.*) Operazione con la quale delle quantità son prodotte da altre impiegando un processo uniforme. Per esempio, φx essendo una funzione qualunque della variabile x, si chiama *derivata differenziale* di φx, la differenziale di questa funzione divisa per quella della variabile, o la quantità $\frac{d\varphi x}{dx}$; quindi

$$\frac{d\left[\frac{d\varphi x}{dx}\right]}{dx}$$

è la *derivata di* $\frac{d\varphi x}{dx}$, o la derivata seconda di φx. Quando x è una variabile indipendente, questa seconda derivata si scrive semplicemente $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$. Egualmente $\frac{d^3\varphi x}{dx^3}$ è la *prima* derivata di $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$, o la *seconda* di $\frac{d\varphi x}{dx}$, o finalmente la *terza* di φx, e così di seguito. In generale

$$\frac{d^m\varphi x}{dx^m}$$

è la derivata dell'ordine m della funzione φx.

Per fare apprezzare maggiormente queste derivazioni sia $\varphi x = x^m$, la prima derivata di x^m è $\frac{dx^m}{dx}$ o mx^{m-1} (*Vedi* Differenziale); la seconda è

$$d\,\frac{(mx^{m-1})}{dx} \text{ ovvero } \frac{d^2x^m}{dx} = m(m-1)x^{m-2}$$

La terza è

$$\frac{d[m(m-1)x^{m-2}]}{dx} \text{ ovvero } \frac{d^3x^m}{dx^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$$

generalmente la derivata dell'ordine n è

$$\frac{d^nx^m}{dx^n} = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}.$$

Si vede che le derivate successive di x^m

$$\begin{array}{r} x^{m-1} \\ m(m-1)\,x^{m-2} \\ m(m-1)(m-2)\,x^{m-3} \\ m(m-1)(m-2)(m-3)\,x^{m-4} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n} \end{array}$$

Digitized by Google

si formano deducendo ciascuna di loro da quella che la precede col medesimo processo di derivazione, cioè moltiplicando per l'esponente di x, e diminuendo quindi quest'esponente di un'unità.

Calcolo delle Derivazioni. Calcolo che si fonda sulla dependenza reciproca dei coefficienti delle serie, fu presentato dall'Arbogast per esser sostituito al calcolo differenziale, e rendere inutile la considerazione dell'*infinito*.

Allorquando l'opera dell'Arbogast comparve nell'anno 1800, i principii materialisti della setta enciclopedica erano tanto generalmente adottati che i matematici credettero di trovarvi il mezzo da lungo tempo cercato, di allontanare dalla loro scienza tutto ciò che vi si trovasse di troppo intellettuale; e quelli ai quali il metodo dei *limiti* (*Vedi* questa parola) non soddisfaceva interamente si affrettarono a proclamare la superiorità del punto di vista metafisico del calcolo delle derivazioni, calcolo più generale di quello delle *funzioni analitiche* (*Vedi* questa parola) di già proposto dal Lagrange per essere sostituito a *spiegare il calcolo differenziale*. Il Montucla, nella sua *Storia delle Matematiche*, o piuttosto il suo continuatore presenta il nuovo calcolo dell'Arbogast come il punto il più elevato della scienza dei numeri, e perciò da farne dipendere i futuri progressi della scienza, con abbassare il calcolo differenziale, a non esserne che uno dei suoi casi particolari. Un geometra moderno ha fatto giustizia a queste stravaganti pretensioni, e al giorno d'oggi rimane provato che il calcolo delle derivazioni non è che un metodo indiretto che può per verità, nelle applicazioni, essere sostituito al calcolo differenziale, ma che lungi da spiegarlo, non può essere concepito, e non ha assolutamente alcuna significazione, che appoggiato a questo calcolo medesimo (*Vedi* Filosofia dell'infinito). Quanto al piccolo numero di risultamenti veramente importanti ai quali sono arrivati l'Arbogast e quindi il Kramp per mezzo delle derivazioni, è facile ottenerli in una maniera più diretta e molto più semplice con i processi, d'altra parte molto meno complicati del calcolo differenziale. *Vedi* Differenziale, Polinomio, Potenza e Ritorno delle serie.

DESAGULIERS (Giovanni Teofilo), celebre fisico, nato alla Rochelle nel 1683. Figlio di un ministro protestante, fu obbligato a ripararsi in Inghilterra insieme colla sua famiglia in conseguenza della revoca dell'editto di Nantes. Dopo aver fatti gli studj elementari alla scuola d'Islington, presso Londra, andò a studiare filosofia all'università di Oxford. Quivi si applicò con tanto ardore allo studio della fisica sperimentale, insegnata allora da Keill, che fu reputato degno di succedere al suo maestro, allorchè questi lasciò Oxford nel 1703; e la fama che si acquistò colle sue lezioni lo fece ben presto chiamare a Londra per ripetervi le sue sperienze. Egli allora nulla risparmiò per giustificare un sì onorevole contrassegno di stima. Prese per sua guida Newton, inventò e costrusse nuovi strumenti, perfezionò quelli che erano conosciuti, e diede un corso di fisica sperimentale newtoniana, a cui accorsero gli scienziati e gli uomini che allora onoravano la Gran-Bretagna. Ebbe la gloria di contare tra i suoi uditori il re Giorgio I, e il principe di Galles, che da lui volle imparare la filosofia newtoniana. Desagulierz viaggiò poscia in Olanda, e diede a Rotterdam ed all'Aja delle lezioni che furono assai frequentate. Tornato in Inghilterra, la Società Reale di Londra, della quale era membro, gli affidò l'uffizio di dimostratore, cui il celebre Roberto Hooke aveva disimpegnato per molti anni. Morì nel 1743. Ha inserito molte memorie nelle *Transazioni filosofiche*, ed ha tradotto in inglese parecchie opere importanti, come: il *Corso di Matematiche* di Ozanam, il *Moto delle acque* di Mariotte, l'*Astronomia* di Gregory, l'*Introduzione alla filosofia newtoniana* di s'Gravesande, ec.: ma l'opera che meritò maggior fama a Desaguliers fu la raccolta delle sue lezioni di fisica sperimentale, che pubblicò a Londra nel 1719 in due volumi

in-4 col titolo di *A Course of lectures on experimental philosophy*, spessissimo ristampata e tradotta il francese del p. Pezenas. Il primo volume tratta della meccanica razionale e delle sue applicazioni alle arti, nel secondo l'autore si è principalmente occupato delle macchine idrauliche.

DÉSARGUES (Gerardo), distinto geometra, nato a Lione nel 1593. Apparteneva ad una famiglie antica, e per obbedire al pregiudizj di onore che allora regnavano, abbracciò dapprima la professione delle armi. Si trovò all'assedio della Rochelle ove conobbe Descartes: inclinazioni comuni gli avvicinarono, e quindi si unirono di un'amicizia costante e sincera. Désargues essendosi ritirato dal servizio militare, andò a soggiornare a Parigi, ove fu ammesso nella società di Chantereau Lefèvre, che radunava nella sua casa una specie di accademia di matematici: in tale società conobbe Gassendi, Boulliand, Roberval, Carcavi e Pascal, che giovane ancora era già il rivale de'più grandi geometri. Quando Descartes, che si era ritirato in Olanda, ebbe pubblicato il suo libro dei *Principj*, che pose le fondamenta della sua reputazione, Désargues raccomandò il suo amico al cardinale di Richelieu, ma non potè ottenere per quel grand'uomo un collocamento nella sua patria. I servigj però che gli rese non si limitarono a questo soltanto; gl'inviava tutti i libri che poteva creder necessarj a' suo studj, e prese con calore la sua difesa contro Fermat e il p. Bourdin che avevano censurato alcune delle sue opinioni.

Presso a poco nella stessa epoca, pubblicò un trattato sulle sezioni coniche che gli meritò di essere annoverato fra i matematici più distinti del suo tempo. La sua reputazione era tale, che quando Pascal pubblicò il suo trattato sullo stesso argomento, Descartes l'attribuì a Désargues, ch'ei considerava siccome il solo matematico in grado di produrre una simile opera. Senza ambizione, e desiderando meno di farsi conoscere che di esser utile, Désargues lasciò Parigi e tornò a Lione, ove si diede interamente alla sua inclinazione allo studio e si occupò specialmente dell'arte del taglio delle pietre: egli si dilettava ancora di dare agli operai, dai quali era attorniato, delle lezioni su questa parte tutta geometrica dell'architettura. Désargues scriveva con purità ed eleganza; ma sia che diffidasse troppo di sè stesso, sia che preferisse d'impiegare alla ricerca di nuove verità il tempo che avrebbe speso a scrivere, affidò ad Abramo Bosse la cura di stendere le sue opere, e a questa disgraziata circostanza deve attribuirsi la dimenticanza in cui sono esse cadute. Désargues morì a Lione nel 1662. Le opere scritte da lui sono: I *Traité de la perspective*, Parigi, 1636, in-fol.; II *Traité des sections coniques*, Parigi, 1639, in-8. Le opere stese da Bosse sono: 1.° *La manière universelle pour poser l'essieu*; 2.° *La pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres*; 3.° *La manière de graver en taille-douce et à l'eau-forte*; 4.° *La manière universelle pour pratiquer la perspective*. Si veda in questo Dizionario l'articolo Bossa.

DESCARTES (Renato). Quegli uomini, che dotati di un ingegno raro e potente sembrano chiamati dalla provvidenza ad imprimere un gran movimento al progresso intellettuale del mondo, non appartengono al paese in cui sono nati, ma all'intera umanità. Ciò non ostante, il sentimento intimo e profondo della nazionalità non consente a perdersi nella santa fraternità delle società umane; esso ama d'isolarsi e d'insuperbirsi di una fraternità più ristretta. L'Italia si vanta con orgoglio del genio di Galileo, la Germania di quello di Leibnitz, l'Inghilterra di quello di Newton, la Francia ha diritto di crescere il suo lustro di quello di Descartes. Tutti quegli spiriti forti e arditi, che aprono all'umanità nuove vie e che la precedono nell'avvenire, non compariscono che a lunghi intervalli. Le grandi menti non vengono sempre ad un'epoca sufficientemente preparata per accoglierle. Troppo spesso la parola, colla quale si rivela l'opera dell'ingegno, va a

percorrere un mondo che non ha eco per lei. Ma questa parola non muore; essa attende, brillante e feconda, nel santuario della verità, che sorga un giorno propizio in cui risuonerà immensamente, in cui gli spiriti potranno comprenderla. Questo giorno sembra giunto per l'immortale autore del *Discorso del Metodo* e di tante brillanti scoperte nelle parti più elevate della scienza, nelle più nobili speculazioni del pensiero. La Francia dotta e intellettuale, sì lungo tempo trascinata fuori della via delle grandi scoperte da un filosofismo senza autorità, rinasce finalmente ai lumi di una filosofia più degna della sagacità maravigliosa di cui è dotata. Già essa contempla con dolore profondo le statue che nel suo luogo acclecamento ha elevato ai falsi dei della setta enciclopedica, dei mentitori i cui altari sono sepolti sotto le rovine ammonticchiate dalle loro funeste dottrine. Già, in un gran numero di nuovi scritti inspirati da un fecondo pensiero di rinnovazione e di avvenire, il nome glorioso di Descartes è richiamato al rispetto e alla ammirazione di tutti gli uomini illuminati. E noi che veniamo a portare la nostra parte di pensieri al movimento filosofico e progressivo del nostro tempo non temeremo, in questa rapida analisi della vita o dei lavori di Descartes, di proclamare altamente la nostra profonda ammirazione per questo nobile e sublime intelletto.

Renato Descartes nacque ad Haye, piccola città della Turrena, il 31 Marzo 1596. La sua famiglia, originaria della Bretagna, era nobile, ma poco favorita per parte della fortuna. Come Newton, come tanti altri uomini di genio, era di una costituzione infermiccia e debole, che nella sua infanzia cagionò forti timori ai suoi genitori. Ciò non ostante fu inviato di buon'ora a La Flèche per farvi i suoi studj sotto la direzione dei gesuiti, che allora da poco tempo si erano stabiliti in quel collegio. Risulta dalle osservazioni di cui fu l'oggetto per la parte de' suoi maestri, che esso in principio non si distinse dagli altri allievi, suoi condiscepoli, che per la sua applicazione più viva allo studio, e per la sua inclinazione all'isolamento e alla solitudine; questa tendenza alla meditazione si attribuiva alla debolezza della sua organizzazione che lo rendeva tristo e melanconico. Ma già egli viveva di pensieri, già quello spirito fiero e indipendente aveva scandagliato l'abisso della filosofia scolastica, aveva compreso l'alta importanza delle matematiche, e cercava nella sua ragione un principio di verità che i suoi studi classici non gli avevano ancora fatto scorgere. Ecco come egli c'inizia in questi primi passi del suo ingegno: » Sono stato educato alle lettere fino dalla mia in» fanzia; e perchè mi si persuadeva che col loro mezzo si poteva acquistare una » cognizione chiara e sicura di tutto ciò che è utile alla vita, io aveva un estre» mo desiderio d'impararle. Ma tostochè ebbi compito questo corso di studj, al » termine del quale è costumanza di esser ricevuti nel numero dei dotti, cam» biai interamente di opinione, poichè mi trovai imbarazzato da tanti dubbj e » da tanti errori, che mi sembrava di non aver tratto altro profitto cercando » d'istruirmi se non d'avere scoperto sempre più la mia ignoranza. . . . . Cre» detti perciò che, invece di conservare tutte le opinioni che fino allora aveva io » ricevute fiduciariamente, non potessi far altro di meglio che di cercare di to» gliermele dalla mente, all'oggetto di rimettervene in seguito, o altre miglio» ri, ovvero le stesse quando le avessi esaminate e ridotte ad essar consentanee » alla mia ragione. » In seguito ritorneremo su questi principj, dei quali tutti i lavori di Descartes non sono infatti che deduzioni più o meno felici: terminiamo di dare una rapida occhiata agli avvenimenti della sua vita.

Uscendo dal collegio, in età appena di 19 anni, Descartes risolvette di viaggiare, per porre in pratica le sue nuove idee, veder tutto da sè stesso, e cercare la verità » nel gran libro del mondo. » Abbracciò il mestiere delle armi o servì successivamente in qualità di volontario nelle truppe dell'Olanda e in

quelle del duca di Baviera. » Io impiegai, dice egli, il resto della mia gioventù a » viaggiare, a vedere delle corti e delle armate, a frequentare uomini di diversa » indole e condizione ». Ma, quantunque l'ardore della gioventù gli facesse rinvenire allora alcun diletto in quella vita tumultuosa ed agitata, egli era dotato di una ragione troppo superiore per prender parte realmente nelle contese sanguinose in mezzo alle quali si trovava. Il guerriero non cessava di esser filosofo sui campi di battaglia, che non erano per lui che un gran teatro aperto alla sua osservazione; il suo scopo era quello di studiare non di avanzare. Quel miscuglio di uomini di diversi paesi, con tutte le passioni che onorano o affliggono l'umanità, quei movimenti improvvisi che nascono dalle vicende della guerra presentavano al suo spirito, tranquillo in mezzo all'agitazione, solitario tra la moltitudine, tutti i mezzi di verificare coll'esperienza le questioni che si era proposte; egli continuava così sopra un piano vasto e nuovo gli studj i più importanti, applicando ai fatti e agli accidenti di cui era testimone i principj delle scienze matematiche e filosofiche, oggetti costanti delle sue meditazioni e de' suoi lavori. Si racconta che, trovandosi di guarnigione a Breda, vide un giorno un gran numero di persone radunate avanti un avviso scritto in lingua fiamminga; era esso l'enunziato di un problema matematico, che secondo l'uso del tempo un geometra incognito proponeva ai matematici. Descartes non aveva giudicato a proposito d'imparare la lingua fiamminga, pregò perciò uno degli spettatori di tradurgli la proposizione esposta in tal modo al pubblico concorso. Il caso volle che la persona alla quale il giovine ufiziale straniero si era indirizzato fosse un professore del collegio di Dort, chiamato Beckman, matematico anch'esso. Questi, che trovava il problema assai difficile, parve sorpreso che un militare s'informasse di un tal genere di cose, e gli rispose col tuono di superiorità di un pedante che dubita che un altro possa elevarsi alla intelligenza di ciò che egli stesso non comprende. Ma restò assai stupito quando il giovane soldato gli promise, senza esitare, la soluzione del problema e gliela portò il giorno dopo.

Dopo avere assistito alla battaglia di Praga del 1620 ed essere stato testimone dei rovesci militari di cui l'Ungheria fu in seguito il teatro, Descartes lasciò la professione delle armi e continuò i suoi viaggi. In quell'epoca gli accadde un'avventura che poco mancò non gli costasse la vita. Aveva percorso il settentrione della Germania e se ne ritornava in Olanda per mare. I marinari del bastimento sul quale si era imbarcato vedendolo di un umore dolce e tranquillo lo presero per un giovine senza esperienza, e credettero che sarebbe stato loro facile di ucciderlo per impadronirsi delle sue spoglie, tanto più che Descartes non era accompagnato che da un solo servitore francese. In questa persuasione tennero tra loro consiglio sui mezzi onde mandare ad esecuzione il loro progetto, nè ebbero riguardo di farlo alla stessa sua presenza, immaginandosi che essendo forestiero non potesse intenderli: ma Descartes, che aveva ben compreso il loro disegno, si alza ad un tratto, sfodera bruscamente la spada, e volgendosi a quei miserabili nella loro lingua e con tuono risoluto gli minaccia di trafiggerli sull'istante se ardiscono di fargli il minimo insulto. Intimoriti dalla sua audacia lo condussero ove volle. Percorse successivamente l'Olanda, la Francia, l'Italia, la Svizzera e il Tirolo, fece un lungo soggiorno a Venezia e a Roma, sempre inspirato dal desiderio di acquistare nuove cognizioni e di verificare quelle che aveva acquistato. La maggior parte de' suoi biografi si maraviglia con ragione che durante il suo viaggio in Italia, Descartes non abbia visitato l'illustre Galileo, allora in possesso delle sue principali scoperte, e perseguitato per aver esposto alcune verità sublimi. Descartes non si è mai spiegato su questo proposito, e si è osservato che in un'età più avanzata non manifestò mai nessuna ammirazione pel genio di Galileo. Ciò deriva forse dalla circostanza che

avendo allora già concepito nella sua mente tutto il suo sistema cosmo-fisico, non avrebbe potuto, senza esporsi ad una evidente contradizione, lodare dottrine, che non erano in armonia colle sue. Ma si comprenderà che una tale considerazione è troppo debole: è meglio perciò renunziare a spiegare una circostanza inconcepibile, di cui la causa è rimasta nascosta nel profondo mistero del pensiero umano.

Tornato dai suoi viaggi, Descartes volle darsi interamente alla sola occupazione che gli parve convenire ad un filosofo, quella di coltivare la sua mente. Credè di non poter trovare in Francia quella tranquillità di cui aveva bisogno, quel *procul negociis*, senza il quale gli uomini di sommo intelletto si perdono nella folla, e finalmente quella libertà che soprattutto conveniva alla fiera indipendenza del suo spirito. Si ritirò in Olanda dopo aver venduto una parte del suo patrimonio. Fu in questa terra straniera che Descartes scrisse il maggior numero delle sue opere e ch'ei concepì in una laboriosa solitudine gli alti pensieri che dovevano rivelarlo al mondo come uno dei più bei genj che abbiano giammai attirata la sua ammirazione. Ma fu pure in quel paese, e dopo che un' immensa fama ebbe accolto i suoi lavori, che Descartes ebbe a lottare contro la vile e crudele invidia che sempre accompagna i successi i più meritati e le opere più sublimi dell' ingegno. Noi non possiamo passare sotto silenzio queste particolarità così importanti della sua vita. Molti professori delle università più accreditate erano legati d'amicizia con Descartes, e incominciavano a diffondere le sue dottrine. I partigiani delle antiche opinioni, gelosi di una reputazione che gli ecclissava, cercarono di rovinarlo o almeno di farlo cacciare dall'Olanda. Gisberto Voet o Voetius, primo professore di teologia ad Utrecht, si distinse fra tutti i suoi nemici per uno zelo frenetico, di cui non possiamo più farci un' idea esatta nello stato attuale de' nostri costumi e delle nostre relazioni sociali. Quest' uomo, abusando dell' influenza che gli davano le rispettabili funzioni di cui era incaricato e la reputazione che si era acquistata coll' austerità delle sue forme e de' suoi costumi, fece dapprima combattere la dottrina di Descartes in alcune tesi pubbliche, in cui si cercava d' insinuare contro di lui l'assurda accusa di ateismo. Descartes ateo! egli le cui speculazioni filosofiche avevano tutte avuto per oggetto di dimostrare l' esistenza d' Iddio e l'immortalità dell' anima! Ma nell' acciecamento dell' odio suo, il teologo protestante non poteva far conto delle ammirabili proposizioni in cui l' illustre autore delle *Meditazioni* s' innalza spesso alla perfezione la più chiara di queste auguste verità. Voet ebbe l'audacia di scrivere al padre Mersenne per indurlo ad inveire contro il suo nemico prendendo in mano la difesa della religione cattolica, ch'ei pretendeva attaccata dalla metafisica di Descartes. Ma il padre Mersenne era l'amico il più caro del filosofo; dolci rimembranze si associavano alla loro intima amicizia che aveva avuto principio al collegio di La Flèche. Il dotto religioso mandò al suo amico la sua risposta aperta, e Descartes la fece pervenire a Voet, senza degnarsi di aggiungervi una sola parola, egli che era stato così crudelmente oltraggiato dal suo vile avversario. Voet non si perse di coraggio, continuò a declamare contro la metafisica di Descartes e ad attaccarla come contraria alla religione: è noto come con un raggiro infame giungesse a far condannare le sue dottrine filosofiche dai borgomastri di Utrecht, giudici incompetenti, bisogna pur confessarlo, in questioni di tal genere! Queste persecuzioni, aggravate da calunnie d' ogni genere, dalle accuse le più atroci, posero un momento in compromesso la tranquillità di Descartes, che ritirato allora in una deliziosa solitudine nelle vicinanze dell'Aja, accolto ed amato dalla principessa palatina Elisabetta, non dava alcuna importanza a questi miserabili attacchi, e per conseguenza non faceva nulla per prevenirne l'effetto. Ma quando dietro l' odioso libello, che Voet pubblicò contro di lui ce-

landosi sotto il nome di un giovine professore che ebbe la viltà di acconsentirvi, fu pronunziata la sua condanna, il filosofo uscì da quella riserbatezza nella quale si era contenuto. Non ebbe che a comparire per sventare la vile macchinazione immaginata per perderlo, ma allora provò un profondo scoraggimento, e temendo per l'avvenire i nuovi disgusti che suscitargli poteva l'odio che nè la sua magnanimità nè i suoi talenti avevano potuto vincere, si allontanò da un paese che era stato il teatro della sua gloria e quello delle più strane persecuzioni; accettò allora l'asilo che la celebre Cristina, regina di Svezia, offriva al suo ingegno.

Gli attacchi di Voet fecero di Descartes il capo di una nuova scuola filosofica che ebbe i suoi aderenti e i suoi avversarj; ma qualunque sia il giudizio di cui le sue dottrine possano essere state l'oggetto, il nome del suo persecutore è condannato a subire la loro immortalità.

In generale, si considera sotto tre punti di vista speciali il vasto ingegno di Descartes, e, separando la sua filosofia dalle sue scoperte in fisica e in matematiche, si è troppo lungo tempo asserito che unicamente sotto quest'ultimo rapporto la sua gloria è incontrastabile. Così la sua fisica e la sua filosofia non sarebbero state che errori sublimi pei quali gli farebbero trovar grazia i suoi lavori matematici. Noi non possiamo ammettere queste distinzioni altrettanto ingiuste quanto arbitrarie; e senza disconvenire che alcune delle sue ipotesi cosmofisiche sono inammissibili, noi consideriamo le dottrine di Descartes, in tutti i rami del sapere, come un maestoso complesso che non può essere diviso, come un tutto le cui parti tra loro collegate con uno stesso pensiero e dedotte dallo stesso principio non potrebbero essere logicamente separate le une dalle altre: tale fu almeno l'opinione del suo secolo, che diede il nome di *cartesianismo* al complesso ammirabile delle sue dottrine.

Descartes pensò da sè stesso, spezzò il vecchio giogo della scuola peripatetica, e non ammise altre regole nelle cose della ragione che la ragione stessa. Questa dottrina formò un gran numero di pensatori. Invitando ognuno a rientrare in sè stesso e a dipartirsi dalla propria convinzione, Descartes offriva un mezzo di non smarrirsi con lui, supponendo che fosse caduto in qualche errore. Il servigio che in tal modo rese alla filosofia è immenso; riformò la speculazione come Copernico aveva riformato l'astronomia. Rompendo la schiavitù del pensiero suscitò un modo attivo di filosofare che rovinò il metodo passivo e storico in uso prima di lui, e non bastò più di giurare sulla parola del maestro per trionfare di qualunque idea ragionevole in mezzo agli applausi della scuola pedantesca della filosofia aristotelica. La ragione ricuperò così per di lui mezzo la sua feconda e potente autonomia.

Senza dubbio il dogmatismo scolastico era stato già attaccato, prima di Descartes, da uomini come Rabelais, Ramus, Sanchez, Montaigne e Charron, che tutti nelle forme speciali del loro talento e del loro carattere l'avevano a vicenda perseguitato coi loro cinici scherzi, coi loro sarcasmi, colle loro gravi objezioni. Ma essi non avevano saputo sostituirgli che uno scetticismo esagerato, che in sostanza non era che l'impugnativa di qualunque scienza filosofica. Così, presso a poco nella stessa epoca, uomini di fede, come Erasmo e Melantone, spaventati dal nulla che il pirronismo induceva nella speculazione, diedero alla filosofia scolastica l'appoggio della loro calda e vibrata eloquenza. Non bisogna d'altronde immaginarsi che la filosofia scolastica fosse in sè stessa una cosa puerile. I Tommasi, gli Scotti non erano al certo spiriti superficiali o grossolani. Questi uomini, ragguardevoli per l'estensione delle loro cognizioni e per la sottigliezza della loro dialettica, avevano almeno mostrato, in tutta la sua estensione, l'uso che lo spirito umano poteva fare dello strumento logico. Essi avevano fatto

anco di più purificando, e intellettualizzando per così dire l'idea dell'essere supremo. Così la filosofia scolastica poneva lo spirito umano sul cammino di una metafisica razionale e in tal modo valeva essa assai più dell'empirismo e dello scetticismo. Tale fu l'opera di Descartes che realizzò, coll'emancipazione della ragione, questo inestimabile benefizio.

La divisa della scuola cartesiana fu questa: » Pensa da te stesso, e non giudicare di nulla sulla parola ». Essa comprende una delle regole le più importanti per lo spirito filosofico, e non ammette il dubbio che come una preparazione all'esame. Questa scuola celebre illustrò la Francia, e la fece annoverare tra le nazioni le più illuminate. Il cartesianismo fu successivamente adottato dagli spiriti i più forti, i più elevati, i più indipendenti del secolo di Luigi XIV, dai Bossuet, dai Fénelon, dai Mallebranche, dai principali membri dell'illustre congregazione dell'Oratorio, dagli scrittori tanto distinti della grande e celebre scuola di Porto Reale, e finalmente da una istituzione religiosa, oggi decadota, che almeno non è stata mai accusata d'ignoranza. Se queste illustri approvazioni non bastassero per stabilire la profonda influenza che il cartesianismo esercitò sul suo secolo e nel tempo stesso l'alta sua direzione, i sarcasmi di Voltaire e della sua scuola proverebbero abbastanza che esso era, per l'empirismo del passato secolo, un principio forte e vivente che condannava i suoi deplorabili errori.

Così la filosofia di Descartes non è un concepimento talmente debole che non se ne debba parlare che per memoria: e se non avesse altri titoli che questi all'ammirazione della posterità, la sua gloria sarebbe ancora immortale.

Il principio razionale che Descartes aveva introdotto nella metafisica dovette applicarlo pure alla fisica. Ad onta dell'arditezza e forse dell'inverisimiglianza di alcune delle sue ipotesi, si rimane compresi da maraviglia per la fecondità e per l'estensione del suo genio esaminando il complesso del suo sistema. Ciò non ostante la sua ingegnosa idea dei vortici è quasi la sola che oggigiorno a lui si attribuisca generalmente, come se fosse possibile di giungere ad un tal concepimento, qualunque sia del resto il suo valore scientifico, senza aver percorso una catena immensa di pensieri e di ricerche! Ma quali sublimi scoperte non ha egli realizzate in questo sistema, e di quante altre conquiste scientifiche questo sistema non è stato la sorgente! Così uno scrittore moderno ha potuto dire con ragione: se egli si è ingannato sulle leggi del moto, ha almeno indovinato il primo che doveva esservene. Non potrebbe forse pure essere che sottoponendo appunto all'esame dell'alta sua mente le idee di Descartes il gran Newton si sia trovato naturalmente sulla via delle immortali sue scoperte?

Quando Descartes scrisse il suo discorso sulla diottrica, la diseguale refrangibilità dei diversi raggi della luce non era ancora conosciuta; ciò non ostante, oltre una moltitudine di ingegnose applicazioni della geometria a questa scienza, il suo trattato contiene l'esposizione della vera legge della refrazione, scoperta immensa che Huygens ha tentato invano di contrastare a Descartes, allegando che essa esisteva nei manoscritti di Snellio, cui Descartes aveva potuto vedere in Olanda: ma tale reclamo fatto in un'epoca in cui Descartes non poteva più difendersi non basta per togliergli una scoperta la quale non gli fu contesa fino che visse. Nel trattato delle meteore ha dato la vera teoria dell'arcobaleno, in quel modo che poteva farsi in un'epoca in cui la diseguale refrangibilità della luce non era ancora conosciuta (*Vedi* Dominis); e, ciò che merita di esser ben notato, sebbene questo dato così importante gli mancasse, la sua teoria è non ostante esatta, perchè vi supplisce con un'esperienza. Infatti determina dapprima, per mezzo del calcolo, il cammino dei raggi luminosi che penetrano in una gocciola d'acqua, e che quindi ne escono dopo una o più riflessioni. Questo calcolo gli fa cono-

scere che di tutti i raggi che possono in tal modo cadere sopra una gocciola non vi sono che quelli che vi penetrano sotto un certo angolo che possano giungere allo spettatore senza allontanarsi gli uni dagli altri, e per conseguenza senza indebolirsi. Per tal modo determina primieramente le vere circostanze nelle quali il fenomeno dell'arcu baleno può prodursi, ed esse sono conformi all'osservazione. Restava ad assegnarsi la causa dei colori. Descartes, senza conoscerla, la riduce con molta sagacità ad un altro fenomeno più semplice, a quello cioè della decomposizione della luce per mezzo del prisma, e dimostra il rapporto intimo di queste due dispersioni. Ecco la vera fisica matematica, esclama un dotto biografu di Descartes, quella che per mezzo del calcolo riduce i fatti alla categoria medesima di altri fatti, senza bisogno di alcuna nuova ipotesi, e che così gli unisce gli uni agli altri per nodi indissolubili. Così, siccome la sua filosofia, la fisica di Descartes porta l'impronta del pensiero di un ingegno potente; e se nel suo sistema del mondo e nella spiegazione di alcuni fenomeni naturali non ha con egual felicità incontrato la verità, è egli sotto questo rapporto solamente che debbono essere riguardati gl'immensi suoi lavori? E a quale altezza non bisogna egli esser collocati per poter pronunziar giudizio sugli errori di un tal uomo?

I lavori geometrici di Descartes, che debbono ora occuparci, gli assegnano per sempre il posto il più elevato fra gli uomini d'ingegno che hanno contribuito ai progressi della scienza. I suoi diritti, in questo rapporto, furono riconosciuti anco da' suoi più crudeli nemici; e i teologi olandesi, dei quali ebbe a soffrire gli attacchi, resero omaggio alla bellezza e all'importanza delle sue scoperte matematiche. Ma noi abbiamo avuto ragione di dire che l'alta attitudine di Descartes in questo ramo del sapere emanava pure dal principio superiore sul quale fondò la sua filosofia. Questa idea non è nuova, e l'illustre Fontenelle aveva detto prima di noi, formando un paralello fra Descartes e Newton: » Tutti e due, geometri eccellenti, hanno veduto la necessità di trasportare la geometria nella fisica; tutti e due hanno fondato la loro fisica sopra una geometria, che essi non dovevano che ai loro propri lumi. » Fu infatti per una facoltà spontanea della sua ragione che Descartes operò nelle matematiche una felice rivoluzione; e infatti le sue idee, esposte quasi senz'ordine e soprattutto senza sviluppo, sono prodotte nella sua geometria sotto la forma di principj che il suo genio si contenta di svelare, senza degnarsi di scendere a farne l'applicazione.

Il trattato di geometria di Descartes comparve in seguito del suo *Metodo*, non, come è stato detto, perchè non facesse alcun pregio di metodi di cui era l'inventore e da cui la sua gloria doveva trarre il maggiore splendore, ma perchè era stato condotto dal ragionamento, o se vuolsi dalla speculazione metafisica, alla scoperta de' suoi più bei teoremi.

Prima di Descartes eransi già fatti molti progressi nelle ricerche puramente algebriche. Era stata trovata la soluzione delle equazioni che oggi si dicono del terzo e del quarto grado; ma la notazione di cui si faceva uso era ancora grossolana e imbarazzata dai rapporti materiali mediante i quali s'introducevano nell'algebra le idee di lunghezza, di superficie, di solidità. Ora l'algebra è una lingua che ha per oggetto speciale e per utilità principale di esprimere puramente i rapporti astratti delle quantità. Bisognava adunque, per estenderla, cominciare a liberarla dalle considerazioni estranee che la inceppavano: fu questo appunto il primo servigio che le rese Descartes, e la sua metafisica gli fu singolarmente utile in questa circostanza. Secondo l'antica limitazione dell'algebra, i prodotti successivi di una stessa quantità erano talvolta rappresentati colle dimensioni dell'estensione, cioè con un quadrato e con un cubo in prospettiva, qualche volta colla lettera iniziale Q o C posta sopra la quantità, qualche volta finalmente colla ripetizione stessa della lettera per mezzo della quale era indicata la quantità. A tutte queste muta-

zioni imbarazzanti e che ritardavano il pensiero, Descartes ne sostituì una chiara, semplice, generale, e soprattutto calcolabile. Immaginò di porre una cifra al di sopra della quantità, e coi differenti valori di questa cifra indicò le sue diverse potenze. Per comprendere tutta l'importanza di questa scoperta, non si ha che a gettare gli occhi sulle antiche formule, e confrontare la loro estrema complicatezza colla forma semplice, e per così dire palpabile, che l'uso degli esponenti ha dato loro. L'oggetto dell'algebra è, come abbiamo detto, di esprimere in un modo rigoroso i rapporti astratti delle quantità; la sua perfezione consiste nel metterli nella più chiara evidenza. Allora lo spirito, non dovendo più fare alcuno sforzo per comprendere questi rapporti, può portare tutta la sua sagacità, tutta la sua energia all'interpretazione stessa della espressione algebrica alla quale si trova ridotto il quesito.

L'applicazione dell'algebra alla geometria è senza contrasto una delle più belle scoperte di Descartes. Egli è il vero fondatore di quella scienza oggigiorno così feconda, conosciuta sotto il nome inesatto di *Geometria analitica*. Prima di lui erasi per verità applicata l'algebra ai problemi della geometria, rappresentando le incognite del problema per mezzo di lettere, e cercando di risolvere le equazioni alle quali conduceva l'enunziato di ciascun problema. La scoperta di Descartes è di un ordine tutto diverso. Immaginò che la natura di ciascuna curva dovesse essere espressa e definita da una certa relazione tra due linee variabili, di cui l'una figurava le ascisse e l'altra le ordinate. Comprese che, per trovare questa relazione, era sufficiente lo scrivere in linguaggio algebrico una delle proprietà caratteristiche della curva; per esempio pel circolo, che sia una curva piana, tutti i punti della quale siano egualmente distanti da uno stesso punto. Tale scoperta aveva questo di ammirabile che, tradotta una volta in tal guisa in formula la natura della curva, non si trattava più che di considerare in modo astratto l'equazione che ne risultava, per dedurne tutte le altre proprietà geometriche contenute implicitamente nella definizione primitiva. Questa deduzione, che presso gli antichi esigeva lo sforzo di mente il più penoso, e che spesso rassomigliava meno ad una ricerca diretta che ad una specie di divinazione, trovavasi così ridotta ad una facile interpretazione e per così dire ad un giuoco, che, non esigendo alcuno sforzo dello spirito, gli permetteva di applicarsi tutto a sviluppare le combinazioni della formula le più notabili e le più necessarie. Ma Descartes non si arrestò a questo punto: fece una scoperta inversa della precedente; e dopo avere insegnato ad esprimere e a conoscere le proprietà di una curva per mezzo di un'equazione algebrica, considerò queste stesse equazioni come emblemi di curve che si tagliavano in punti le cui ascisse erano le radici delle equazioni. Una volta in possesso di questi metodi generali, potè enunziare in linguaggio algebrico e risolvere direttamente dei problemi geometrici che avevano fermato tutta l'antichità, come lo fa vedere egli stesso nella prima questione che prende a risolvere nella sua geometria, e può ora concepirsi come con questo segreto poteva ridersi della maggior parte delle questioni che imbarazzavano i matematici del suo secolo. La geometria di Descartes era difficilissima a leggersi pel suo tempo, ed egli stesso dice di non aver cercato di sviluppare molto i suoi metodi, per mostrare senza dubbio ai suoi nemici la sua superiorità per la difficoltà stessa che avrebbero ad intenderla. Oggigiorno questi metodi sono i primi che si pongono nelle mani della gioventù, e per questa ragione ci sembrano più facili; ma dobbiamo però convenire che le cognizioni geometriche che si avevano prima di Descartes non erano per così dire che elementari relativamente alle sue: e soltanto dalle aggiunte che vi ha fatto deve segnarsi l'epoca di una rivoluzione che ha sì energicamente favorito i progressi della geometria. Il metodo delle tangenti, che diede in seguito, deve occupare un po-

sto distinto tra le sue scoperte, sebbene dopo di lui se ne siano immaginati altri di un' espressione più semplice e più generale. Egli stesso parla del suo metodo con una specie di entusiasmo: » Di tutti i problemi, dice egli, che ho scoperti » in geometria, niuno ve ne ha che sia più utile e più generale, e di tutti è » quello di cui ho maggiormente desiderato di trovare la soluzione. » In seguito Descartes propose nella sua corrispondenza un altro metodo per le tangenti; ma tutti e due sono peraltro fondati sugli stessi principj.

La scienza deve a Descartes la cognizione della natura e dell' uso delle radici negative, ed è il primo che le abbia introdotte nella geometria; ha dato una regola per determinare dietro la sola ispezione dei segni il numero delle radici positive e negative, ed ha pure arricchito la teoria di Harriot d' una scoperta che le ingiuste critiche di Wallis non hanno potuto spogliare del suo carattere di originalità e di utilità agli occhi di tutti i geometri. Si sa che la limitazione di questa regola consiste nel non dovere l' equazione avere alcuna radice immaginaria. Descartes, come hanno preteso Wallis e Roberval, non ha ignorato questa limitazione, poichè egli stesso l'annunzia in un altro passo della sua geometria, dicendo che queste radici sì positive che negative, non sono sempre reali, ma qualche volta soltanto immaginarie. Wallis ha ricusato a Descartes, collo stesso spirito d' ingiustizia, una scoperta molto importante nell' algebra, vale a dire il *metodo dei coefficienti indeterminati*, che consiste nel supporre un'equazione con dei coefficienti indeterminati, di cui si trova quindi il valore per mezzo del confronto de' suoi termini con quelli di un' altra equazione che deve essergli eguale. Noi non possiamo dar qui che l' enunciato delle scoperte e dei lavori di Descartes nella geometria e nell' algebra; esse sono esposte alla parola che le concerne in tutti i loro sviluppi, ed è perciò che noi passiamo sotto silenzio le diverse querele scientifiche alle quali queste scoperte hanno potuto dar luogo, sia al tempo di Descartes, sia dopo di lui.

Così Descartes non si è occupato di alcuna delle parti più elevate del sapere senza lasciarvi l' impronta del suo ingegno. In matematiche, gli sono dovute importanti scoperte in tutte le parti dell' algebra e specialmente nella teoria delle equazioni; l' applicazione dell' algebra alla geometria ed un metodo ingegnoso per condurre le tangenti alle curve. Nella fisica matematica, la teoria dell' arcobaleno, la legge della refrazione e la dimostrazione del principio fondamentale della meccanica, sono tutte scoperte preziose che la scienza deve a Descartes. Si scorge in una delle lettere di questo uomo sommo, scritta nel 1631, che egli prima del Torricelli aveva sospettato il peso dell' aria e la sua azione per sostenere l' acqua nelle trombe e nei tubi chiusi da una delle loro estremità, poichè egli vi spiega il fenomeno della sospensione del mercurio in un tubo chiuso nella parte superiore, attribuendolo al peso della colonna d' aria elevata fino al di là delle nuvole. Egli ha finalmente determinato per mezzo del principio razionale che ha stabilito in filosofia, il gran movimento intellettuale che continua ad operarsi nello spirito umano.

Abbiamo veduto di sopra che l' illustre Descartes, profondamente afflitto dalle ingiuste persecuzioni che le sue opinioni gli attiravano in Olanda, aveva accettato l' asilo che la regina Cristina gli aveva offerto alla sua corte. Allora però la Francia non si mostrò indifferente alla gloria di quest' uomo prodigioso. Le sue dottrine vi fecero rapidi progressi, e il re Luigi XIII gli fece invano offrire i suoi favori. Egli accettò in seguito una pensione di 3000 lire che gli fu esattamente pagata ad onta delle turbolenze politiche che agitavano allora il paese. È vero che nell' anno seguente gli venne accordato il brevetto di una pensione più considerabile, e che quando ebbe pagato i soliti diritti non ne intese più parlare; ma che erano in realtà queste triste e meschine ricompense verso un uomo

come Descartes, mentre una moltitudine di poeti e di commedianti, onorati nella sua patria, vi ricevevano le ricompense che non sono dovute che all'ingegno?

Il cangiamento di vita che la nuova sua posizione presso la regina Cristina impose a Descartes, alterò ben presto la sua salute, che aveva sempre avuto bisogno dei maggiori riguardi. Il clima freddo della Svezia e la tirannia delle abitudini del cortigiano, alle quali fu obbligato a sottoporsi, abbreviarono la sua vita. Assalito da un male di petto soffrì per qualche giorno e morì a Stockholm il dì 11 Febbrajo 1650 in età appena di 54 anni.

La regina di Svezia versò delle lacrime alla morte di Descartes; essa volle farlo seppellire nella tomba dei re, ma la Francia reclamò per mezzo del suo ambasciatore la sua spoglia mortale, che non ostante non fu trasferita da Stockholm a Parigi che diciotto anni dopo il doloroso avvenimento che aveva privato il mondo dotto dei vivissimi lumi del suo ingegno, e la Francia del più grand'uomo che giammai abbia ricevuto la luce nel suo seno.

Le reliquie di Descartes furono deposte nella chiesa di santa Genoveffa, e si scolpì sulla sua tomba il seguente epitaffio che offre un compendio notabilissimo della sua vita e de' suoi illustri lavori.

D. O. M.

RENATUS DESCARTES,

Vir supra titulos omnium retro philosophorum
Nobilis genere, armoricus gente, turonicus origine
In Gallia Flexiae studuit,
In Pannonia miles meruit,
In Batavia philosophus delituit,
In Suecia vocatus occubuit.
Tanti viri pretiosas reliquias
Galliarum percelebris tunc legatus, Petrus Chanut,
Christinae, sapientissimae reginae, sapientium amatrici
Invidere non potuit, nec vindicare patriae
Sed quibus licuit cumulatas onoribus
Peregrinae terrae mandavit invitus,
Anno 1650, mense Februario, aetatis 54.
Tandem post septem et decem annos
In gratiam Christianissimi regis
Ludovici decimi quarti
Virorum insignium cultoris et remuneratoris
Procurante Petro d'Alibert
Sepulchri pio et amico violatore
Patriae redditae sunt,
Et in isto urbis et artium culmine positae,
Ut qui vivus apud exteros otium et famam quaesierat
Mortuus apud suos cum laude quiesceret,
Suis et exteris in exemplum et documentum futurus.
I nunc viator,
Et divinitatis immortalisque animae
Maximum et clarum assertorem
Aut jam crede felicem aut precibus redde.

Nel carattere di questo grand' uomo eravi un misto di affabilità e di nobile fierezza che annunziava ad un tempo la purezza dell' animo suo e l'elevatezza del suo spirito. Non ostante, si lasciò talvolta trasportare dalla vivacità della sua immaginazione in dispute scientifiche nelle quali la ragione non fu sempre dalla sua parte. Ebbe ragione con Roberval, matematico francese, che, mal conoscendo il suo genio, cercò in tutta la sua vita di farlo passare per un vile plagiario delle scoperte altrui; ebbe torto verso Fermat, al quale non rese dapprima intera giustizia, e che potendo sostenere una lotta che non era ineguale si affrettò premurosamente a rendere omaggio all' ingegno di Descartes e a cercare la sua amicizia. Ma queste macchie, simili a quelle del sole che non possono scorgersi che per mezzo di potenti strumenti, non alterano in nulla la bellezza del suo ingegno, come quelle non oscurano lo splendore di quest' astro. Del resto, tutte le testimonianze dei contemporanei attestano la bontà del cuore, la generosità e la pietà illuminata di Descartes, di cui un apologista ha detto con ragione: » Si può esser giunti più oltre di lui, ma nella via che egli ha » tracciata; si può esser saliti più in alto, ma partendo dal punto di elevazione » in cui egli ha collocato gli spiriti; si può finalmente averlo combattuto con » successo, ma servendosi delle armi che egli stesso ha somministrato ».

Ci sia ora permesso, terminando questa succinta notizia intorno al nostro grande ed illustre Descartes, di emettere un voto che sarà compreso dalla Francia illuminata. Il nostro paese ha elevato monumenti e statue alla memoria di alcuni scrittori poco degni del cieco entusiasmo che hanno eccitato, e i cui lavori non hanno fatto che attaccare la morale pubblica e ritardare il progresso dell' umanità: che la memoria di Descartes sia finalmente onorata, e che la statua di Voltaire non faccia più rammentare, nel tempio stesso della scienza, l'ingratitudine della Francia verso l' illustre restauratore della filosofia razionale.

Le opere di Descartes sono state raccolte sotto il titolo di *Opera omnia*, Amsterdam, 1670-83, 9 vol., in-4 picc.; ivi 1692-1701, 9 vol. in-4 picc.; ivi, 1713, pure 9 vol. in-4 picc. L' edizione francese comprende 13 volumi in-12, cioè: I *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences; plus la Dioptrique et les Météores, la Mécanique et la Musique, qui sont des essais de cette méthode*, Parigi, 1724, 2 vol. in-12, con note di N. Poisson, prete dell' oratorio: la prima edizione di questo *Discorso* è di Leida, 1637, in-4; II *L' homme de René Descartes et la formation du foetus, avec les remarques de Louis de Laforge*, Parigi, 1729, in-12; III *Les principes de la philosophie, ecrits en latin par Descartes et traduits en français par un des ses amis* (Picot), Parigi, 1724, in-12. Questa edizione è fatta sulla quarta rivista e corretta da Clerselier e pubblicata nel 1681 in-4. La prima edizione di questa traduzione è del 1647. IV *Méditations métaphysiques, traduites du latin de l' auteur par M. le D. D. L. N. S.* (Carlo d'Albert duca di Luynes); *et les Objections faites contre ces méditations, avec les Réponses de l' auteur, traduites par M. C. L. R.* (Claudio Clerselier); *troisième édition divisée par articles, avec des sommaires par R. F.* (Renato Fédé dottore in medicina d' Angers), Parigi, 1724, 2 vol. in-12. La prima edizione di questa traduzione è del 1647, in-4; V *Les passions de l' ame, le monde, ou Traité de la lumière et de la géométrie; nouvelle édition augmentée d' un discours sur le mouvement local et sur la fièvre suivant les principes du même auteur*, Parigi, 1726, in-12; VI *Lettres, où sont traitées les plus belles questions touchant la morale, la physique, la médecine et les mathématiques*, Parigi, 1724-25, 6 vol. in-12. La prima edizione di queste lettere fu pubblicata da Clerselier dal 1657 al 1667 in 3 vol. in-4. Vittorio Cousin ha pubblicato recentemente una nuova edizione completa delle opere di Descartes,

Digitized by Google

preceduta dall' elogio dell' autore scritto da Thomas, Parigi, 1824-26, 11 vol. in-8. L' ultimo tomo comprende le opere che non erano ancora state tradotte in francese: e vi si trova inoltre: 1.° Una *Lettre de Descartes à Voet*, in confutazione di due libelli, l' uno dello stesso Voet e l' altro di uno de' suoi scolari; 2.° *Regles pour la direction de l' esprit*; 3.° *Recherches de la verité par les lumières naturelles*; 4.° *Premières pensées sur la génération des animaux*; 5.° Un piccolo articolo intitolato: *Des saveurs*; 6.° Un estratto dei manoscritti di Descartes.

DESCENDENTE (*Astron.*). *Vedi* Discendente.

DESCENSIONE (*Astron.*). *Vedi* Discensione.

DESCHALES (Claudio Francesco Milliat di), matematico, nato nel 1621 a Chamberì, vestì in età di quattordici anni l' abito della compagnia di Gesù, e per nove anni professò l' umanità e la rettorica. Pieno di zelo per la conversione degli infedeli, domandò ed ottenne di essere inviato alle missioni orientali. Durante il viaggio ebbe occasione d' istruirsi nelle particolarità della navigazione, e fin d' allora si sviluppò in lui un genio irresistibile per le matematiche. Al suo ritorno, Luigi XIV lo creò professore d' idrografia a Marsiglia, ed ivi colla scorta delle osservazioni astronomiche projettò una carta del mare mediterraneo, corretta dai molti errori che deformavano tutte le carte di quell' epoca. In seguito fu chiamato a Torino ad occuparvi una cattedra di matematiche, e morì in queste città il 28 Marzo 1678 in età di 67 anni.

In un secolo così prodigiosamente fecondo di sommi talenti nelle scienze matematiche, il p. Deschales seppe acquistarsi meritata fama di dotto e profondo geometra. Dimostrò pure di non essere schiavo dei pregiudizj che regnavano al suo tempo contro il sistema di Copernico, poichè, se non ne prese apertamente la difesa, ebbe almeno il coraggio di far palese la ignoranza in matematica e in fisica di alcuni de' suoi detrattori. Il merito particolare delle opere di questo dotto gesuita è la chiarezza colle quale vi espone le proposizioni le più complicate e difficili. Le principali sue opere sono: I *Euclidis elementorum libri octo ad faciliorem captum accomodati*, Lione, 1660, in-12, libro spesso ristampato, tradotto in francese nel 1672, commentato da Ozanam, (Parigi, 1709, in-12), e da Audierne (Parigi, 1753, in-12). Il *Cursus seu mundus mathematicus*, Lione, 1674, 3 vol in-fol. Niun corso di matematiche era stato per anche pubblicato tanto esteso e completo, e il p. Deschales deve principalmente a tale opera la sua reputazione. Essa si compone di trentuno trattati, divisi in centodiciotto libri, e vi si trovano esposti i principj di tutte le diverse parti delle matematiche sì pure che applicate. Sono stati per lungo tempo tenuti in pregio i trattati sulla prospettiva e sulla gnomonica; nel trattato del taglio delle pietre e in quello de' legnajoli si trovano parecchie cose che prima non si conoscevano. Il trattato di navigazione e quello della ricerca dei centri di gravità hanno pure goduto di molto credito, e il primo di essi venne tradotto in francese e pubblicato col seguente titolo: *L' art de naviguer demontré par principes*, Parigi, 1673, in-4. Dopo la morte di Deschales, i suoi manoscritti passarono a suo fratello Francesco Amadeo d' Arvillars, vescovo di Tarentasia, che gli comunicò al p. Amato Varcin, gesuita; e questi colla loro scorta pubblicò una nuova edizione ampliata e corretta del *Cursus seu mundus mathematicus*, Lione, 1690, 4 vol. in-fol. Tale seconda edizione comprende, oltre ciò che trovasi nella prima: 1.° Una storia delle matematiche da Talete fino al 1670; 2.° Gli ultimi sei libri di Euclide; 3.° Una confutazione del sistema di Descartes. III *Principes généraux de la géographie mathématique*, Parigi 1676, in-12. Roucher ha voluto fare onore al p. Deschales della prima idea che la terra sia schiacciata; ma Lalande ha pienamente confutato tale opinione nel *Journal de Paris*. L' elogio di questo dotto gesuita scritto

dal p. Giacinto Ferreri dello stesso ordine si legge nella seconda edizione del *Mundus mathematicus*.

DESCRITTIVA. Geometria Descrittiva. Uno dei rami della Scienza dell'estensione. *Vedi* Geometria.

L'oggetto della geometria descrittiva si riduce alla costruzione ossia alla generazione universale dell'estensione per mezzo delle *projezioni*.

La geometria descrittive ha due fini distinti: il primo consiste nello stabilire i metodi di rappresentare sopra un piano, che ha due sole dimensioni, lunghezza e larghezza, tutti i corpi della natura che ne hanno tre, lunghezza, larghezza e profondità, quando però questi corpi possano essere esettamente definiti; il secondo insegna il modo di ritrarre le forme dei corpi dalla loro esatta descrizione, e di dedurre tutte le verità che emergono dalla loro forma, e dalle loro relative posizioni.

Siccome i due accennati fini si conseguono per mezzo delle projezioni, esporremo in questo punto i principii del *metodo delle projezioni* rinviando per maggiori particolarità all'articolo Projezioni.

1. Se da un punto *a* (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 1) situato nello spazio si abbassa sopra un piano fisso VXY una perpendicolare *a*A, il piede A di questa retta dicesi la *projezione* del punto A sul piano in questione. Egualmente abbassando delle perpendicolari da tutti i punti della retta *abd* .... la serie dei punti A, B, D .... forma ciò che si chiama la projezione della retta *abd* sul piano fisso; e questa projezione è necessariamente rettilinea, poichè tutte queste perpendicolari essendo evidentemente contenute nel pieno condotto da una fra di loro *a*A e dalla retta *ad*, è l'intersezione del *piano projettante da*A *col piano di projezione* VXY, che dà la projezione ABD.

Generalmente la projezione di una curva qualunque *mnp* è la serie dei piedi delle perpendicolari *m*M, *n*N, *p*P .... abbassate dai suoi diversi punti sul piano fisso, e questa projezione MNP .... è una linea la di cui curvatura differisce ordinariamente da quella della curva date nello spazio. D'altra parte, la riunione di queste perpendicolari compone una superficie cilindrica nel senso generale di questa parola, e si chiama il *cilindro projettante* delle curva *mnp*.

2. Premesso ciò, dico che un punto, una retta, o una curva, sono completamente determinate di posizione, quando sono date le loro projezioni sopra due piani fissi la di cui situazione è conosciuta, e i quali non sono paralelli; siano infatti VXY, e XYZ due pieni di questo genere, A e A′ le projezioni di un punto dato nello spazio: se dal punto A si eleve una perpendicolare indefinita A*a* sul piano VXY, questa retta passerà necessariamente pel punto domandato; questo punto dovrà ancore trovarsi sopra la retta A′*a* elevata perpendicolarmente al piano XYZ; dunque esso non potrà occupare nello spazio che *una posizione unica*, determinata dall'intersezione di queste due perpendicolari. Osserveremo, che se le due rette A*a* e A′*a* non s'incontrassero, non esisterebbe alcun punto dello spazio che avesse per projezioni A e A′; ma ciò prova solamente che le due projezioni di un punto non debbono essere prese in un modo del tutto arbitrario, e che fra queste projezioni vi è una dependenza come lo vedremo nel seguito.

3. Siano ora AD e A′D′ le projezioni di una retta incognita, sopra i due piani fissi VXY, XYZ. Immaginando per il primo un piano indefinito DA*a* perpendicolare a VXY, questo piano conterrà evidentemente la retta domandata; essa sarà ancora nel piano D′A′*a* condotto per D′A′ perpendicolarmente a XYZ; dunque la linea incognita si troverà necessariamente all'intersezione di questi due piani, che è una retta unica e *determinata*. L'unica eccezione che vi fosse, sarebbe quella in cui i due piani projettanti DA*a*, e D′A′*a* si confondessero in un solo, il che supporrebbe che la retta nello spazio, come pure le sue due

projezioni, si trovassero precisamente perpendicolari all'intersezione XY dei due piani fissi: allora due projezioni di questo genere non basterebbero più per definire la retta in questione, e sarebbe necessaria una terza projezione fatta sopra un altro piano fisso non paralello all'intersezione dei due primi.

4. Finalmente se son date le projezioni MNP e M'N'P' di una curva incognita, s'immaginerà per la prima un cilindro perpendicolare al piano VXY, e per la seconda un altro cilindro perpendicolare al piano XYZ; La curva domandata dovrà evidentemente trovarsi situata sopra ciascuna di queste superfici, e per conseguenza la sua posizione e la sua forma saranno determinate dalla loro intersezione *mnp*, che potrà però essere *una linea a doppia curvatura*, vale a dire tale che tutti i suoi punti non siano compresi in un medesimo piano.

D'ora in avanti definiremo graficamente un punto ovvero una linea per mezzo delle sue due projezioni; e quando diremo che un tal punto o una tal linea son dati, bisognerà intendere che sono conosciute le loro projezioni. Quanto alle superfici vedremo (*Vedi* Superficie) come bisogna modificare l'uso delle projezioni per rappresentarle comodamente.

5. In tutto quello che precede, abbiamo supposto che le projezioni si ottenessero per mezzo di rette abbassate perpendicolarmente sul piano fisso. Alcune volte, però, s'impiegano rette *oblique* al piano, quantunque sempre paralelle ad una direzione data, e le conseguenze che abbiamo stabilite nei numeri 2, 3 e 4 sussistono egualmente; ma sono necessari gravi motivi per adottare un tal genere di projezioni, perchè in generale è meno semplice ed offre meno esattezza nei risultamenti grafici, attesochè rette le quali si tagliano obliquamente, lasciano una maggior incertezza sopra l'esatta posizione del loro punto d'incontro. Così, qualora non si avverta espressamente del contrario, le projezioni saranno sempre ortogonali.

Per simili motivi, ordinariamente si scelgono i piani di projezione VXY, XYZ perpendicolari fra loro, e per rappresentarli con maggior facilità, si suppone che il primo sia *orizzontale* e l'altro *verticale*. La loro intersezione XY, che è una linea importante a osservarsi, si chiama *la linea di terra*.

6. Ecco dunque un metodo sufficiente per esprimere graficamente i dati di un problema senza alcuna indeterminazione; rimane da modificarlo in modo che le costruzioni possano tutte eseguirsi sopra un solo piano. Per arrivare a ciò s'immagina, dopo aver proiettato i punti e le linee che sono in questione sopra i due piani rettangolari VXY, XYZ, che quest'ultimo abbia girato intorno della linea di terra YX come cerniera, e si pone in modo da formare col piano orizzontale, un solo e medesimo piano VZ'; ed è sopra quest'ultimo che effettivamente si tracciano tutte le costruzioni che si dovrebbero aver fatte sopra i due piani primitivi. Tuttavia non bisogna perdere di vista che questo quarto di rivoluzione del piano verticale intorno alla sua intersezione col piano orizzontale non è ammesso che come un mezzo di esecuzione; e tutte le volte che vorremo dimostrare un'operazione per mezzo di considerazioni geometriche, dobbiamo, col pensiero, rialzare il piano verticale, e figurarselo sempre in una situazione perpendicolare al piano orizzontale.

7. Dopo che abbiamo fatto in guisa che i piani fissi, non ne formino che uno solo, esiste fra le due projezioni di un medesimo punto dello spazio una dependenza importantissima a rammentarsi. Infatti, le due rette A*a* e A'*a* che projettano il punto *a* in A e A', sono perpendicolari, l'una al piano orizzontale; l'altra al piano verticale; così il piano A*a*A', condotto per queste due rette, si troverà perpendicolare ai due piani di projezione, e quindi alla loro intersezione XY; dunque il piano A*a*A' taglierà questi seguendo delle rette AF, A'F, perpendicolari sopra XY, e le quali vanno a terminare al medesimo punto F di questa

linea di terra. Premesso ciò, quando il piano verticale XYZ gira intorno di XY, esso porta seco la retta A'F, che, nel tempo di questo movimento, rimane perpendicolare alla cerniera XY; per conseguenza, dopo il quarto di rivoluzione del piano verticale, la retta FA' prenderà una posizione FA'' che sarà evidentemente il prolungamento di FA. Così *le due projezioni* A *e* A'' *di un medesimo punto dello spazio debbono sempre trovarsi sopra una medesima retta perpendicolare alla linea di terra* XY, allorquando i piani delle projezioni non ne formano che un solo: dimodochè se si prende a piacere una di queste projezioni, A per esempio, bisognerà condurre la retta indefinita AF perpendicolare a XY, e situare in qualche parte sopra il prolungamento di AF, la seconda projezione A''.

8. Quanto alla retta *ad*, se si fa girare similmente il punto D' in D'', la projezione verticale A'D' diverrà dopo ciò A''D''; ma essa non avrà con la projezione orizzontale AD alcuna dependenza necessaria, dimodochè possiamo tracciare *arbitrariamente* le linee AD e A''D'' per rappresentare le due projezioni di una medesima retta nello spazio. Bisogna però eccettuare il solo caso in cui AD fosse perpendicolare alla linea di terra XY; allora la projezione verticale dovrebbe ancora essere il prolungamento di AD; ma abbiamo di già detto (n.° 3) che, in questo caso tutto particolare, due projezioni di questo genere lascerebbero la retta indeterminata di posizione.

9. D'ora in avanti porremo i piani di projezione, in modo che la linea di terra XY abbia la posizione indicata dalla (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 2.); e siccome allora la parte VXY del foglio di disegno rappresenterà nel medesimo tempo la porzione anteriore del piano orizzontale e la porzione inferiore del piano verticale che si è confusa con la prima, nel mentre che la parte XYZ comprenderà la porzione superiore del piano verticale e la porzione posteriore del piano orizzontale, non basterà, per determinare graficamente un punto nello spazio, di dare indistintamente le sue due projezioni A ed A'. Bisognerà ancora enunziare se il punto A è la projezione orizzontale, ovvero se è la projezione verticale; poichè l'una e l'altra di queste ipotesi sono ammissibili, e esse produrrebbero una grandissima differenza quanto alla posizione reale del punto nello spazio. Col fine perciò di rammentare agli occhi il piano al quale è relativa ciascuna delle projezioni, converremo di notare ordinariamente, con lettere senza accento, le projezioni *orizzontali* dei punti o delle rette, e con lettere accentate le projezioni *verticali*. Così il punto (A, A') indicherà il punto dello spazio che è proiettato orizzontalmente in A e verticalmente in A'; il punto (B, B') indicherà quello che ha per projezione orizzontale B e per projezione verticale B', e seguirà lo stesso del punto (C, C'), o del punto (D, D'); sarà ben fatto di esercitare l'immaginazione a rappresentarsi le diverse posizioni di questi punti, tanto al di sopra quanto al di sotto, in avanti o in addietro dei piani di projezione, onde poter con facilità riconoscere in quali dei quattro angoli diedri, formati da questi due piani, si trova situato un punto definito per mezzo delle sue projezioni.

10. Le medesime convenzioni dovranno essere applicate alle linee, così la retta (AB, A'B') *Vedi* (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 3) sarà quella che ha per projezione orizzontale AB, e per projezione verticale A'B': ma siccome d'altra parte una retta è determinata di posizione dalla conoscenza di due dei suoi punti, daremo il metodo generale di trovare *le tracce di una retta*, vale a dire i punti ove essa va ad incontrare i due piani di projezione.

La traccia verticale della retta (AB, A'B') essendo un punto comune al piano verticale ed alla retta, essa dev'essere proiettata orizzontalmente sopra la linea di terra XY, e ancora sopra la linea AB indefinitamente prolungata; dun-

que questa traccia ha per projezione orizzontale il punto C, e per conseguenza qualche parte sarà situata sopra la verticale CC′: ma questa medesima traccia dev' essere evidentemente situata sopra la projezione verticale A′B′ indefinita; dunque essa è al punto C′. Da ciò risulta questa regola generale che bisogna continuamente aver presente: *Si prolunga la projezione orizzontale della retta fino alla linea di terra, e a questo punto si eleva una perpendicolare indefinita la quale, col suo incontro con la projezione verticale, darà la traccia verticale della retta proposta.*

La traccia orizzontale della medesima retta, essendo un punto situato nel medesimo tempo nel piano orizzontale e sopra la linea proposta, si troverà proiettata verticalmente sopra la linea di terra XY e sopra A′B′ indefinita; dunque questa traccia avrà per projezione verticale, il punto D′, e quindi qualche parte sarà situata sopra la perpendicolare D′D alla linea di terra. Ma d'altra parte questa traccia deve necessariamente trovarsi sopra la projezione orizzontale AB indefinita; dunque essa è al punto D. Così, in generale, *si prolunghi la projezione verticale fino alla linea di terra, e, a questo punto, si elevi sopra quest' ultima linea una perpendicolare indefinita la quale, col suo incontro con la projezione orizzontale, determinerà la traccia orizzontale della retta in questione.*

11. Viceversa, se fossero date le due tracce D e C′ di una retta, sarebbe facile di concluderne le projezioni; mentre, siccome il punto C′ appartiene alla medesima retta, la perpendicolare C′C, abbassata sopra la linea di terra, darà un punto C della projezione orizzontale, e questa sarà evidentemente DC. Egualmente il punto D, il quale appartiene alla retta, essendo proiettato verticalmente sopra la linea di terra, darà un punto D′ della projezione verticale che sarà D′C′.

Sarà bene esercitarsi a risolvere queste due questioni inverse l'una dell'altra, sopra rette diversamente situate, tali quali sono nella (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 3); la linea (EF, E′F′), di cui la traccia orizzontale è in F, e la traccia verticale in G′, e la linea (HK, H′K′), di cui K′ è la traccia verticale, ed L la traccia orizzontale.

12. Nel terminare queste nozioni preliminari, stabiliremo alcune regole essenziali a osservarsi nelle traccie di tutti i disegni. Questi disegni, infatti, dovendo servire a rappresentare esattamente la forma degli oggetti, bisogna che i diversi modi di puntazione che s'impiegheranno, offrano una sorte di linguaggio intelligibile agli occhi; vale a dire che manifestino chiaramente la situazione relativa delle differenti parti, distinguano quelle che sono nascoste da quelle che sono visibili per l'osservatore, e facciano conoscere i risultamenti di un problema con le linee le quali non hanno servito che di mezzi ausiliari per arrivarvi: questo è il motivo per cui adotteremo costantemente le seguenti regole:

1.° Le linee PRINCIPALI, vale a dire quelle che rappresentano *i dati* o *i risultamenti* di un problema, saranno segnate con *una linea piena e continua*, quando esse saranno *visibili*; ma se queste linee principali sono *invisibili*, esse saranno *punteggiate*, vale a dire tracciate in punti tondi. Si vedono esempi di questi due modi di puntazione nelle linee ABCD ed EFGH della (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 4).

2.° Le linee AUSILIARI, vale a dire tutte quelle che non entreranno nella classe precedente, e le quali non saranno impiegate che come mezzi per arrivare alla soluzione del problema, saranno *punteggiate* o composte di piccole linee interrotte: tale è la linea P (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 4). Quanto a queste linee ausiliari, non potremo mai distinguere se esse sono visibili o non lo sono, poichè si considera che esse non esistano che nell' immaginazione del geometra, il quale le concepisce per arrivare al risultamento domandato.

3.° Allorquando fra queste linee ausiliari se ne troverà alcuna la quale offrirà maggiore importanza, e sopra della quale vorremo richiamare l'attenzione in un modo particolare, la potremo rappresentare con *una linea mistilinea*, composta di piccole linee separate da uno o due punti rotondi, come nella retta M ed N (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 4). Tuttavia dobbiamo guardarsi dal troppo moltiplicare questo modo di puntazione, e consultare sopra di ciò il buon gusto, e dei modelli bene scelti; d'altra parte non bisogna giammai impiegare queste linee mistilinee per rette, le quali riuniscano semplicemente le due projezioni di un medesimo punto.

13. Presentemente rimane da spiegare come, fra le linee *principali* di ciascuna questione, si conosceranno quelle che sono visibili, e che dobbiamo segnare con linea piena, da quelle che sono invisibili, e che dobbiamo punteggiare. Regole complete sopra questo soggetto non possono darsi in questo punto, ma bensì le daremo nella teoria delle superfici curve e dei loro piani tangenti; ma siccome nei problemi dei quali ci occuperemo in questo punto non s'incontreranno che rette e piani, basterà pel momento di stabilire le seguenti convenzioni.

Si ammette sempre che l'osservatore, il quale considera la projezione di un oggetto sul piano *orizzontale*, sia situato *al di sopra di questo piano e ad una distanza infinita sopra la verticale*, che passa per uno qualunque dei punti di quest' oggetto, ma sul davanti del piano verticale; e questa convenzione che renderà più semplice, come in seguito lo vedremo, il disegno del contorno apparente delle superfici curve, è stata d'altra parte suggerita dalla maniera con la quale si proiettano i punti dello spazio sopra un piano. Infatti, i raggi visuali, condotti dall'occhio dell'osservatore a tutti i punti di un corpo, si avvicinano tanto più ad essere perpendicolari al piano orizzontale, quanto l'osservatore si eleva di più rimanendo sopra la medesima verticale; dimodochè quando il punto di vista è ad una distanza infinita, questi raggi divengono paralelli, e coincidono con le rette che servono a proiettare i punti del corpo. Donde segue che *la projezione orizzontale di un oggetto, non significa altro che una* VEDUTA *di questo oggetto, presa da un punto infinitamente lontano sopra la verticale*; risultamento che giustifica sufficientemente la convenzione enunziata di sopra.

Per una simile ragione, qualunque projezione *verticale* vien considerata come veduta da un osservatore, situato *ad una distanza infinita sopra una perpendicolare al piano verticale, elevata sul davanti di questo piano e al di sopra del piano orizzontale.*

Ciò premesso, qualunque linea o porzione di linea *principale* che si troverà al di sotto del piano orizzontale, o dietro il piano verticale, sarà giudicata invisibile, e, come tale, punteggiata in punti rotondi. Se di più si trova nella questione qualche piano realmente esistente, e che una porzione di linea principale sia situata dietro questo piano o al di sotto, rapporto all'osservatore, questa porzione dovrà ancora essere *punteggiata*: ma bisognerà rammentarsi che queste distinzioni non riguardano per niente *le linee ausiliari* per la ragione detta (n.° 12, 2°). Si potrà digià riconoscere le applicazioni di queste regole nella (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 3), e avremo cura di rammentarle nella maggior parte dei problemi che risolveremo.

Premesso ciò, passiamo a risolvere i problemi fondamentali della geometria descrittiva sopra le linee rette e i piani.

14. *Costruire la retta che passerebbe per due punti* (A, A') *ed* (M, M') (Tav. LXXXVII, fig. 5); *e quindi determinare la vera distanza di questi due punti.*

Dalle definizioni che abbiamo stabilite n.° 1, è evidente che la projezione

orizzontale della retta cercata passerà per i punti A ed M, nel mentre che la projezione verticale passerà per A′ ed M′; dunque questa retta indefinita rimane proiettata seguendo AMB ed A′M′B′, laonde con ciò si trova completamente determinata di posizione (n.° 3). D'altra parte possiamo costruire le sue tracce (n.° 10), le quali saranno determinate dai punti (B, B′) e (C, C′).

Rapporto alla distanza dei due punti dati, essa vien misurata nello spazio dalla porzione di retta proiettata sopra AM ed A′M′; ma con facilità possiamo accorgerci che una retta finita è sempre più lunga della sua projezione sopra un piano, eccettuato il caso che la prima si trovi paralella al piano sopra del quale si proietta; mentre in questo caso la retta nello spazio è evidentemente della medesima lunghezza della sua projezione. Fatta questa osservazione, immaginiamo che la linea (AM, A′M′) giri intorno della verticale proiettata in A senza cangiare inclinazione con quest' ultima; mediante ciò l'estremità (A, A′) rimarrà immobile, nel mentre che l'altra estremità (M, M′) rimarrà ad un'altezza costante, descrivendo soltanto un arco di circolo intorno all'asse di rotazione. Ora, se continuiamo questo movimento fintanto che la retta mobile sia diventata paralella al piano verticale, cosa che succederà quando la projezione AM avrà preso la situazione AP, paralella alla linea di terra XY, allora l'estremità M arrivata in P, si troverà proiettata verticalmente (n.° 7) in qualche parte sopra PIP′ perpendicolare a XY; e siccome dev' essere alla medesima altezza di M′, se si conduce l'orizzontale HM′P′, il punto P′ sarà la proiezione verticale dell'estremità mobile della retta in questione. D'altra parte, poichè l'altra estremità (A, A′) è rimasta invariabile, ne segue che la retta (AM, A′M′) attualmente si trova proiettata seguendo AP, A′P′; e la sua vera lunghezza è esattamente la proiezione verticale A′P′, per l'osservazione fatta al principio di questo articolo. Da ciò possiamo concludere la seguente regola, che conviene aver sempre presente.

Per trovare la distanza di due punti (A, A′) *ed* (M, M′), *si formi un triangolo rettangolo* A′HP′, *un lato* A′H *del quale sia la differenza dell' altezze* A′R *ed* M′K *di questi due punti al* di sopra del piano orizzontale, *e di cui l'altro lato* HP′ *sia eguale allo spazio* AM *delle due projezioni orizzontali*; *l'ipotenusa* A′P′ *sarà la distanza domandata.*

15. Si otterrebbe il medesimo scopo costruendo sul piano orizzontale *un triangolo rettangolo di cui un lato eguagliasse la differenza delle distanze* AR *ed* MK *dei due punti dati al piano verticale, e di cui l'altro lato fosse l'intervallo* A′M′ *delle due projezioni verticali, l'ipotenusa esprimerebbe egualmente la distanza dei due punti nello spazio*, e dovrebbe trovarsi identica con A′P′. Per provare questa nuova costruzione, che si lascia alla cura dello studioso l'eseguire, basterà immaginare che la retta proposta abbia girato intorno dell'orizzontale che è proiettata verticalmente in A′, senza cangiare d'inclinazione rapporto a quest' ultima, fino a tanto che questa retta mobile sia diventata paralella al piano orizzontale.

16. Si sarebbe ancora potuto abbassare la retta (AM, A′M′) sul piano orizzontale, facendo girare intorno AM, come cerniera, il trapezio invariabile formato dalla retta proposta e dalle verticali che proiettano le sue estremità in A ed in M. Mediante ciò queste due verticali sarebbero rimaste perpendicolari alla cerniera AM, ed avrebbero preso le posizioni AA″ = RA′, MM″ = KM′; dimodochè tracciando la retta A″M″ si sarebbe egualmente ottenuto la vera distanza dei due punti (A, A′) ed (M, M′). D'altra parte in questo punto si presenta una di quelle verificazioni che nelle operazioni grafiche non bisogna trascurare; vale a dire che la linea A″M″ prolungata deve andare a terminare in B, poichè quest' ultimo punto essendo la traccia orizzontale della primitiva retta, si

trovava situato sulla cerniera AMB, e, come tale, ha dovuto restare immobile nel tempo della rivoluzione della retta.

17. *Viceversa, se fosse data la retta indefinita* (AB, A'B') *con uno dei suoi punti* (A, A'), *e che sopra questa linea si volesse trovare un altro punto* (M, M' *che fosse lontano dal primo di una quantità data* δ, si farebbe girare come precedentemente la retta proposta sul piano orizzontale, facendo $AA'' = RA'$, e tirando A''B. Quindi si prenderebbe sopra quest'ultima linea un intervallo $A''M'' = \delta$: poi, rialzando la retta A''B, il punto M'' si riporterebbe in M con una perpendicolare sulla cerniera AB; e finalmente, dalla projezione orizzontale M, si concluderebbe (n.° 7) l'altra projezione M', il che determinerebbe completamente il punto domandato.

18. *Da un punto dato* (D, D') (Tav. LXXXVII, fig. 6) *condurre una retta che sia paralella ad una retta conosciuta* (AB, A'B').

Allorchè nello spazio due rette sono paralelle, i piani che le proiettano sono evidentemente paralelli fra loro, e per conseguenza le intersezioni di questi col piano di projezione, vale a dire le projezioni delle rette saranno necessariamente paralelle l'una all'altra. Viceversa, allorquando le projezioni orizzontali di due rette sono paralelle, e che segue il medesimo delle loro projezioni verticali, i quattro piani proiettanti sono paralelli due a due; donde segue che le loro scambievoli intersezioni, vale a dire le rette nello spazio, sono paralelle fra loro. Da ciò, se pel punto D si conduce una paralella DE ad AB, e pel punto D' una paralella D'E' ad A'B', la retta domandata avrà per projezione DE e D'E'; essa sarà perciò completamente determinata, e d'altra parte le tracce di questa retta, che saranno in F ed in E', si costruiranno a seconda di quanto abbiamo detto al n.° 10.

19. *Costruire il piano che passerebbe per tre punti dati* (A, A'), (B, B'), (C, C'), (Tav. LXXXIX, fig. 1).

Prima di tutto osserveremo che per determinare graficamente la posizione di un piano, basta di assegnare le sue due tracce, vale a dire le intersezioni di questo piano con i piani di projezione. Queste due tracce dovranno sempre tagliare la linea di terra nel medesimo punto, ma l'angolo che esse comprenderanno fra di loro sopra i piani di projezione dopo aver fatto un quarto di rivoluzione per posarsi sul piano orizzontale, non sarà eguale a quello che esse formano nello spazio. Inoltre è evidente, che quando una retta è situata in un piano, le tracce di questa retta (n.° 10) debbono esser situate in qualche parte sopra le tracce del piano.

Premesso ciò, uniamo i punti dati due a due con delle rette (AB, A'B'), (BC, B'C'), (AC, A'C'), le quali avendo ciascuna due punti nel piano cercato, vi saranno contenute tutte intere; quindi, costruiamo come al (n.° 10), le tracce verticali E', F' e G' di queste rette. Allora questi tre punti che debbono evidentemente appartenere all'intersezione del piano incognito col piano verticale di projezione, si troveranno necessariamente in linea retta, e saranno più che sufficienti per determinare la traccia verticale F'F'G' del piano domandato. Egualmente la traccia orizzontale DHK di questo piano si otterrà costruendo le tracce orizzontali D, H e K delle tre rette ausiliari; d'altra parte le due linee E'G' e DK ottenute in questa guisa, dovranno andare ad incontrare la linea di terra XY in un medesimo punto Q, il che offrirà una nuova verificazione delle antecedenti costruzioni.

Se si volesse *far passare un piano per una retta data ed un punto dato*, si unirebbe questo punto con uno di quelli della retta, ovvero si condurrebbe una paralella a questa pel punto dato; allora con questo metodo si conoscerebbero due rette situate nel piano cercato, e le di cui tracce basterebbero per determinare quelle di questo piano.

20. *Per un punto dato* (A, A') (Tav. LXXXIX, fig. 2.) *condurre un piano che sia paralello ad un altro piano la di cui traccia orizzontale sia* ST *e la traccia verticale* TV'.

È evidente che due piani paralelli debbono avere le loro tracce respettivamente paralelle; così basterà trovare un punto di ciascuna traccia del piano domandato. Per eseguir ciò, immaginiamo pel punto dato (A, A'), un' orizzontale che sia situata nel piano incognito; ciò è sempre possibile, poichè basta condurre questa retta ausiliare paralellamente alla traccia orizzontale di questo medesimo piano, ovvero paralellamente al ST. Se dunque si conduce in questa direzione la retta AB, e che si conduca A'B' paralella alla linea di terra, queste saranno evidentemente le due projezioni dell' orizzontale contenuta nel piano incognito. Premesso ciò, costruendo (n.° 10) il punto B' ov'essa va a forare il piano verticale, questo punto apparterrà necessariamente alla traccia del piano cercato, la quale sarà per conseguenza la retta B'Q paralella a V'T: l' altra traccia dovendo passare pel punto Q, sarà la linea IQ paralella a TS.

Possiamo ancora, per verificazione, costruire direttamente un punto della traccia orizzontale del piano incognito. Per eseguir ciò, immagineremo in questo piano, e pel punto (A, A'), una retta ausiliare paralella al piano verticale; essa avrà evidentemente per projezioni AC paralella alla linea di terra, e A'C' paralella a V'T. Se dunque si cerca (n.° 10) il punto C ove questa retta ausiliare va a forare il piano orizzontale, questo punto apparterrà, necessariamente alla traccia del piano domandato; così bisognerà che la retta PQ, digià costruita, passi pel punto C.

21. Osserviamo che nell' attuale disegno non abbiamo considerato i due piani STV' e PQR' come esistenti realmente, poichè allora il primo avrebbe reso l' altro invisibile, e sarebbe stato necessario (n.° 12. 1.°) punteggiare nella totalità le tracce di quest' ultimo, il che avrebbe moltiplicato molto i punti tondi, e soprattutto avrebbe avuto il grave inconveniente di non lasciare scorgere le parti delle tracce situate al di quà dei piani di projezione con quelli che sono al di là. Per questo si suppone in questo punto che si trattasse di trovare solamente le tracce di un piano paralello a quello che avrebbe esso medesimo per tracce ST, e TV', senza costruire effettivamente alcuno di questi piani. Questa restrizione, il di cui scopo è quello di rendere più chiari i disegni, è stata ancora praticata nei disegni che sono stati eseguiti ai numeri 5, 6 e 12.

22. Le considerazioni che abbiamo impiegate nei numeri 19 e 20 (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 1) possono servire a risolvere la seguente questione: *essendo data la projezione orizzontale* AB *di una retta che si sa esser situata nel piano conosciuto* PQR', *trovare l' altra projezione.* La retta incognita forerà il piano verticale in un punto che dev' essere proiettato orizzontalmente in E (n.° 10); d' altra parte questa traccia non potendo essere fuori della traccia verticale QR' del piano che contiene questa retta, sarà necessariamente situata in E', e questo è uno dei punti della projezione domandata. Quindi, con ragionamenti simili, vediamo che la retta in questione va a forare il piano orizzontale in D; dunque se si proietta D in D' sulla linea di terra XY, D'E' sarà la projezione verticale della retta proposta. Si vede bene che sarebbe ancora facile di trovare la projezione DE, essendo data solamente la projezione verticale D'E' col piano che contiene la retta.

Se la projezione AB assegnata sul piano orizzontale si trovasse come nella (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 2) paralella alla traccia PQ del piano dato, si otterrebbe in primo luogo, come qui sopra, la traccia verticale B' della retta incognita; ma in seguito la traccia orizzontale di questa retta non esistendo più, poichè AB non incontra PQ, bisognerebbe concluderne che la linea domandata è paralella al piano

orizzontale, e che quindi la sua projezione verticale è la retta A'B' paralella alla linea di terra XY.

Vedremo egualmente che se la projezione orizzontale data è la linea AC paralella a XY, la retta nello spazio è paralella al piano verticale, e che la sua projezione sopra quest'ultimo piano, è la linea C'A' paralella alla traccia QR'.

23. Ecco ancora una questione analoga: *conoscendo la projezione orizzontale* A *di un punto che si sa esser situato sopra un piano dato* PQR' (Tav. LXXXIX, fig. 1), *trovare l'altra projezione.* Pel punto dato A si condurrà una retta qualunque DAE, che considereremo come la projezione orizzontale di una linea situata nel piano PQR'; sarà facile costruire come sopra la projezione verticale D'E' di questa retta, e allora non resterà che da riportare il punto A in A' sopra questa projezione, per mezzo di una perpendicolare alla linea di terra (n.° 7). Così si troverebbe ancora la projezione A conoscendo A'.

Fra le diverse direzioni che si possono dare a questa retta ausiliare DAE, la più comoda è ordinariamente una paralella alla traccia orizzontale PQ, come la linea AB nella (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 2).

24. *Trovare l'intersezione di due piani che avessero per tracce l'uno* PQ *e* QR' (Tav. LXXXIX, fig. 3), *l'altro* ST e TV'.

Se si prolungano le due tracce orizzontali fin tanto che esse si taglino in B, questo punto, evidentemente comune ai due piani, apparterrà alla loro intersezione, e poichè esso è nel piano orizzontale, questo punto sarà la traccia orizzontale della retta cercata, egualmente il punto A', ove si taglieranno le tracce verticali dei piani dati, sarà la traccia verticale di questa retta. Conoscendo così le due tracce della sezione comune, se ne dedurranno immediatamente (n.° 11) le projezioni che saranno AB e A'B'.

25. Se due tracce si trovassero paralelle, come succede per i piani R'Q*p* e V'TS, il punto B si allontanerebbe indefinitamente, e quindi l'intersezione dei due piani diventerebbe un'*orizzontale* avente per projezioni A'*b*' paralella alla linea di terra, e A*b* paralella a TS: risultamento facile a prevedersi, poichè i piani dati passando allora per due rette paralelle Q*p* e TS, non possano tagliarsi che seguendo una retta paralella a queste.

26. Allorquando le tracce saranno respettivamente paralelle sopra i due piani di projezione nel medesimo tempo (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 4), i piani dati saranno evidentemente paralelli fra loro, e non vi sarà più intersezione; meno che queste tracce non sieno nel medesimo tempo paralelle alla linea di terra, come PQ e P'Q' per uno dei piani, TS e TS' per l'altro: poichè due piani così situati possono ancora tagliarsi seguendo una retta paralella a XY, ma il metodo precedente non è sufficiente per ottenere quest'intersezione.

In questo caso, si conduca a piacere un piano secante ausiliare $\alpha\beta\gamma'$. Esso taglierà il piano [PQ, P'Q'] seguendo la retta (CD, C'D'), la quale si costruisce col metodo generale; e il piano [TS, T'S'] seguendo la retta (EF, E'F'); allora queste due linee daranno, col loro incontro, un punto (M, M') che sarà evidentemente comune ai due piani [PQ, P'Q'], [TS, T'S'], e per conseguenza questi avranno per intersezione la retta (AMB, A'M'B') condotta paralellamente a XY.

In questo punto si potrebbe ancora impiegare un *piano di profilo* condotto paralellamente a XY; questo piano taglierebbe i piani di projezione primitivi seguendo le due rette XV e XZ, delle quali l'ultima prenderà evidentemente la posizione XZ'' allorchè si farà fare un quarto di rivoluzione al profilo, intorno di VX come cerniera, per posarsi sul piano orizzontale. Premesso ciò, il piano di profilo incontrerebbe le tracce verticali dei piani proposti ai punti P' e T', i quali diventano mediante il detto quarto di rivoluzione P'' e T''; dunque

PP'' e TT'' sono le tracce di questi piani sul profilo fatto girare sul piano orizzontale seguendo Z''XV; e siccome queste tracce si tagliano in A'', questo è un punto dell' intersezione domandata, la quale avrà evidentemente per projezione orizzontale la retta AB paralella a XY. D'altra parte, se si rialza il profilo, il punto A'' si proietterà verticalmente in A', ed A'B' paralella a XY sarà la seconda projezione dell' intersezione dei piani proposti.

Se le tracce di questi piani, senza essere paralelle fra loro, passano tutte quattro pel medesimo punto della linea di terra, bisognerebbe ancora ricorrere ad uno dei piani ausiliari che abbiamo impiegati; e potrà con utilità lo studioso costruire il disegno relativo a questo caso particolare.

27. *Costruire il punto d' intersezione di una retta* (AB, A'B') *con un piano dato* PQR' (Tav. LXXXIX, fig. 5).

Per risolvere questo problema, bisogna condurre per la retta data, e in una direzione qualunque, un piano secante: costruire l' intersezione di questo col piano PQR', e siccome questa linea passerà necessariamente pel punto cercato, questo punto sarà determinato dall' incontro di questa intersezione colla retta data.

Adottiamo prima di tutto per piano secante, il piano verticale che proietta la retta data seguendo AB: quest' ultima linea sarà essa medesima la traccia orizzontale di questo piano, e la sua traccia verticale sarà la perpendicolare CC' sopra la linea di terra. Premesso ciò, il piano ACC' taglia il piano dato PQR' seguendo una retta che è proiettata (n.° 24) sopra C'D' e CD; e siccome quest' intersezione incontra la retta data (A'B', AB) al punto M', quest' è la projezione verticale del punto domandato. La seconda projezione di questo punto non è data immediatamente, perchè qui le due rette che combiniamo sono proiettate l' una e l' altra seguendo ADBC; ma la dedurremo da M' abbassando (n.° 7) la perpendicolare M'M sopra la linea di terra. Così il punto (M, M') è quello ove la retta (AB, A'B') fora il piano PQR'.

Possiamo ancora impiegare per piano secante il piano proiettante della retta sul piano verticale, il quale avrà per tracca A'B' a B'F perpendicolare a XY. Questo piano taglierà PQR' seguendo la retta (FG, B'G'), la quale, col suo incontro con AB, dovrà dare il medesimo punto M già ottenuto dalla prima costruzione; così i due processi impiegati simultaneamente serviranno di verificazione.

Osserviamo in questo punto che il piano dato PQR' è una grandezza principale (n.° 12) la quale esiste realmente, e che rende invisibile la porzione della retta (AB, A'B') situata al di sotto del punto di sezione; ed è per questo che la parte (MB, M'B') è stata punteggiata. Quanto al prolungamento BC, esso non è considerato che come una linea ausiliare relativa al piano secante che serve di mezzo per la soluzione.

28. Quantunque i due processi impiegati (n.° 27) siano i più comodi, sarà bene, per esercitarsi, alla combinazione dei piani con le rette, di risolvere ancora il medesimo problema servendoci di un piano secante qualunque: però, siccome questo piano dovrà contenere la retta data (AB, A'B') le di cui tracce sono B e C' (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 6), bisognerà far passare per questi punti, le tracce del piano secante che adotteremo. Conduciamo dunque pel punto B la retta arbitraria SBT, e per i punti T e C' la retta C'TV'; questa saranno le tracce di un piano ausiliare, che conterrà le linee (AB, A'B'). Premesso ciò, i piani STV' e PQR' si tagliano (n.° 24) seguendo la linea (SV, S'V'); e siccome questa incontra (AB, A'B') in (M, M'), questo punto è quello ove la retta data fora il piano PQR': ma bisognerà assicurarsi per verificare le costruzioni, che la retta MM' che riunisce queste due projezioni sia esattamente perpendicolare (n.° 7) sopra la linea di terra.

29. *Per un punto dato condurre una retta che incontri due rette date di posizione.*

Indicheremo soltanto la soluzione di questo problema che può servire di esercizio per familiarizzarsi con i metodi precedenti. Pel punto dato e per la prima retta si condurrà un primo piano, poi un secondo pel medesimo punto e la seconda retta; allora, cercando l' intersezione di questi due piani, si otterrà una retta che evidentemente soddisfarà alle condizioni enunziate.

Possiamo ancora non impiegare che il primo dei piani dei quali abbiamo parlato, quindi cercare (n.° 27) il punto ove esso taglia la seconda retta; allora, unendo quest' ultimo punto col punto dato, otterremo una retta che risolverà il problema.

In generale non vi sarà che una soluzione, qualora però le due rette proposte non si trovino in un medesimo piano col punto dato.

30. Teorema. *Allorquando una retta* (AB, A'B') *è perpendicolare ad un piano* PQR' (Tav. XCI, fig. 1) *le projezioni di questa linea sono respettivamente perpendicolari sopra le tracce del piano.*

Infatti, il piano che proietta la retta seguendo AB è, dalla sua definizione, perpendicolare al piano orizzontale: esso lo è ancora al piano dato PQR', poichè passa per una retta che si suppone perpendicolare a quest' ultimo; dunque questo piano proiettante è nel medesimo tempo perpendicolare sopra i due altri, e quindi alla loro intersezione, che è la traccia orizzontale PQ; per conseguenza questa traccia sarà essa medesima perpendicolare sopra la projezione AB, che si trova nel piano proiettante. Si dimostrerebbe in un modo del tutto simile, che la traccia verticale R'Q è perpendicolare sopra la projezione A'B'.

Viceversa, *se le due projezioni* AB *e* A'B' *di una retta sono respettivamente perpendicolari alle tracce* PQ *e* QR' *di un piano, questo piano e la retta sono perpendicolari l' uno sopra l' altro.* Infatti, il piano proiettante che ha per traccia AB è evidentemente perpendicolare sopra la retta PQ, e perciò anche al piano PQR', che contiene questa linea: egualmente, il piano proiettante che ha per traccia A'B' è perpendicolare alla retta QR', e per conseguenza al piano PQR'. Dunque quest' ultimo trovandosi nel medesimo tempo perpendicolare sopra i due piani proiettanti, lo sarà ancora alla loro intersezione che equivale alla retta data nello spazio.

31. Si osservi però che questo teorema non sarebbe vero quando si trattasse di projezioni oblique (n.° 5.); come pure una simile relazione non esiste fra due rette che sono perpendicolari fra loro; poichè le loro projezioni ortogonali, sopra un medesimo piano, non formeranno un angolo retto, che nel caso in cui una delle linee proposte non sia paralella al piano di projezione.

32. *Trovare la più corta distanza di un piano* (A, A') *ad un piano dato* PQR'.

In primo luogo si abbassi dal punto (A, A') una perpendicolare indefinita sul piano, conducendo (n.° 30) le projezioni AB e A'B' respettivamente perpendicolari sopra le tracce PQ e QR'; quindi si cerchi il punto (M, M') ove questa retta incontra il piano, il che si eseguirà come al n.° 27. tutti i ragionamenti del quale si applicano alla figura attuale in cui d'altra parte abbiamo conservato le medesime notazioni. Allora, AM e A'M' saranno evidentemente le projezioni della più corta distanza domandata, e la grandezza assoluta di questa distanza si otterrà (n.° 14) conducendo l' orizzontale HM'M'', eguale ad AM, e tirando la retta A'M'' che sarà la distanza del punto al piano.

33. *Trovare la più corta distanza di un punto* (C, C') (Tav. CXI, fig. 2) *ad una retta data* (AB, A'B').

Pel punto (C, C') si conduca in primo luogo un piano perpendicolare alla retta

proposta; le sue tracce saranno perpendicolari (n.° 30) alle projezioni AB e A'B', e, per determinare uno dei loro punti, s'immaginerà in questo piano un' orizzontale che parta da (C, C'). Questa retta, che sarà necessariamente paralella alla traccia orizzontale cercata, avrà per projezioni CD perpendicolare ad AB, e C'D' paralella a XY, così, essa anderà a forare il piano verticale in (D, D'); se dunque si conduce D'Q perpendicolare sopra A'B', e QP perpendicolare sopra AB, queste saranno le tracce del piano cercato. Premesso ciò, costruendo (n. 27) il punto (M, M') ove questo piano incontra la retta (AB, A'B'), e unendolo con (C, C'), la retta (CM, C'M') sarà evidentemente contenuta nel piano D'QP, e come tale, si troverà perpendicolare sopra (AB, A'B'); per conseguenza, essa misurerà la più corta distanza domandata, la di cui grandezza assoluta C'M'' si dedurrà dalle projezioni CM e C'M' per mezzo della regola generale esposta n.° 14.

In questo disegno, il piano D'QP non è nè un dato nè un risultamento del primitivo problema, ed è solamente un mezzo per arrivare alla soluzione cercata, e per conseguenza dovremo segnare le sue tracce come linee ausiliari (n.° 19). La medesima osservazione si applica alla seguente figura.

34. *Altra soluzione.* Si faccia passare un piano pel punto (C, C') e per la retta data (AB, A'B') (*Tav.* XCI, *fig.* 3); basterà di unire (C, C') con (A, A'), e di cercare le tracce verticali delle due rette (AB, A'B') e (AC, A'C'): allora B'D'Q e QA saranno le tracce del piano ausiliare del quale abbiamo parlato sopra. Premesso ciò, facciamo girare questo piano intorno della sua traccia orizzontale AQ, e supponiamo che trasporti seco la retta data e il punto dato. In questo movimento di rivoluzione, il punto (B, B') non uscirà dal piano verticale BF perpendicolare alla cerniera AQ; d' altra parte, la distanza B'Q di questo punto al punto fisso Q, rimarrà invariabile; per conseguenza, se si descrive col raggio QB' un arco di circolo che tagli BF in B'', questo punto sarà quello che si ottiene da (B, B') mediante il giro di rivoluzione fatto fare al piano, e la retta proposta come pure la traccia QB' si troveranno aver girato seguendo AB'' e QB''. Egualmente tirando le perpendicolari DD'' e CC'' sopra la cerniera AQ, la linea (ACD, A'C'D') girerà seguendo AD'', e il punto C verrà in C''. Allora nel piano orizzontale ove tutti i dati attualmente si trovano, senza che le loro posizioni respettive abbiano cangiato, potremo abbassare sopra AB'' la perpendicolare C''M'', e questa sarà la distanza cercata nella sua vera grandezza. Questo risultamento è ordinariamente il solo che interessi; però se vogliamo ancora fissare la posizione della più corta distanza, non dobbiamo che rialzare tutto il sistema; il punto M'' si riporterà in M' con una perpendicolare sopra la cerniera AQ, e se ne dedurrà (n.° 7) la projezione verticale M'; dimodochè finalmente la distanza in questione sarà proiettata sopra CM, C'M'.

35. Questo modo di soluzione sarebbe soprattutto utile se si volesse *trovare sopra la retta* (AB, A'B') *un punto che fosse distante da* (C, C') *di una quantità data* δ. Mentre, dopo aver fatto girare come qui sopra la retta data e il punto dato seguendo AB'' e C'', si descriverebbe con un raggio $C''N''=\delta$ un arco di circolo che taglierebbe AB'' in N'', e questo sarebbe il punto domandato dopo aver fatto fare il giro di rivoluzione al piano: quindi rialzando tutto il sistema intorno della cerniera AQ, il punto N'' si riporterebbe in N, e le sue due projezioni sarebbero N, e N'. Generalmente vi sarà una seconda soluzione, poichè l' arco descritto col raggio δ taglierà ordinariamente la retta AB'' in due punti N'' e n''.

36. *Trovare gli angoli che forma un piano dato* PQR' *con i due piani di projezione.* (Tav. XCI, fig. 4).

Si sa, che per misurare l'inclinazione di due piani, basta di tagliarli con un terzo piano che sia perpendicolare alla loro intersezione, e che le due rette tracciate da questo piano secante formano fra loro un angolo che esprime l'inclinazione cercata. Si tagli perciò il piano PQR′ e il piano orizzontale con un piano che sia perpendicolare alla traccia PQ. Questo piano secante, che sarà verticale, avrà per tracce una linea AD perpendicolare a PQ, e la verticale DD′: per conseguenza esso taglierà il piano dato seguendo una retta che, nello spazio, riunirebbe il punto A con D′, e sarebbe l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per lati AD e DD′. Se dunque si fa girare questo triangolo intorno di DD′ per farlo posare sul piano verticale, esso diverrà D′A″D, e l'angolo del medesimo nome misurerà l'inclinazione del piano PQR′ sul piano orizzontale.

Per ottenere l'angolo del piano PQR′ col piano verticale, si taglieranno con un piano CDB′ perpendicolare alla traccia verticale QR′, e ciò darà un triangolo rettangolo avente per lati CD e DB′; per conseguenza questo triangolo, fatto girare intorno di CD, diventerà DB″C, nel quale l'angolo B″ esprimerà l'inclinazione domandata.

37. *Da un punto dato, condurre un piano che faccia un angolo* α *col piano orizzontale, e un'angolo* β *col piano verticale.*

Si osservi prima di tutto che, nel precedente problema, i due piani secanti D′DA e B′DC dovevano tagliarsi essi medesimi seguendo una retta perpendicolare al piano PQR′, e la quale misurerebbe la più corta distanza di questo piano al punto D della linea di terra. D'altra parte siccome questa perpendicolare, fatta girare volta per volta con i due triangoli, si trova evidentemente rappresentatata dalle rette DF e D*f* condotte ad angolo retto sopra le ipotenuse, ne segue che, qualunque sia il piano PQR′, dobbiamo avere la relazione DF = D*f*. Premesso ciò, se, senza conoscere il piano PQR′, che supporremo abbia sopra i piani fissi le inclinazioni α, β, si costruisce a piacere sopra la linea di terra un triangolo rettangolo D′DA″ nel quale l'angolo A″ sia eguale ad α; quindi, che con la perpendicolare DF si descriva un arco di circolo, e che si conduca una tangente B″*f*C che faccia l'angolo B″ eguale a β; questa tangente determinerà, per mezzo del suo incontro col prolungamento della verticale D′D, un punto C della traccia del piano PQR′. Allora tirando la retta CQ tangente all'arco di circolo descritto col raggio DA″, quindi unendo i punti Q e D′, otterremo le tracce di un piano CQD, che avrà sopra i piani fissi le inclinazioni α e β; laonde, per risolvere il problema primitivo, non rimarrà che da condurre pel punto dato un piano paralello a CQD (n.° 20.).

38. *Costruire l'angolo compreso fra due piani dati* PQR′ *e* PSR′ (Tav. XCI, fig. 5).

Bisogna, come abbiamo detto precedentemente, tagliare questi due piani con un terzo che sia perpendicolare alla loro intersezione. Ora questa retta, proiettata (n.° 24) seguendo PR, P′R′, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che ha per lati PR e RR′, e che, dopo fatto girare sul piano orizzontale, diventerà PRR″. Se dunque, per un punto arbitrario A″ di questa ipotenusa, si conduca una perpendicolare A″B, e che quindi si alzi il triangolo R″RP nella situazione verticale PR, è evidente che allora la linea A″B si troverà nel piano secante che si deve condurre perpendicolarmente all'intersezione di questo punto A″; poi, siccome A″B andrà a forare il piano orizzontale in B, la retta CBD, perpendicolare alla projezione PR, sarà (n.° 30) la traccia orizzontale di questo piano secante. Dopo ciò, dobbiamo accorgerci che quest'ultimo piano taglierà i piani proposti seguendo due rette che partano dal punto A″ rialzato, e che terminando in C e D, formeranno un triangolo la di cui base sarà CD, e di cui l'angolo, al vertice A″, sarà quello che si cerca; così non si tratta che di costruire que-

sto triangolo. Ora, la sua altezza è precisamente A''B, poichè questa retta rialzata si trova nel piano verticale RP, che è perpendicolare sopra la base CD; d'altra parte, se si fa girare questo triangolo intorno di CD come cerniera, il vertice A'' non uscirà dal piano verticale PR perpendicolare a questa cerniera: dunque portando sopra PR la distanza BA = BA'', otterremo CAD pel triangolo domandato, e l'angolo del medesimo nome misurerà l'inclinazione dei piani PQR' e PSR'.

Si sarebbe potuto far girare sul piano verticale, l'intersezione dei piani proposti; questa retta sarebbe stata rappresentata da R'P'', e, conducendole una perpendicolare AB', il cui piede B' dovrebbe essere riportato in B, se ne sarebbe fatto lo stesso uso di sopra.

39. Allorquando i piani proposti hanno le loro tracce paralelle sopra uno solo dei due piani di projezione, come R'QP e R'ST, (*Tav.* XCII, *fig.* 6) la precedente costruzione esige una leggera modificazione che ne rende la soluzione più semplice; poichè sappiamo (n.° 25), che allora l'intersezione è la ratta orizzontale (R'V', RV) paralella alle tracce orizzontali. Per conseguanza se si conduce un piano verticale CRR' perpendicolare a questa intersezione, esso taglierà i piani proposti seguendo due rette, le quali formeranno con CD un triangolo avente per vertice il punto R', e per altezza la verticale R'R: dimodochè facendo girare questo triangolo sul piano orizzontale intorno della sua base CD, il vertice R' verrà in R'', e l'angolo CR''D sarà la misura dell'inclinazione dei piani proposti.

Finalmente, se le tracce fossero tutte paralelle alla linea di terra, come nella (*Tav.* LXXXIX, *fig.* 4), si taglierebbero i piani dati col piano di profilo ZXY digià impiegato (n.° 26); e operando come abbiamo fatto in questo numero, si otterrebbe l'angolo PA''T per l'inclinazione dei piani in questione.

40. *Trovare l'angolo di due rette date* (AB, A'B') *e* (BC, *b'c'*) (Tav. XCIII, fig. 1).

S'intende per l'angolo di due rette, che spesso non s'incontrano, l'angolo che comprenderebbero fra loro due rette respettivamente paralelle alle prime, e le quali sarebbero condotte per un medesimo punto dello spazio: cominciamo dunque da esaminare se le linea proposte si tagliano. Ora, se esse hanno un punto comune, questo dovrà esser proiettato orizzontalmente in B e verticalmente in *b'*; ma perchè questi punti fossero le projezioni di un medesimo punto dello spazio, bisognerebbe (n.° 7) che la retta B*b'* si trovasse perpendicolare alla linea di terra, condizione che in questo caso non rimane adempita; per conseguenza, le rette proposte non si tagliano. Allora, condorremo una paralalla alla linea (BC, *b'c'*) per un punto qualunque dell'altra retta, e per eseguir ciò con maggior semplicità, sceglieremo il punto che è proiettato in B, B'. Questa paralella avrà ancora per projezione orizzontale la retta BC digià data, e per projezione verticale la linea B'C' paralella a *b'c'*; dimodochè il problema si ridurrebbe a trovare l'angolo formato dalle due rette (AB, A'B') e (BC, B'C'), che considereremo come dati immediati della questione.

Costruendo le tracce orizzontali A e C di queste rette, la linea AC sarà la base di un triangolo avente per vertice il punto (B, B') ove si tagliano le rette proposte, e di cui l'angolo al vertice sarà quello che si cerca. Ora, l'altezza di questo triangolo è evidentemente l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che avrebbe per base la perpendicolare BH abbassata sopra AC, e per altezza la verticale che proietta il vertice in B, la quale è eguale a B'K; per conseguenza, se prendiamo KH'' = BH, e che si tiri B'H'', questa retta sarà l'altezza del triangolo primitivo. Adesso se facciamo girare quest'ultimo sul piano orizzontale intorno della sua base AC, il vertice non uscirà dal piano verticale HB perpendicolare

a questa base; dunque portando l'altezza B'H'' da H in B'', il triangolo cercato si troverà riportato seguendo AB''C, e l'angolo del medesimo nome sarà quello che formavano nello spazio le due rette (AB, A'B') e (BC, B'C').

41. Quando una di queste rette, per esempio la seconda, sarà paralella al piano orizzontale, il triangolo del quale ci siamo serviti non esisterà; ma la traccia orizzontale del piano delle due rette proposte, che nel caso generale era AC, diventerà allora una paralella a BC: dimodochè facendo girare come sopra, questo piano intorno della sua traccia, otterremo ancora l'angolo domandato.

Non parleremo del caso in cui le rette fossero tutte due paralelle al piano orizzontale, poichè allora l'angolo che esse formerebbero nello spazio sarebbe eguale a quello che comprenderebbero le loro projezioni.

Finalmente, se fosse proposto nel caso generale, di dividere in due parti eguali l'angolo delle due rette che si tagliano, si farebbe questa divisione dopo aver fatto girare quest'angolo sul piano orizzontale; poi si rialzerebbe l'angolo e la retta che lo divida, osservando che il punto, ove quest'ultima linea va a tagliare la traccia orizzontale del piano delle rette date, rimane immobile nel tempo di questo movimento di rotazione.

42. *Trovare l'angolo formato da una retta* (AB, A'B') *con un piano* PQR' (Tav. XCIII, fig. 2).

L'angolo di una retta con un piano sarebbe una quantità indeterminata, se con ciò non si convenisse d'intendere l'angolo, che forma la retta proposta con la sua projezione ortogonale sul piano; e questa scelta si fonda nell'essere quest'ultimo angolo evidentemente il più piccolo di tutti quelli, che fa la retta con le diverse linee tracciate pel suo piede nel piano in questione. Segue da ciò, che abbassando da un punto di questa retta una perpendicolare sul piano proposto, l'angolo compreso fra questa perpendicolare e la retta primitiva sarà il complemento di quello che si vuole ottenere, e sarà sufficiente a dedurne quest'ultimo.

Si conduca dunque pel punto (B, B'), preso arbitrariamente sopra la retta data, una perpendicolare (BC, B'C') al piano PQR', quindi si costruisca l'angolo formato dalle due rette (AB, A'B') e (BC, B'C'). Applicando a questo caso il metodo del (n.° 40), vedremo che bisogna abbassare la perpendicolare BH sopra AC, prendere KH''=BH, e portare l'ipotenusa B'H'' da H in B'': allora AB''C sarà l'angolo delle due rette. Quindi costruiremo il complemento conducendo, per esempio, B''D perpendicolare sopra CB''; e finalmente AB''D sarà l'angolo formato dalla retta (AB, A'B') col piano PQR'.

43. Il medesimo metodo può servire a trovare *gli angoli di una retta con le sue projezioni*, poichè questi sono gli angoli che essa forma col piano orizzontale e col piano verticale; solamente, le costruzioni precedenti potranno essere rese molto più semplici facilmente. D'altra parte, si arriva a questi risultamanti in un modo ancora più pronto, facendo girare la retta sopra uno dei piani fissi, come al n.° 14, ove l'angolo ABA'' (*Tav.* LXXXVII, *fig.* 5) è l'inclinazione della retta (AB, A'B') sopra la sua projezione AC, o sul piano orizzontale.

44. *Costruire la posizione e la grandezza della linea, che misura la più corta distanza fra due rette non situate nel medesimo piano.*

Si sa che, nello spazio, due rette possano non incontrarsi, e non ostante non essere paralelle; allora bisogna cercare, fra tutte le linee che riuniscono due qualunque dei loro punti, qual'è la più corta; ma per meglio far comprendere la serie dell'operazioni da effettuarsi per risolvere questo problema, cominceremo a indicarle sopra una figura in prospettiva, ove AB e CD rappresenteranno le due rette proposte (*Tav.* XCIII, *fig.* 3). Se, per un punto qualunque B della prima, si conduce una retta BE paralella a CD, e che s'immagini il piano ABE, questo piano sarà esso medesimo paralello alla linea CD; così, abbassando da un

punto di quest' ultima una perpendicolare DF sul piano ABE, la distanza cercata non potrebbe essere minore di DF. Ma per far vedere che una retta eguale a DF può effettivamente riunire due punti delle linee proposte; si conduca pel piede F di questa perpendicolare una paralella FG a CD; questa linea FG incontrerà necessariamente AB in un dato punto G, senza di che AB sarebbe paralella a CD, il che è contrario all' ipotesi ammessa. Ora, se dal punto G si eleva la perpendicolare GH sul piano ABE, essa sarà evidentemente contenuta nel piano CDFG già perpendicolare sopra ABE, e per conseguenza GH incontrerà CD. Questa linea GH, eguale e paralella a DF, misurerà perciò la più corta distanza delle rette AB e CD, e si vede che essa si troverà perpendicolare a tutte due nel medesimo tempo, poichè essa lo è sul piano ABE paralello a queste rette.

Per confermare *a posteriori* la prima di queste due conseguenze, basta osservare che unendo due punti qualunque *m* ed *n* delle linee proposte, la retta *mn* uscirà dal piano CDFG, tutte le volte che il punto *n* sarà differente da G; in questo caso *mn* sarà un'obliqua rapporto al piano ABE, e, come tale, sarà più lunga della perpendicolare *mp* che eguaglia GH. Quanto al caso in cui il punto *n* coincidesse con G, la retta *m*G sarebbe allora obliqua rapporto a CD, e per conseguenza più lunga della perpendicolare GH, che rimane perciò la più corta di tutte le linee che possono riunire due punti qualunque delle retta proposte.

45. Eseguiamo adesso le costruzioni che non abbiamo che indicate di sopra, e si riconoscerà la differenza essenziale che esiste fra i processi della geometria ordinaria, e i metodi con i quali la geometria descrittiva ottiene risultamenti completamente determinati, per la soluzione di problemi relativi alle tre dimensioni dello spazio.

Siano adunque (*Tav.* XCIII, *fig.* 4) (AB, A'B') e (CD, C'D') le due rette date: si comincia dall' assicurarsi che esse non si trovino in un medesimo piano, osservando in primo luogo che esse non sono paralelle, e che quindi i punti ove le loro projezioni verticali e orizzontali si tagliano, non sono situate (n.° 40) sopra la medesima perpendicolare alla linea di terra. Premesso ciò, si scelga il punto (B, B') della prima retta per condurre una paralella (BE, B'E') alla seconda, e si costruiscano le tracce AEQ e QB' del piano che conterrebbe le linee (AB, A'B') e (BE, B'E'): quindi si abbassi da un punto (D, D') della seconda retta, una perpendicolare (DF, D'F') sul piano AQB', e si cerchi (n.° 27), per mezzo del piano proiettante DRR', il punto (F, F') ove questa perpendicolare incontrerà il piano AQB'. Adesso bisognerà condurre pel piede (F, F'), e paralellamente a (CD, C'D') una retta (FG, F'G') che dovrà necessariamente (n.° 44) tagliare (AB, A'B'); per conseguenza i due punti G e G' dovranno essere sopra una medesima perpendicolare alla linea di terra. Quindi dal punto (G, G') condurremo paralellamente a (DF, D'F') la linea (GH, G'H'); e, siccome essa deve ancora incontrare la retta (CD, C'D'), bisognerà ancora che H e H' si corrispondano sopra una medesima perpendicolare alla linea di terra. Allora GH e G'H' saranno le projezioni della più corta distanza domandata; poi, per ottenere la grandezza assoluta, si prenderà (n.° 14), sopra l' orizzontale condotta pel punto G', una parte KG''=GH, e si tirerà la retta G''H' che sarà finalmente la vera lunghezza della distanza in questione.

46. Si potrebbe ancora risolvere il medesimo problema cercando l' intersezione di due piani perpendicolari ad AQB', e che passassero l' uno per la retta (AB, A'B'), e l' altro per la retta (CD, C'D'). D' altra parte questi piani si determinerebbero abbassando una perpendicolare sopra AQB' da un punto di ciascuna delle rette proposte.

47. Se le due rette proposte fossero paralelle fra loro, la loro distanza sarebbe per tutto la medesima, e, per ottenerla, basterebbe di cercare *la più corta di-*

stanza della prima retta ad un punto della seconda, per esempio, alla traccia orizzontale di questa; ora questo è uo problema del quale abbiamo data la soluzione nei numeri 33 e 34.

48. Le diverse questioni che abbiamo trattato, contengono tutti gli elementi necessari per risolvere i problemi, ove non saranno da combinare che rette con piani, e se ne troveranno utili applicazioni *nella risoluzione dell'angolo Triedro* che in breve esporremo. Presentemente faremo soltanto osservare che essendo date le projezioni di tutti i vertici di un poliedro, sapremo determinare la posizione e la lunghezza di ciascuna delle sue costole, l'inclinazione di ciascuna faccia sul piano orizzontale o l'angolo delle due facce fra loro; potremo ancora costruire col metodo del quarto di rivoluzione da farsi fare al piano verticale per ridurlo a formare un solo piano coll'orizzontale, e nelle sue vere dimensioni, il poligono che forma una qualunque di queste facce, poi trovare la sezione che produrrebbe nel poliedro un piano la di cui posizione fosse assegnata. Viceversa, se la situazione del poliedro è definita da altre condizioni in numero sufficiente, potremo concludere le sue due projezioni: ma siccome i processi varieranno necessariamente con la scelta dei dati, non ne citeremo che un esempio, il quale basterà per indicare il metodo da seguire negli altri casi.

49. *Un paralellepipedo rettangolo riposi con la sua base, sopra un piano che è inclinato all'orizzonte di una quantità* ω, *e che ha per traccia orizzontale* PQ (Tav. XCIII, fig. 5); *una delle costole di questa base è proiettata orizzontalmente seguendo* AB, *nel mentre che le due altre costole contigue con quella, hanno delle lunghezze date* l' *e* l'': *si domanda di costruire la projezione orizzontale e verticale di questo corpo.*

Pel vertice B, s'immagini un piano di profilo PRR′ perpendicolare alla traccia PQ; esso taglierà il piano dato seguendo una retta che formerà con PR l'angolo ω; ~~per~~ conseguenza, se si fa fare il consueto quarto di rivoluzione a questo profilo intorno di PR, e che si costruisca l'angolo $RPR'' = \omega$, poi che si riporti il punto R″ sopra la verticale RR′, la retta R′Q sarà (n.° 36) la traccia verticale del piano dato ove riposa la base del paralellepipedo. D'altra parte se si fa girare quest'ultimo piano al solito intorno di PQ, il punto B, che è proiettato in B″ sul profilo, si trasporterà evidentemente in b; dimodochè Ab sarà la vera lunghezza della costola AB riportata sul piano orizzontale. Allora, tirando la retta Ad eguale ad l' a perpendicolare sopra Ab, otterremo due dei lati della base riportata sul piano orizzontale; poi, rialzando questa faccia, questi due lati si troveranno proiettati seguendo AB e AD, e il paralellogrammo ABCD sarà la projezione orizzontale della base del paralellepipedo. Premesso ciò la costola perpendicolare a questa base, e che parte dall'angolo B, è proiettata orizzontalmente (n.° 30) sopra la retta indefinita BP perpendicolare a PQ; nal mentre che sopra il profilo, questa costola è rappresentata nella sua vera grandezza dalla linea B″F″ eguale a l'' e condotta ad angolo retto sopra PR″; per conseguenza, se si proietta l'estremità F″ in F, BF sarà la projezione orizzontale della costola in questione: poi, formando il paralellogrammo ABFE, e terminando le altre facce col mezzo di diverse paralelle, otterremo facilmente la projezione completa ABCDHEFG di tutto il corpo sul piano orizzontale.

Quanto all'altra projezione, osserveremo che i lati AD e CD si trovano nel piano PQR′ e che però (n.° 22) le loro projezioni verticali sono A′K′ ed M′N′ le quali, col loro incontro, determinano il punto D′, projezione verticale dell'angolo D. Si potrebbe ancora trovare i punti D′, C′, B′, delle loro projezioni orizzontali e le loro altezze al di sopra della linea di terra; poichè quest'altezze sarebbero date dal profilo, ove i punti in questione sono tutti proiettati sopra la retta PR″. Se di più, si proietta il vertice C in C′ sopra M′N′

potremo terminare il paralellogrammo A'D'C'B'; e dopo aver condotto per i quattro angoli di questa base, delle perpendicolari alla traccia QR', basterà di proiettare sopra queste rette indefinite i punti E, F, G, H in E', F' G' H', il che d'altra parte dovrà dare delle rette respettivamente paralelle ai lati della base inferiore A'B'C'D'.

Rimarrà finalmente da conoscere quali sono le costole visibili sopra ciascun piano di projezione, osservando le regole stabilite (n.i 12 e 13); e dovremo rammentarsi che il punto di vista essendo differente pel piano verticale e pel piano orizzontale (n.° 13.), una medesima costola, come (AD, A'D'), può esser visibile sopra uno dei piani, e invisibile sopra l'altro.

Risoluzione dell' angolo Triedro.

50. In un angolo solido a tre facce SABC (*Tav.* XCV, *fig.* 1.), il vertice offre tre angoli piani, e tre angoli diedri; i primi sono gli angoli rettilinei formati dalle costole fra loro, gli altri sono le inclinazioni scambievoli delle facce. Di questi sei angoli, tre qualunque essendo dati, si tratta di trovare gli altri, il che offre sei problemi distinti; poichè, indicando con A, B, C gli angoli diedri che hanno respettivamente per costole SA, SB, SC, e per α, β, γ gli angoli piani o facce, che sono opposte a questi angoli diedri, si possono dare:

1° Le tre facce o angoli piani	α, β, γ
2.° Due facce e l'angolo diedro compreso	α, β, C
3.° Due facce e l'angolo diedro opposto ad una di loro . .	α, β, B
4.° I tre angoli diedri	A, B, C
5.° Due angoli diedri e la faccia compresa	A, B, γ
6.° Due angoli diedri e una delle facce opposte	A, B, β

Queste sono le sole combinazioni veramente distinte, e ancora i tre ultimi casi possono riportarsi ai tre altri col soccorso di un angolo triedro supplementario.

51. Da un punto qualunque S' preso nell'interno dell'angolo solido S, si abbassi una perpendicolare, sopra ciascuna delle sue facce, e, per fissare le idee, consideriamo il piano BSC come orizzontale, e la costola SA come situata al di sopra di questo piano. Formeremo così un secondo angolo triedro S', avente per costole la verticale S'A', con le due rette S'B', S'C', respettivamente perpendicolari sopra le facce ASC, ASB, e questo nuovo angolo solido si dice supplementario del primo, perchè le facce e gli angoli diedri dell'uno sono i supplementi degli angoli diedri e delle facce dell'altro; ma, avanti di dimostrare queste relazioni inverse, osserviamo che non è indifferente, per formare il nuovo angolo solido, di abbassare le perpendicolari da un tale o tal punto dello spazio; poichè tre rette o tre piani che si tagliano nel medesimo punto S', e i quali sono prolungati da una parte e dall'altra di questo punto, determinano sempre otto angolo triedri differenti, fra i quali non ve ne sono che due (simmetrici l'uno dell'altro e opposti pel vertice) che sieno veramente supplementari dell'angolo dato SABC. Così, per non commettere errore nella maniera di prolungare le perpendicolari, abbiamo raccomandato di abbassarle sopra le facce, a cominciare da un punto preso nell'interno dell'angolo solido proposto; in seguito potremo trasportare ove vorremo nello spazio l'angolo solido così formato S'.

52. Premesso ciò, indicando con A', B', C' gli angoli diedri compresi fra le facce che si tagliano seguendo S'A', S'B', S'C' e con α', β', γ' le facce opposte a queste costole, si vede che il piano A'S'B', perpendicolare alle due facce BSC, ASC, le taglierà seguendo due rette A'E', B'E, che saranno esse medesime

perpendicolari sopra SC, e per conseguenza l'angolo A'EB' sarà la misura dell'angolo diedro C. Ora, il quadrilatero piano S'A'EB' ha due dei suoi angoli che sono evidentemente retti, cioè; A' e B'; dunque i due altri sono supplementari, e si ha

$$A'S'B'+A'EB'=180^\circ, \text{ ovvero} \ldots \gamma'+C=180^\circ;$$
$$\text{proveremo egualmente che} \ldots \beta+B=180^\circ,$$
$$\alpha'+A=180^\circ,$$

considerando i quadrilateri S'A'DC' e S'C'FB' prodotti dalle sezioni delle facce A'S'C' e B'S'C' nell'angolo solido S. Dunque le facce dell'angolo solido S' sono veramente i supplementi dell'angolo solido S.

53. Adesso consideriamo gli angoli diedri di S'; le due facce B'S'A', C'S'A' tagliano il piano BSC al quale ciascuna è perpendicolare, segnendo le rette A'E, A'D; dunqne l'angolo rettilioeo DA'E è la misura dell'angolo diedro A'. Ma nel qoadrilatero SDA'E, gli angoli D ed E sono evidentemente retti, poichè la faccia A'S'B' è perpendicolare sopra SC, e A'S'C' sopra SB; per conseguenza i due altri angoli di questo quadrilatero sono supplementari, e si ha

$$DA'E+DSE=180^\circ, \text{ ovvero} \ldots A'+\alpha=180^\circ;$$
$$\text{proveremo egualmente che} \ldots B'+\beta=180^\circ,$$
$$C'+\gamma=180^\circ,$$

per mezzo dei quadrilateri SEB'F e SDC'F. Donqoe gli angoli diedri di S' sooo i supplementi della facce di S, e possiamo dire ebe quest'ultimo angolo solido, è alla sua volta supplementario dell'angolo solido S'.

54. Osserviamo qni cbe descrivendo dal punto S eome centro una sfera di un raggio qualooque SA, essa sarebbe tagliata dalle facce dell'angolo solido S, seguando tre archi di circoli grandi AB, BC, CA, i qoali formerebbero un triangolo aferico, i di cui lati misorerebbero gli angoli piani α, β, γ, e i di cui angoli non sarebbero altra cosa ebe le inclinazioni A, B, C delle facce dell'angolo solido. Per conseguenza, la costrozione di quest'ultimo, conoscendo tre dei auoi elementi, equivale alla soluzione grafica dei problemi che tratta per mezzo del calcolo la trigonometria sferica. D'altra parte, se si trasportasse al centro S l'angolo solido S', le soe facce taglierebbero la medesima sfera, seguendo un altro triangolo che sarebbe il triangolo *supplementario* o *polare* ABC, e del quale faeciamo uso ancora nella trigonometria sferica.

A tutto rigore, per avere il triangolo polare di ABC nella situaziooe nella quale ordinariamente si adopra nella trigonometria, bisognerebbe adottare l'angolo solido simmetrico di S'A'B'C', il quale si otterrebbe prolongando le tre costole al di là del punto S'; vale a dire che sarebbe stato necessario, fin dal principio, elevare dal vertice S tre perpendicolari alle facce di quest'angolo, l'una sopra BSC e situata dalla medesima parte di questa faccia che la costola SA; l'altra sopra CSA e dalla medesima parte della costola SB; finalmente la terza sopra ASB, e dalla medesima parte di SC. L'angolo solido così costruito, avrebbe tagliato la sfera precisamente seguendo il triangolo polare ABC; ma la figura sarebbe stata poco intelligibile senza il soccorso dei triangoli sferici ed è per questo che abbiamo preferito la costruzione del o.° 51; molto più che qui ove non si tratta che di angoli solidi, quelli che sono simmetrici l'ono dell'altro si trovano composti con i medesimi elementi disposti soltanto in on altro ordine, e che le relazioni *supplementarie* sono egualmeote vere.

55. Ritorniamo adesso ai sei problemi che abbiamo enunziati n.° 50, e osservia-

mo che, quando si danno tre angoli diedri A, B, C, si possono di seguito trovare i loro supplementi, che saranno (n.° 52) le facce α', β', γ' di un altro angolo solido S'; poi, se pel primo caso del n.° 50 sappiamo dedurre da questi nuovi dati gli angoli diedri A', B', C', non avremo che da prendere i supplementi di questi per ottenere (n.° 53) gli angoli piani α, β, γ dell'angolo solido primitivo S. Vediamo con ciò che il quarto caso si riporta al primo; ed egualmente ridurremo il quinto al secondo, ed il sesto al terzo. Occupiamoci perciò soltanto della risoluzione dei tre primi problemi.

56. Primo Caso. *Essendo date le tre facce α, β, γ di un angolo solido trovare i tre angoli diedri* A, B, C (Tav. XCV, fig. 2).

A''SB, BSC, CSA' siano i tre angoli dati; si supponga che, si siano fatti girare sul piano della faccia BSC che considereremo come il piano orizzontale dell'intero disegno; è evidente che, per ricomporre l'angolo solido, basterebbe far girare le due facce laterali A''SB, A'SC intorno alle rette SB, SC come cerniere, finchè le due linee SA'' e SA' venissero a coincidere insieme, e la loro posizione comune nello spazio sarebbe quella della terza costola; la incognita projezione della quale indicheremo per SA. Per determinarla, sulle rette SA' e SA'' costole degli angoli condotti a giacersi sul piano orizzontale, prenderemo due distanze a piacere ma eguali fra loro SD'=SD''; è chiaro che i punti D' e D'' nella formazione dell'angolo solido dovranno coincidere; dipoi, siccome, girando intorno alle rette SC, SB, non usciranno dai piani verticali D'FD, D''ED, perpendicolari a queste cerniere, ne consegue che i punti fatti scendere fino in D' e D'' andranno a coincidere col punto dello spazio ch'è proiettato orizzontalmente in D, e in conseguenza la terza costola dell'angolo solido avrà per projezione SDA. D'altronde, il piano verticale FD perpendicolare a SC, dovrà tagliare le due facce che passano per questa costola, a seconda delle rette FD e FD' le quali essendo rialzate, comprenderanno in se un angolo eguale all'inclinazione di quelle facce, e formeranno un triangolo rettangolo colla verticale D; in conseguenza se si fa girare questo triangolo intorno a FD finchè venga orizzontale col piano, alzando su questa base una perpendicolare indefinita DG', cui limiteremo con un raggio FG'=FD', si otterrà così l'angolo rettilineo G'FD per misura dell'angolo diedro C.

57. Parimente il piano verticale ED, taglierà le due facce che passano per la costola SB, a seconda delle rette ED, ED'' che, essendo rialzate, comprenderanno fra se la misura dell'angolo diedro B; e, siccome anche queste rette colla verticale D, formano un triangolo rettangolo, di cui elleno sono la base e l'ipotenusa, si potrà facilmente costruire per mezzo del solito quarto di rivoluzione di questo triangolo rettangolo l'altro triangolo, G''ED e l'angolo B sarà misurato da DEG''. Si osserverà d'altronde che la due verticali DG' e DG'' si troveranno eguali, perchè l'una e l'altra segnano l'altezza dell'unico punto della costola SA, che in D è proiettato.

58. Per ottenere il terzo angolo diedro A, si condurrà un piano secante perpendicolare a SA pel punto di quella costola che è proiettata in D, e tirata fin sul piano orizzontale da una parte in D' dall'altra in D''. Questo piano taglierà le facce laterali a seconda delle rette D'N, D''M, perpendicolari respettivamente a SA' e a SA'' e per necessaria conseguenza, la sua intersezione colla faccia BSC sarà la retta MN, la quale evidentemente dovrà riuscire perpendicolare sulla orizzontale projezione SA della terza costola. Se dunque colle tre linee D''M, MN, ND' si costruisce il triangolo PMN, l'angolo al vertice P sarà precisamente la misura dell'angolo diedro che ha per costola SA.

59 Notiamo inoltre che questo triangolo, prima di essere fatto girare intorno di MN fino sul piano orizzontale, aveva il vertice P situato al punto della co-

stola SA ch'è proiettata in D. Ma poichè questa cerniera MN è perpendicolare, come or ora dicemmo, al piano verticale SA, il punto P non è potuto uscire da questo piano, ed è mestieri perciò che si trovi giacente sul prolungamento della retta SDA.

60. Le precedenti costruzioni sono del pari applicabili al caso in cui siano ottusi i tre angoli α, β, γ, o lo sia alcuno di loro: non ostante, perchè sia possibile il problema, è sempre necessario, 1.° che i tre angoli α, β, γ sieno in somma minori di quattro retti; 2.° che, inoltre, il maggior angolo sia minore della somma degli altri due. Senza coteste condizioni infatti nei dati della domanda, è facile vedere che le operazioni grafiche darebbero, per la costruzione dei triangoli FDG′ e EDG″, ipotenuse più corte delle basi: all'incontro questi triangoli saranno possibili, se vengano adempinte le due condizioni qui sopra proposte, e l'angolo solido potrà essere formato coi dati del problema.

61. *Ridurre un angolo all'orizzonte.* Questo problema giova all'occorrenza di estrarre le piante, e tende a trovare la projezione orizzontale d'un angolo α di cui conoscasi la grandezza, e i lati del quale, colla perpendicolare abbassata dal vertice, fanno alcuni angoli dati β e γ. Ora, immaginando un angolo solido avente, come sue tre costole, questa verticale e i due lati dell'angolo proposto α, si conosceranno le facce α, β, γ di cotesto angolo solido; e l'angolo rettilineo, che misura l'angolo diedro A compreso fra le due facce verticali, sarà evidentemente la projezione richiesta; laonde questo problema si riporta a quello del numero 56, e potrebbe risolversi alla stessa guisa, se la supposizione che qui una costola sia verticale, non ci permettesse di dare alla figura una disposizione più comoda. Formiamo colla verticale SA, (*Tav.* XCV, *fig.* 3) in un piano qualunque, gli angoli ASB$=\gamma$, ASC$=\beta$; quindi, ferma la grandezza di questo ultimo, facciamolo girare attorno di SA fintantochè il lato mobile SC formi nello spazio col lato fisso SB un angolo α: allora si avrebbe l'angolo dato nella esatta posizione assegnata dal problema, e facile riuscirebbe quindi dedurne la projezione orizzontale. Ora, in questo movimento di rivoluzione attorno di SA, il piede C, piede del lato mobile, descriverà un arco di circolo CC′ il cui centro sarà in A, e si fermerà in C′, punto tale di quest'arco, che la distanza da questo al punto fisso B sarà evidentemente la base d'un triangolo avente per lati rette eguali a SB ed SC, e l'angolo compresone sarà eguale ad α. Se dunque sul piano verticale si costruisca un angolo BSC″$=\alpha$, e si prenda SC″$=$SC, la retta BC″ sarà la distanza, di cui parliamo; dipoi, per mezzo d'un arco di circolo rapportandola da B in C′, si conoscerà C′ come il punto in cui il piede del lato mobile SC deve fermarsi, e conseguentemente questa retta si troverà proiettata orizzontalmente a seconda di AC′. D'altronde, il lato fisso SB essendo proiettato sopra AB, ne concluderemo che l'angolo α, nello spazio, ha come projezione orizzontale BAC′; così quest'ultimo angolo, che può essere più grande o più piccolo di α, è quel medesimo che bisogna adoperare su di una carta topografica, nella quale ogni oggetto deve essere rappresentato colla sua projezione.

65. Secondo Caso. *Date due facce α, β d'un angolo solido con l'angolo diedro compreso* C, *trovare le altre parti.*

Siano BSC$=\alpha$, CSA′$=\beta$ (*Tav.* XCVI, *fig.* 1) le due facce date, trasportate giù sin sul piano orizzontale, si avranno due facce dell'angolo solido nella loro vera situazione, se si faccia girare la seconda intorno a SC tanto che con BSC formi l'angolo diedro C. Ma, preso un punto a piacimento D′ sulla costola mobile, questo punto, durante il moto di rotazione indicato, non uscirà dal piano verticale D′FM perpendicolare alla cerniera; dunque, se in questo piano fatto girare fin giù sull'orizzontale intorno FM, si costruisca l'angolo MFK$=$C, e si prenda la distanza FG′$=$FD′, chiaro apparisce che il punto D′ cadrà su G′, e

in conseguenza sarà orizzontalmente proiettato in D, al tempo stesso, che la faccia mobile A'SC avrà preso l'inclinazione voluta dalla domanda. Frattanto quel punto dello spazio che ha per projezione D e G', appartiene alla terza faccia incognita, e se la s'immagini fatta girare intorno a SB fin sul piano orizzontale, il punto (D,G') non uscirà dal piano verticale DED'' perpendicolare a questa cerniera; dipoi siccome questo punto deve anche rimanere a tal distanza dal vertice che sia eguale a SD', se con questa distanza si descriva un arco di circolo, questo nel punto D'' taglierà la retta indefinita DE, e questo punto determinerà l'angolo D''SB per terza faccia incognita. Trovate così le tre facce dall'angolo solido eccoci ricondotti al problema del n.° 56 che insegna come si abbiano a costruire gli angoli diedri.

A descrivere un arco di circolo, il cui punto d'incontro col primo ci determinasse il punto D'', potevamo anche prendere la distanza MG', la quale è chiaramente uguale ad MD''.

63. Terzo Caso. *Date α, β due facce d'un angolo solido, e l'angolo diedro* B *opposto a una di loro trovare le altre parti.*

Ancora qui BSC = α, CSA' = β (*Tav.* XCVI, *fig.* 2) sieno le due facce date fatte girare fin giù sul piano orizzontale. Se si costruisca, in un piano verticale EF perpendicolare sulla costola SB, l'angolo REF = B, immaginandosi un piano indefinito che passi per SE ed ER, questo piano indicherà la posizione della faccia incognita; di guisa tale che, a comporre l'angolo solido, non mancherà altro che far girare intorno di CS la faccia A'SC, fino a tanto che la costola SA' venga a posarsi nel piano SER. Il punto D' della costola mobile, nel tempo di questo movimento di rotazione, non uscirà dal piano verticale D'FM condotto pel punto F perpendicolare alla cerniera CS; e questo punto D' si fermerà in conseguenza sull'intersezione del piano verticale FM col piano indefinito SER; ma, questa intersezione è una retta che muove da M, e viene ad incontrare la verticale F nel punto stesso, come ognun vede, della retta rialzata ER; dunque, se a trovare questa altezza, si conduca la linea FR perpendicolare ad EF; dipoi si riporti FR ad angolo retto su di FM da F in R', l'intersezione di che abbiamo parlato sarà la linea MR', e il punto D', punto della costola mobile SA', dovrà fermarsi su questa retta. Così, col raggio FD' descrivendo un arco di circolo che tagli MR' in G, si avrà, nel piano verticale FM, la posizione G, posizione d'un punto della terza costola SA, e sarebbe facile dedurne la projezione orizzontale.

Osserviamo frattanto che questo punto G, situato nel piano verticale MF, spetta alla faccia incognita, e quando quest'ultima sarà fatta girare intorno alla costola SB, cotesto punto si manterrà nella distanza in cui attualmente si trova rapporto ai punti M e S situati sulla cerniera. Ora queste distanze sono evidentemente MG e SD'; dunque con queste rette come raggi, se si descrivano due archi di circolo, il punto D'', dove questi s'incontreranno, determinerà il punto del piano orizzontale su cui verrà a posarsi il punto G fatto girare fin lì, e la faccia incognita per conseguenza sarà D''SB. Trovata questa faccia, eccoci nuovamente al caso del N.° 56, ecco che sappiamo costruire le altre parti dell'angolo solido.

64. Poniamo mente che l'arco di cerchio descritto col raggio FD', taglierà, generalmente parlando, la retta MR' in due punti cioè G e g: di guisa che la faccia A'SC, girando su di CS, potrà prendere due situazioni nelle quali la costola SA' si troverà situata nel piano indefinito SER ovvero SMR'; quanto alla prima di queste posizioni, il punto D' si ferma in G, quanto all'altra arriva in g. Dunque, se questo ultimo punto si fa girare attorno di SB fino che arrivi sul piano orizzontale, verrà trasportato in d'', e d''SB allora sarà la grandezza

della terza faccia incognita; dunque colle facce date α, β, e B si potranno comporre due differenti angoli solidi, risultamento dal tutto analogo a quello che si ha costruendo un triangolo rettilineo, conoscendone due lati, e l'angolo a un di loro opposto.

Non staremo ad aggiungere che avrebbe luogo una soluzione soltanto, se l'arco descritto col raggio FD' toccasse soltanto la retta MR'; e se quest'arco non incontrasse affatto la retta MR' il problema sarebbe impossibile.

65. Giova intanto osservare che non sarebbe da adottarsi la seconda soluzione, quando il punto g cadesse su di MR' (*Tav*; XCVI, *fig.* 2) al di sotto di MF o del piano orizzontale (in questo luogo si suppone che si voglia costruire l'angolo dato B, o acuto o ottuso che sia, sempre al di sopra del piano di projezione). Infatti, l'angolo solido che in questo caso si otterrebbe, sarebbe senza dubbio composto delle facce α, β, e di un angolo diedro supplementario di B: ma, siccome quest'ultimo nel nostro caso è dato graficamente, e non pel valore del suo proprio seno, non è permesso adoperare ambiguamente circa la grandezza di lui, ed adottare conseguentemente con indifferenza B ovvero 180°—B.

Per la stessa ragione, bisognerà rigettare le due soluzioni, e, coi dati presenti dichiarare il problema insolubile, se il punto G e g cadessero l'uno e l'altro al di sotto dell'orizzontale MF; cosa d'altronde che potrà accadere allora soltanto che l'angolo diedro B sarà ottuso.

66. Tali sono le proposizioni elementari della geometria descrittiva.

I limiti di questo dizionario ci obbligano a non parlare delle curiose e importanti applicazioni che esse offrono in gran numero, e per le quali i nostri lettori potranno consultare le opere di *Monge*, creatore per così dire di questo ramo di geometria (*Vedi* Geometria), quelle di *Lacroix*, di *Lefebure de Fourcy*, di *Le-Roy* e particolarmente il trattato di geometria descrittiva del signor *Vallée*. Le parti più elevate di questa scienza sono trattate nel nostro dizionario alle parole: Normale, Piani tangenti, Projezione, Superfici curve.

DESCRIVERE (*Geom.*). Si chiama così l'azione di generare un'estensione per mezzo del movimento di un punto, di una linea o di una superficie: così un punto che si muove si dice *descrivere* una linea retta o curva; una linea, *descrivere* una superficie; e una superficie *descrivere* un solido. *Vedi* Generazione.

DESCRIZIONE (*Geom.*). Si chiama così l'azione di tracciare una figura, ossia la costruzione di una figura; ed è perciò che si dice *descrivere* un circolo, una parabola, ec.

DESPLACES (Filippo), astronomo francese, nato a Parigi nel 1659. Prese a continuare le *Effemeridi* di Beaulieu rimaste interrotte al 1714, e ne pubblicò a diverse epoche tre volumi in-4 che contengono tutte le circostanze de' movimenti del sole, della luna e de' pianeti per trent'anni, dal 1715 al 1744. Il primo volume uscì nel 1716, il secondo nel 1727, e il terzo nel 1734. Quest'ultimo è accresciuto di una tavola assai estesa delle longitudini dei diversi paesi nei quali si erano fatte osservazioni fino allora. Sono dovuti pure a Desplaces tre anni delle *Effemeridi* dell'Accademia dal 1706 al 1708, e i piccoli calendarj che per lungo tempo sono stati pubblicati in Francia col titolo di *Etat du ciel*. Questo modesto astronomo morì a Parigi nel mese d'Aprile 1736, dopo aver giovato all'astronomia con calcoli tanto esatti quanto potevano permetterlo le tavole di cui faceasi uso al suo tempo e che erano fondate sopra osservazioni e metodi antichi.

DESTILE (*Astron.*). *Vedi* Decile.

DESVIGNOLES (Alfonso), dotto cronologista, nato il 29 Ottobre 1649 nel castello d'Aubais in Linguadoca. Fu fatto membro dell'Accademia delle Scienze di Berlino all'epoca della sua fondazione, nel 1701; e ad istanza di Leibnitz

fermò stanza in quest' ultima città per ajutare co' suoi lumi e colle estese sue cognizioni la nascente accademia della quale fu poi eletto direttore nel 1727. Desvignoles morì a Berlino il 24 Luglio 1744 in età di novantaquattro anni. Dei molti ed importanti suoi scritti non citeremo che i pochi seguenti che hanno una maggior relazione coll' indole e colla natura di questo Dizionario: I *Disquisitio chronologica de periodica revolutione cometae annorum*, 1668, 1702; II *De annis aegyptianis*; III *De Cyclis Sinensium sexagenariis*. Queste dissertazioni sono inserite nella raccolta intitolata: *Miscellanea berolinensia ad incrementum scientiarum ex scriptis Societati regiae scientiarum exhibitis edita*, Berlino, 1710-1743, 7 vol. in-4. Nell' ultimo di questi scritti, Desvignoles, compendiando la dissertazione di Bayer (*Vedi* Bayer) intitolata: *De eclipsi sinica*, fa vedere che l' ecclissi del sole osservato nell' anno settimo del regno di Quang-Vuti, non può esser preso per l' ecclissi che si crede essere avvenuto nel giorno della morte di G. C. Si pretese che Desvignoles avesse il primo fatto conoscere in Europa il ciclo chinese di sessanta giorni; ma Ulugh-Beig ne aveva già parlato, come può vedersi nelle *Epochae celebriores* di Graevio impresse a Londra nel 1650, in-4.

DETERMINATO (*Alg.*). I problemi *determinati* sono quelli che ammettono un numero determinato di soluzioni. Si chiamano così, in opposizione ai problemi indeterminati nei quali il numero delle soluzioni è indefinito. *Vedi* Indefinito.

DEUCALIONE (*Astron.*). Nome che qualche volta si dà alla costellazione dell' Aquario.

DEUSING (Antonio), nato il 15 Ottobre 1612 a Meurs in Vestfalia, studiò con successo all' università di Leida, ove acquistò cognizioni estesissime nella filosofia, nelle matematiche, e nelle lingue orientali. Essendosi nel 1637 dottorato in medicina, passò ad esercitare questa professione a Meurs, e nel tempo stesso occupò con lustro la cattedra di matematiche nel ginnasio di questa città. Nel 1639 successe al celebre Giovanni Isacco Pontano, professore di fisica e di matematiche nell' università di Harderwick. Successivamente fu fatto professore di medicina a Groninga, ed in breve si vide ricolmo di tutte le distinzioni onorifiche a cui può fare aspirare la scienza. Morì il 29 Gennajo 1666. Le sue opere sono numerosissime, e Nicéron ne conta fino a 58; noi non citeremo che la seguente: *De vero systemate mundi, dissertatio mathematica, qua Copernici systema mundi reformatur, sublatis interim infinitis pene orbibus, quibus in systemate Ptolemaico mens humana distrahebatur*, Amsterdam, 1743, in-4.

DEVIAZIONE (*Astron.*). Allontanamento dalla vera posizione. Si fa uso di questa parola per esprimere la quantità di cui un canocchiale dei passaggi o un quadrante murale si scostano dal vero piano del meridiano. Questa deviazione si trova confrontando il passaggio del sole al meridiano osservato per mezzo del canocchiale col passaggio calcolato col metodo delle altezze corrispondenti (*Vedi* Altezza Corrispondenti). Per esempio, dopo aver calcolato che il passaggio al meridiano deve effettuarsi a $0^{or}\ 2'\ 10''$, e questo passaggio essendosi effettuato nel canocchiale a $0^{or}\ 2'\ 6''$, se ne conclude che la deviazione dal canocchiale è di $4''$ verso l' oriente, poichè il sole è passato nel canocchiale prima di passare pel meridiano ed ha anticipato precisamente di questa quantità.

Parimente, quando l' asse ottico di un canocchiale dei passaggi è esattamente nel meridiano, l' intervallo di tempo che scorre tra due passaggi consecutivi, l' uno inferiore e l' altro superiore o viceversa, d' una stella circompolare, è di dodici ore sidereee. Ma nel caso opposto il circolo diurno che sembra descrivere la stella è diviso in due parti diseguali, e la mira che si trova precisamente nella direzione dell' asse ottico devia a levante o a ponente di una quantità angolare che si misura nel modo seguente.

Sia Z (*Tav.* CI, *fig.* 1) lo zenit del luogo dell'osservatore, ZA il verticale che descrive il canocchiale girando sul suo asse orizzontale di rotazione, P il polo del mondo, e supponiamo che l'objettivo sia rivolto dalla parte di mezzogiorno. La deviazione orientale del canocchiale sarà rappresentata dall'angolo MCH, misura dall'angolo sferico MZH; ed è quest'angolo appunto che si tratta di trovare par mezzo dell'osservazione dei passaggi degli astri A, B, B' pel filo di mezzo del canocchiale. Indicando ora con Δ la distanza polare AP dell'astro A, con $90^\circ - H$ la colatitudine ZP ossia il complemento dell'altezza H del polo pel luogo dell'osservatore, e con x la deviazione MH o l'angolo MZH, il triangolo sferico AZP, nel quale l'angolo P è l'angolo orario, dà

$$\operatorname{tang} Z = \frac{\operatorname{sen} P}{\cot \Delta \cos H - \cos P \operatorname{sen} H};$$

e a motivo di $\operatorname{tang} Z = -\operatorname{tang} x$ e dell'estrema piccolezza di x, nel qual caso $\operatorname{sen} P = P$ e $\cos P = 1$, si ha sensibilmente

$$P = (\operatorname{sen} H - \cot \Delta \cos H)x.$$

Tale è la quantità che dovrebbe aggiungersi al passaggio osservato per avere l'ora vera del passaggio al meridiano, se si conoscesse x.

Supponiamo che sia stata osservata col canocchiale un'altra stella B o B'; si avrà anco per questa

$$P' = (\operatorname{sen} H - \cot \Delta' \cos H)x.$$

Da queste due equazioni simili si trae

$$P' - P = x(\cot \Delta - \cot \Delta')\cos H = \frac{x \operatorname{sen}(\Delta' - \Delta)}{\operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'} \cos H;$$

e se s'indica con T il tempo sidereo del passaggio della prima stella pel meridiano o la sua ascensione retta apparente ridotta in tempo, con t il tempo del suo passaggio pel verticale del canocchiale osservato ad un pendolo regolato esattamente sul tempo sidereo, si avrà evidentemente $P = T - t$, e per la seconda stella $P' = T' - t'$; così si otterrà infine

$$x = \frac{[T' - T - (t' - t)] \operatorname{sen} \Delta \operatorname{sen} \Delta'}{\cos H \operatorname{sen}(\Delta' - \Delta)} \quad \ldots\ldots (1).$$

Risulta da questa espressione che per determinare la deviazione del canocchiale, in ogni altro rapporto però ben rettificato, basta conoscere presso a poco le distanze polari Δ, Δ', ed esattissimamente la differenza $T' - T$ di ascensione retta, purchè $\Delta' - \Delta$ non sia un piccolo arco. Questa deviazione sarà orientale se x è positivo, e occidentale nel caso contrario. Per una stella sola si ha

$$x = -\frac{(T - t)\operatorname{sen} \Delta}{\cos(H + \Delta)} = \frac{(t - T)\operatorname{sen} \Delta}{\cos(H + \Delta)} \quad \ldots\ldots (2);$$

ma allora la deviazione è troppo dipendente dal tempo del passaggio della stella pel meridiano e dalla sua declinazione, come pure dal moto del pendolo.

Le due formule precedenti, che si riferiscono ai passaggi superiori, si ridurranno ai passaggi inferiori prendendo negativamente $\operatorname{sen} \Delta$ e $\cot \Delta$; e se invece di osservare due stelle differenti si osserva la stessa stella al di sopra e al di sotto del polo, Δ' si cambia in $-\Delta$; la differenza dei passaggi al meridiano cioè $T' - T$ sarà di 12^{or} e si avrà evidentemente

$$x = \frac{[12^{or} - (t' - t)] \operatorname{sen}^2 \Delta}{\cos H \operatorname{sen} 2\Delta} = \frac{12^{ot} - (t' - t)}{2 \cos H \cot \Delta} \quad \ldots\ldots (3).$$

Quest' ultima formula non dipende più dall' ascensione retta della stella: essa darà la deviazione x con molta precisione se $\cot\Delta$ è grandissima, o, il che è lo stesso, se si osservano a preferenza delle stelle circompolari. Delambre, cui è dovuto il metodo che adesso abbiamo esposto, indica le stelle δ, β, γ dell' Orsa minore e γ di Cefeo, perchè non si ha da temer nulla della irregolarità del pendolo. Allora sarà bene porre la mira al nord della stazione, e quando se ne conoscerà la deviazione sarà facile orientare una catena di triangoli per mezzo dell' *azimut* d' uno de' suoi lati.

Per dare un' applicazione di questo metodo, sceglieremo l' osservazione stessa per mezzo della quale Delambre misurò a Parigi la deviazione del suo canocchiale, che non ebbe il tempo di rimettere sulla mira meridiana.

Passaggio inferiore della Capra al canocchiale a $17^{or}\ 1'\ 18'',8 = t'$
Passaggio superiore 12 ore dopo ossia a $5^{or}\ 1'\ 18'',6 = t$

D' altronde si aveva

$$\Delta = 44^\circ\ 15',\quad H = 48^\circ\ 50',$$

donde $t' - t = 12^h\ 0'\ 0'',2$, e quindi la formula (3) dà in tempo

$$x = \frac{-0'',2 \tang \Delta}{2 \cos H} = -0'',148,$$

$$\text{cioè arco } x = -2'',25.$$

Dal segno di x si rileva che la deviazione era occidentale quando l' obiettivo era rivolto verso il sud, come abbiamo supposto nelle formule precedenti: essa sarebbe al contrario orientale se l' obiettivo si supponesse rivolto verso il nord.

Deviazione *dei corpi nella loro libera caduta.* Si dà questo nome alla quantità di cui un corpo che cade liberamente sulla superficie della terra si allontana dalla perpendicolare condotta dal suo punto di partenza a questa superficie. Se la terra fosse immobile, non potrebbe esservi alcuna specie di deviazione, perchè la forza che fa cadere un corpo agendo lungo la retta che passa pel corpo e pel centro della terra, finchè si suppone che agisca questa sola forza, nulla può cangiare la direzione del moto; ma la terra girando in 24 ore sul suo asse e tutte le sue parti avendo una celerità tanto più grande quanto sono più lontane da quest' asse, è evidente che il corpo situato al di sopra della superficie della terra, e che partecipa del moto comune finchè non è libero, descrive un circolo più grande di quello descritto dal punto della superficie al quale esso corrisponde perpendicolarmente. Così nell' istante della caduta, cioè quando il corpo divien libero, esso si trova sollecitato da due forze di cui l' una lo farebbe cadere lungo la perpendicolare e l' altra gli farebbe percorrere uno spazio più grande dello spazio percorso dal piede della perpendicolare; da ciò risulta che il corpo deve cadere un poco più all' est del piede di questa perpendicolare; e questa deviazione, calcolata mediante la teoria, e verificata dall' esperienza, diviene in tal modo una *prova di fatto* della rotazione della terra sul suo asse.

Laplace ha dato la formula seguente per calcolare la grandezza della deviazione per mezzo dell' altezza della caduta:

$$\Delta = \frac{2}{3}\, nh \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{h}{g}},$$

ove Δ indica la deviazione, h l' altezza della caduta, n l' angolo di rotazione della terra durante il tempo della caduta, θ il complemento della latitudine del luogo, g lo spazio percorso da un corpo durante il primo secondo della sua caduta, cioè $g = 4^m,9044$ per Parigi. Vedi il *Bulletin des Sciences*, n.° 75.

Questa deviazione, osservata da Guglielmini e da Benzemberg, è stata trovata dal primo di 8 linee per un corpo che cade da un'altezza di 241 piede, e dal secondo di 5 linee per un corpo che cade da un'altezza di 260 piedi; ma tali risultati non possono considerarsi che come una verificazione in genere del problema.

DEVILLE (Antonio), celebre ingegnere francese, nato a Tolosa nel 1596. Dopo che ebbe terminati gli studj elementari, si dedicò totalmente alle matematiche e alla scienza delle fortificazioni. Entrato nella carriera militare, vi si distinse non meno pel suo coraggio che per le profonde ed estese sue cognizioni. All'epoca dell'invasione degli Spagnuoli in Picardia, Deville contribuì validamente alla ripresa di Corbie nel 1636 non meno che all'attacco delle città dell'Artois, che tenne dietro a quel primo successo, e che egli eseguì sotto gli occhi di Luigi XIII e del cardinale di Richelieu. Dopo la pace, Deville fu incaricato di fortificare le piazze cedute alla Francia col trattato definitivo. Morì verso il 1656 o il 1657. L'opera sua principale è intitolata: *Les fortifications d'Antoine Deville*, Parigi, 1629, in-fol., ed è stata spesso ristampata. Le cinquantatrè tavole che servono a spiegare il sistema di Deville sono state disegnate ed incise da lui. Egli viene riguardato come il primo autore che abbia scritto sulla costruzione e sugli effetti delle mine. Il suo sistema di fortificazione, perfezionando quello di Errard suo predecessore, fa il fianco perpendicolare sulla cortina come nel metodo di Marolois. Questo sistema ha l'inconveniente di non poter essere applicato nè al quadrato nè al pentagono, il che lo ha fatto abbandonare per seguir quello di Pagan suo contemporaneo e suo rivale. Notizie più estese su questo ingegnere e sulle sue opere si troveranno nella *Biografia universale*.

DIACAUSTICA (*Geom.*). *Vedi* Caustica.

DIADE, ingegnere greco, imparò da Polido di Tessaglia l'arte di costruire le macchine da guerra. Fu scelto con Cherea, altro allievo dello stesso maestro, per accompagnare Alessandro nelle sue spedizioni. Diade aveva composto delle opere, che non sono giunte fino a noi, sulle macchine da esso inventate. Egli citava come tali le torri mobili che disfatte faceva portare dietro alle armate, una specie di ponte volante col quale si poteva salire da terra fino sulle più alte mura, e finalmente un corvo per ismantellarle. Egli aveva scritto pure sul modo di costruire l'ariete a ruote di cui gli antichi facevano grand'uso. Queste poche notizie che ci rimangono intorno a Diade e a Cherea ci sono state conservate da Vitruvio.

DIAGONALE (*Geom.*) (da διὰ, *a traverso*, e da γωνία, *angolo*). Retta condotta dal vertice dell'angolo di un paralellogrammo al vertice dell'angolo opposto. *Vedi* Paralellogrammo e Quadrato.

DIAMETRO (*Geom.*). (da διὰ, *a traverso*, e da μέτρον, *misura*). Retta che passa pel centro di un circolo, e che termina da una parte e dall'altra alla sua circonferenza. Il diametro di un circolo è doppio del suo raggio. *Vedi* Nozioni preliminari 42, e Circolo.

1. L'equazione del circolo quando l'origine delle coordinate è al centro è (*Applicazione dell'Algebra alla Geometria* n.° 27)

$$y^2+x^2=R^2.$$

Essa dà $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$; dunque vi sono due ordinate eguali ed opposte, MP e PN (*Tav.* XCVII, *fig.* 1), per ciascuna ascissa AP. Ora MN essendo perpendicolare ad AB, se si applica la parte inferiore del circolo sulla parte superiore, facendola girare intorno del diametro BC, il punto N cadrà sul punto M;

e similmente, tutti gli altri punti della parte BNC si situeranno sulla parte superiore BMC. Da ciò si conclude

1.° Che *ogni diametro divide il circolo e la circonferenza in due parti eguali*;

2.° Che *il diametro, perpendicolare ad una corda, divide ancora questa corda e l'arco sotteso, ciascuno in due parti eguali.*

2. Dalla figura è evidente, che $CP = R + x$ e $BP = R - x$; dunque

$$CP \times BP = (R+x)(R-x) = R^2 - x^2.$$

Ma, dall'equazione del circolo, si ha $\overline{MP}^2 = y^2 = R^2 - x^2$; dunque

$$\overline{MP}^2 = CP \times BP;$$

dunque *l'ordinata, perpendicolare al diametro, è media proporzionale fra i due segmenti di questo diametro.*

3. Se si conduce la corda CM, e che s'indichino con x ed y le coordinate del punto M, avremo

$$\overline{CM}^2 = y^2 + (x+R)^2 = y^2 + x^2 + 2Rx + R^2.$$

Ora l'equazione del circolo dà $x^2 + y^2 = R^2$; dunque

$$\overline{CM}^2 = 2R^2 + 2Rx = 2R(R+x);$$

ma si ha $BC = 2R$, $CP = R + x$; dunque

$$\overline{CM}^2 = BC \times CP:$$

vale a dire che *la corda* CM *è media proporzionale fra il diametro* BC *e il segmento* CP.

4. Il DIAMETRO *di una sfera* è la medesima cosa del diametro del semicircolo la di cui rivoluzione ha generato la sfera, *Vedi* SFERA.

5. Il DIAMETRO *di una sezione conica* è una retta, che gode della proprietà di dividere in due parti eguali le linee condotte paralellamente all'asse delle y fra due punti della curva; ossia il diametro è una retta che divide in due parti eguali una serie di corde paralelle. Allorquando questo diametro è perpendicolare alle ordinate, prende il nome di *asse*. Trattiamo adesso dei diametri per ciascuna delle tre curve coniche in particolare.

ELLISSE

6. Abbiamo detto che nelle linee del second'ordine il diametro è una retta, che divide in due parti eguali tutte le corde paralelle ad una medesima direzione. A questa definizione con facilità possiamo applicare il calcolo per dedurne l'equazione di un diametro qualunque. Basta per esprimer ciò di prendere l'equazione generale di una corda, e di cercare il luogo geometrico che contiene sempre il mezzo di questa corda, quando si suppone che essa si muova paralellamente a se medesima nel piano della curva.

Sia dunque

$$y = ex + d$$

l'equazione di una corda qualunque PG (*Tav*, XCVII, fig. 2). Combinandola con quella dell'ellisse,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

si trovano facilmente le coordinate dei punti F e G, ove la retta incontra la curva. L'eliminazione di y dà

$$x^2+\frac{2cda^2}{b^2+a^2c^2}x+\frac{(d^2-b^2)a^2}{b^2+a^2c^2}=0,$$

equazione le di cui radici sono precisamente le ascisse AH e AK dei punti F e G. Con facilità possiamo vedere che l'ascissa AP del mezzo I, di FG, è eguale a $\frac{1}{2}$(AH+AK); dunque, se si chiama x questa ascissa AP, e x', x'', quelle dei punti F e G, avremo

$$x=\frac{x'+x''}{2}.$$

Ora, si sa che nell'equazione generale del secondo grado, $x^2+px+q=0$, la somma delle due radici è eguale al coefficiente del secondo termine, preso con un segno contrario; dunque

$$x'+x''=-\frac{2cda^2}{b^2+a^2c^2},$$

e per conseguenza, per l'ascissa AP, si ha

$$AP=x=-\frac{cda^2}{b^2+a^2c^2}.$$

Se si mette questo valore nell'equazione della corda, si trova, per l'ordinata corrispondente IP,

$$y=\frac{db^2}{b^2+a^2c^2}.$$

Attualmente, se per eliminare d, si divide questi due valori l'uno per l'altro, verrà

$$\frac{y}{x}=\frac{-b^2}{a^2c}, \text{ ovvero } y=\frac{-b^2}{a^2c}x.$$

Questa equazione contiene ancora c; per conseguenza essa rappresenta il luogo geometrico dei mezzi di tutte le corde per le quali c è costante, vale a dire, di tutte le corde paralelle ad una medesima direzione. Questa equazione è perciò quella di un diametro; e siccome la retta che essa rappresenta passa per l'origine, che in questo caso è il centro della curva, si conclude che *tutti i diametri dell'ellisse passano pel centro.*

Viceversa, *ogni retta condotta pel centro è un diametro*; poichè facendo passare c per tutti gli stati di grandezza, il coefficiente di x, nell'equazione del diametro, prende esso medesimo tutti i valori possibili, positivi o negativi.

7. Vi è un rapporto che merita di essere osservato fra la direzione di un diametro e quella delle corde che esso taglia in parti eguali. Sia sempre

$$y=cx+d,$$

l'equazione di una corda qualunque; e sia

$$y=c'x,$$

quella del diametro corrispondente. Abbiamo trovato

$$c'=-\frac{b^2}{a^2c};$$

e da ciò si ricava, fra le tangenti c e c'

$$cc' = -\frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots (1),$$

relazione molto semplice, per mezzo della quale possiamo sempre dedurre l'una dall'altra.

8. Da questa relazione ne derivano molte conseguenze:

1.° Se per l'estremità del diametro si conduca una tangente MT all'ellisse, e che si chiami α la tangente trigonometrica dell'angolo MTx, si trovò (*Vedi* Tangente) fra α e c', questa equazione

$$\alpha c' = -\frac{b^2}{a^2};$$

dunque $\alpha c' = cc'$, donde $\alpha = c$. Dunque *le corde, che un diametro divide in parti eguali, sono paralelle alla tangente condotta per l'estremità di questo diametro.*

2.° Il prodotto cc', essendo costante ed eguale a $-\frac{b^2}{a^2}$, non può divenire eguale a -1, se non che nel caso del circolo in cui $b = a$; dunque gli assi attuali delle coordinate sono *i soli assi della curva*, poichè alcun altro diametro non è perpendicolare alle corde che esso divide in parti eguali.

3.° Se si conduce un secondo diametro di cui l'equazione sia $y = cx$, le corde che esso taglia nel mezzo saranno paralelle al primo: poichè se si rappresenta l'equazione generale di queste corde con $y = c''x + d$, dobbiamo avere $cc'' = -\frac{b^2}{a^2}$ e per conseguenza $cc' = cc''$, donde $c'' = c'$. Così, due diametri le di cui equazioni sono

$$y = cx, \quad y = c'x,$$

e per i quali si ha la relazione (1) sono tali che ciascuno di loro divide per metà le corde paralelle all'altro. Questa proprietà ha fatto dar loro il nome di *diametri coniugati*.

9. L'equazione dell'ellisse riportata al suo centro e ai suoi assi è, come si sa

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ldots\ldots (2).$$

Se si riporta questa curva a coordinate oblique, e che la sua equazione conservi la medesima forma, vale a dire, non contenga che i quadrati delle variabili e una parte costante, i nuovi assi saranno dei diametri coniugati, poichè ciascun valore di una delle coordinate farà trovare per l'altra due valori eguali e con segni contrari. Questa circostanza non avrebbe luogo con verun'altra forma di equazione. Dunque si passerà dall'equazione (2) all'equazione ai diametri coniugati, cercando, con la trasformazione delle coordinate, tutti i sistemi di assi per i quali l'equazione dell'ellisse conserva la medesima forma.

Prendiamo perciò (*Vedi* Trasformazione delle coordinate) le formule che servono a passare dagli assi rettangolari agli assi obliqui e si sopprimano in esse i termini costanti, atteso che l'origine deve rimanere al centro dell'ellisse; avremo

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'.$$

Sostituiamo questi valori nell'equazione (2), facendo, per abbreviare

$$A = a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha',$$
$$B = a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha,$$
$$C = a^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha',$$

verrà

$$Ay'^2 + Bx'^2 + 2Cx'y' = a^2b^2 \quad \ldots\ldots (3).$$

Affinchè questa equazione non contenga x' e y' che al quadrato, bisogna profittare delle indeterminate α e α' per fare sparire il rettangolo $x'y'$. Poniamo perciò

$$a^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha' + b^2 \cos \alpha \cos \alpha' = 0 \quad \ldots\ldots (4),$$

e l'equazione (3) si ridurrà a

$$Ay'^2 + Bx'^2 = a^2b^2 \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

10. L'ellisse è attualmente riportata ai diametri coniugati. Se si vuole conoscere le loro lunghezze FG, HK (*Tav.* XCVII, *fig.* 3), si farà successivamente $y = 0$ e $x = 0$ in questa equazione. Indicando AF con a', e AH con b', si trova

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{B} = \frac{a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha} \quad \ldots\ldots (6),$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{A} = \frac{a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' + b^2 \cos^2 \alpha'} \quad \ldots\ldots (7).$$

Quindi, sostituendo invece di A e B i loro valori $\frac{a^2b^2}{b'^2}$, $\frac{a^2b^2}{a'^2}$, l'equazione (5) diventa

$$a'^2y'^2 + b'^2x'^2 = a'^2b'^2 \quad \ldots\ldots (8).$$

11. L'equazione (4), essendo divisa per $a^2 \cos \alpha \cos \alpha'$, diventa

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \alpha' = -\frac{b^2}{a^2} \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Ora, è evidente che dando all'asse Ax' una posizione qualunque, il che equivale a determinare α, si potrà sul momento assegnare un valore reale ad α'; dunque *ciascun diametro ha il suo coniugato.* Di più, siccome l'equazione precedente è la medesima che quella che lega fra loro le direzioni di due corde supplementarie (*Vedi* SUPPLEMENTARIA CORDE.), ne segue che se l'una di queste corde è paralella al primo diametro, l'altra corda sarà ancora paralella al secondo diametro. Così in generale possiamo dire che *due diametri coniugati sono sempre paralelli a due corde supplementarie*; e che viceversa; *due diametri paralelli a corde supplementarie sono sempre coniugati.*

12. Se si suppone $\operatorname{sen} \alpha = 0$ e $\cos \alpha' = 0$, il che fa coincidere le x' con le x, e le y' con le y, l'equazione (4) è soddisfatta; e ciò deve essere, poichè gli assi dell'ellisse sono dei diametri coniugati. Sappiamo di più che essi formano il solo sistema di diametri coniugati rettangolari che esistono nell'ellisse (n.° 8); e questo è quello che con facilità possiamo ritrovare. Infatti supponiamo che ve ne siano degli altri: per questi diametri si dovrebbe avere $\alpha' = 90° + \alpha$, e quindi

$$\operatorname{sen} \alpha' = \operatorname{sen} (90° + \alpha) = \operatorname{sen} (90° - \alpha) = \cos \alpha,$$
$$\cos \alpha' = \cos (90° + \alpha) = -\cos (90° - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha.$$

Questi valori sostituiti nell' equazione (4), darebbero

$$(a^2-b^2)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=0;$$

e siccome non si può disporre delle quantità a e b, non possiamo soddisfare a questa eguaglianza che facendo $\operatorname{sen}\alpha=0$ o $\cos\alpha=0$, supposizioni che riportano esattamente ai due assi primitivi.

Se l' ellisse si cangiasse in circolo, si avrebbe $a=b$, e l' ultima eguaglianza sarebbe verificata da se medesima, qualunque fosse il valore di α. Così, nel circolo tutti i diametri coniugati sono rettangolari, nel mentre che nell' ellisse gli assi soli godono di questa proprietà.

13. Se si domandasse che i diametri coniugati fossero eguali, si avrebbe, eguagliando i valori di a'^2 e di b'^2,

$$a^2\operatorname{sen}^2\alpha+b^2\cos^2\alpha=a^2\operatorname{sen}^2\alpha'+b^2\cos^2\alpha'.$$

Sostituendo $1-\operatorname{sen}^2\alpha$ invece di $\cos^2\alpha$, e $1-\operatorname{sen}^2\alpha'$ invece di $\cos^2\alpha'$, questa equazione si cangia facilmente in

$$(a^2-b^2)(\operatorname{sen}^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha')=0:$$

quindi si conclude

$$\operatorname{sen}^2\alpha'=\operatorname{sen}^2\alpha, \qquad \cos^2\alpha'=\cos^2\alpha,$$
$$\operatorname{tang}^2\alpha'=\operatorname{tang}^2\alpha, \qquad \operatorname{tang}\alpha'=\pm\operatorname{tang}\alpha.$$

Ma l' equazione (9) esige che $\operatorname{tang}\alpha$ e $\operatorname{tang}\alpha'$ siano di segni contrari, bisogna dunque prendere $\operatorname{tang}\alpha'=-\operatorname{tang}\alpha$. Allora l' equazione (9) diventa

$$\operatorname{tang}^2\alpha=\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{donde} \quad \operatorname{tang}\alpha=\pm\frac{b}{a}.$$

Il segno inferiore è relativo ad uno dei diametri, e l'altro al suo coniugato. Ora, se si conducano (*Tav.* XCVII, *fig.* 4) le corde BD e CD dall' estremità degli assi, si ha

$$\operatorname{tang}DCx=\frac{b}{a}, \qquad \operatorname{tang}DBx=-\frac{b}{a};$$

dunque bisogna condurre dei diametri paralelli a queste corde, per avere i diametri coniugati eguali.

Allorchè si riporta l' ellisse a questi due diametri, la sua equazione è

$$y'^2+x'^2=a'^2,$$

la quale è analoga a quella del circolo, quando essa è riportata a diametri rettangolari.

14. Vi sono, sopra i diametri coniugati dell' ellisse due teoremi degni di osservazione.

Teorema I. *Nell' ellisse, il paralellogrammo costruito sopra due diametri coniugati è equivalente al rettangolo costruito sopra gli assi.*

Moltiplicando, l' uno per l' altro, i valori di a'^2 e b'^2, si ha

$$a'^2b'^2=\frac{a^4b^4}{a^4\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha'+b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'+a^2b^2(\operatorname{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha+\cos^2\alpha'\operatorname{sen}^2\alpha)}.$$

Ma si ha, fra α e α', l'equazione (4); e se si eleva i suoi due membri al quadrato, se ne ricava

$$a^4\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha'+b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'=-2a^2b^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha\cos\alpha':$$

in conseguenza il prodotto $a'^2b'^2$ diventa

$$a'^2b'^2 = \frac{a^4b^4}{a^2b^2(\operatorname{sen}^2\alpha'\cos^2\alpha + \cos^2\alpha'\operatorname{sen}^2\alpha) - 2a^2b^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha\cos\alpha'}$$

$$= \frac{a^2b^2}{(\operatorname{sen}\alpha'\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha')^2} = \frac{a^2b^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha'-\alpha)};$$

e da ciò si conclude

$$a'b'\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha) = ab.$$

Ora, l'angolo $\alpha'-\alpha$ è quello che formano fra loro i diametri coniugati FG, HK (*Tav.* XCVII, *fig.* 5); dunque, nel paralellogrammo AFLH l'altezza $LI = b'\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)$, e l'area è espressa da $a'b'\operatorname{sen}(\alpha'-\alpha)$. Dunque quest'area è costante ed eguale al rettangolo ab dei semi assi, il che equivale al teorema enunziato.

Teorema II. *Nell' ellisse, la somma dei quadrati di due diametri coniugati è costante ed eguale alla somma dei quadrati dei due assi.*

Se si riprendono le equazioni (4), (6), (7),

$$a^2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha' + b^2\cos\alpha\cos\alpha' = 0 \quad \ldots\ldots (4),$$

$$a'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (6),$$

$$b'^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\operatorname{sen}^2\alpha' + b^2\cos^2\alpha'} \quad \ldots\ldots\ldots (7),$$

e che si elimini fra esse gli angoli α e α', si cade sopra l'equazione $a'^2b'^2 = a^2 + b^2$, che dimostra il teorema enunziato.

Per fare questa eliminazione, si ricava in primo luogo dall'equazione (6), combinata con la relazione $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, i valori di $\operatorname{sen}^2\alpha$ e $\cos^2\alpha$: questi valori sono

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{b^2(a^2-a'^2)}{a'^2(a^2-b^2)}, \quad \cos^2\alpha = \frac{a^2(a'^2-b^2)}{a'^2(a^2-b^2)}.$$

Siccome l'equazione (7) si deduce dall'equazione (6) cangiando a' in b' e α in α', si dedurrà $\operatorname{sen}^2\alpha'$ e $\cos^2\alpha'$ dai valori precedenti, cangiandovi a' in b'. Si trova così

$$\operatorname{sen}^2\alpha' = \frac{b^2(a^2-b'^2)}{b'^2(a^2-b^2)}, \quad \cos^2\alpha' = \frac{a^2(b'^2-b^2)}{b'^2(a^2-b^2)}.$$

Prendiamo adesso l'equazione (4), trasportiamo il secondo termine nell'altro membro, poi eleviamo al quadrato: viene

$$a^4\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha' = b^4\cos^2\alpha\cos^2\alpha'$$

Invece delle linee trigonometriche si sostituiscano i suoi valori: le riduzioni con facilità si presentano, e viene successivamente

$$(a^2-a'^2)(a^2-b'^2) = (a'^2-b^2)(b'^2-b^2),$$
$$a^4-a^2a'^2-a^2b'^2 = -a'^2b^2-b'^2b^2+b^4,$$
$$a^4-b^4 = a'^2(a^2-b^2)+b'^2(a^2-b^2),$$
$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2$$

Questo risultamento è conforme all' enunziato.

15. Le tre equazioni (4), (6), (7), bastano per determinare tre delle sei quantità a, b, a', b', α, α', allorchè le tre altre sono conosciute; esse possono per conseguenza servire a risolvere tutte le questioni relative ai diametri coniugati.

Ma sarà spesso più comodo d' impiegare, in luogo di queste equazioni, le seguenti, che ne sono state dedotte,

$$\tang \alpha \tang \alpha' = -\frac{b^2}{a^2},$$

$$a'b' \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha) = ab,$$

$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

16. Ritorniamo all' equazione (8), e per maggior semplicità, sopprimiamovi gli accenti di x' e di y': si ha

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2 \quad . \; . \; . \; . \; (8).$$

Quest' equazione, essendo assolutamente della medesima forma di quella che è relativa agli assi, tutte le proprietà indipendenti dall' inclinazione delle ordinate saranno comuni agli assi dell' ellisse e ai suoi diametri coniugati. Così possiamo considerare le seguenti proposizioni come dimostrate.

1.° Secondo che un punto è situato sopra l' ellisse, o fuori dell' ellisse, o dentro, la quantità $a'^2y^2 + b'^2x^2 - a'^2b'^2$ sarà nulla, positiva, o negativa (*Vedi* Ellissa)

2.° I quadrati delle ordinate, paralelle ad un diametro, sono proporzionali ai prodotti dei segmenti, che esse formano sopra il suo coniugato (*Vedi* Ellissa).

3.° Indichiamo con α il rapporto del seno, eguale al coefficiente di x nell'equazione $y = \alpha x + d$: si avrà (*Vedi* Tangente), pel valore di α che conviene alla tangente condotta all' ellisse, al punto le di cui coordinate sono x' e y',

$$\alpha = -\frac{b'^2 x'}{a'^2 y'};$$

e per l' equazione della tangente si avrà

$$a'^2y'y + b'^2x'x = a'^2b'^2.$$

La suttangente sarà

$$\mathrm{PT} = \frac{a'^2 - x'^2}{x'};$$

e avremo sempre, fra i valori di α e di α' relativi alla tangente e al diametro condotto al punto di contatto, questa relazione che merita di essere osservata. (*Vedi* Tangente).

$$\alpha\alpha' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

4.° Se $y = cx + d$ è l' equazione di una corda qualunque, e che $y = c'x$ sia quella del diametro che passa per i mezzi di tutte le corde paralelle, si avrà la relazione (n.° 7)

$$cc' = -\frac{b'^2}{a'^2}.$$

la quale ha ancora luogo per due diametri coniugati le di cui equazioni fossero

$y=ex$ e $y=e'x$ (o.° 8), come pure per due corde supplementarie condotte all'estremità di un diametro qualunque (*Vedi* Supplementarie Corde).

17. L'ellisse essendo riportata a due diametri coniugati, e la sua equazione essendo

$$a'^2y^2+b'^2x^2=a'^2b'^2,$$

se vogliamo condurre delle tangenti a questa curva, per un punto esterno N (*Tav.* XCVII, *fig.* 6) le di cui coordinate sono x'' e y'', si avrà (*Vedi* Tangente), fra le coordinate incognite di ciascun punto di contatto, le due equazioni

$$a'^2y'^2+b'^2x'^2=a'^2b'^2,$$
$$a'^2y''y'+b'^2x''x'=a'^2b'^2.$$

La seconda prova che la retta, che ha per equazione

$$a'^2y''y+b'^2x''x=a'^2b'^2,$$

passa per i punti di contatto. Per costruire questa linea, si fa successivamente $y=0$, $x=0$, e si ottiene le distanze dall'origine ai punti ov'essa incontra i due diametri: cioè

$$AT=\frac{a'^2}{x''}, \quad AR=\frac{b'^2}{y''}.$$

Se si considera una di queste distanze, AT per esempio, si vede che essa non contiene y'': per conseguenza, se si conduce la retta NL paralella ad Ay, e che da un altro punto qualunque di questa linea si conducano due tangenti all'ellisse, la secante che passa per i nuovi punti di contatto taglierà ancora il diametro Ax al medesimo punto T. Questo punto non potrebbe cangiare che nel caso in cui cangiasse ancora x''.

Dunque, *se, da ciascun punto di una data retta, si conducano due tangenti ad un'ellisse, e che si uniscano i due punti di contatto, avremo delle secanti che verranno tutte ad incontrarsi in un medesimo punto situato sul diametro coniugato di quello che è parallelo alla retta data.*

E viceversa, *se, per un punto dato nel piano di un'ellisse, si tirano differenti secanti, e che, per i punti ove ciascuna secante incontra la curva, si conducano due tangenti, il luogo dei punti d'intersezione di queste tangenti così prese due a due, sarà una retta parallela al diametro coniugato di quello che passa pel punto dato.*

18. La conformità dell'equazioni (2) e (8) dà ancora un mezzo semplice di descrivere l'ellisse per punti, quando si conoscano due diametri coniugati $2a'$, $2b'$; e l'angolo che essi fanno fra loro. Sul primo, per esempio, si descrive un'ellisse i di cui assi siano $2a'$ e $2b'$; e quindi s'inclinano (*Tav.* XCVII, *fig.* 7) le ordinate MP, M'P', ... sotto l'angolo dato, senza cangiare le loro lunghezze; i punti N, N', ... trovati con questo processo appartengono alla curva.

Per alcune altre particolarità sopra i diametri dell'ellisse, si consulti in questo Dizionario la parola (Supplementarie Corde).

Iperbola.

19. Sia l'equazione

$$y=cx+d \quad .\ .\ .\ .\ (1);$$

quella di una retta qualunque che taglia l'iperbola in F e G (*Tav.* XCVII, *fig.* 8). Combinandola con quella dell'iperbola

$$a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2 \quad .\ .\ .\ .\ .\ (2),$$

si troveranno le coordinate dei punti F e G. Eliminando y viene

$$(a^2c^2-b^2)x^2+2cda^2x+(d^2+b^2)a^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; (3),$$

ovvero

$$x^2+\frac{2cda^2}{a^2c^2-b^2}x+\frac{(d^2+b^2)a^2}{a^2c^2-b^2}=0,$$

equazione le di cui radici sono precisamente le ascisse AH e AK dei punti F e G. La semi-somma di queste ascisse è perciò eguale alla metà del coefficiente del secondo termine, preso con un segno contrario: ma questa semi-somma è l'ascissa del mezzo I della corda FG; dunque chiamando x questa ascissa, avremo

$$x=-\frac{cda^2}{a^2c^2-b^2}.$$

Mettendo questo valore nell'equazione (1), si ha per l'ordinata IP,

$$y=\frac{-db^2}{a^2c^2-b^2}.$$

Supponiamo che, c conservando il medesimo valore, d prenda successivamente tutti gli stati di grandezza: la retta FG si trasporterà paralellamente a se medesima, e le precedenti formule danno sempre le coordinate dei mezzi di queste corde; dunque se, per eliminare d, si divide y per x, l'equazione risultante

$$\frac{y}{x}=\frac{b^2}{a^2c}, \quad \text{ovvero} \quad y=\frac{b^2}{a^2c}x,$$

sarà quella di un diametro. Qui si vede, come per l'ellisse, che *tutti i diametri dell'iperbola passano pel centro.* E siccome possiamo far prendere al coefficiente di x tutti i valori possibili facendo variare c da $+\infty$, fino a $-\infty$, si conclude ancora che *le rette condotte pel centro possono considerarsi come diametri.*

Questa conclusione è soggetta però a due eccezioni. Esse hanno luogo allorchè si suppone $c=\pm\frac{b}{a}$. Allora l'equazione di sopra diventa

$$y=\pm\frac{b}{a}x,$$

e se ritrovano le due rette digià osservate come limiti delle tangenti (*Vedi* Tangente). Ora esse non possono essere diametri; poichè i valori di c dei quali si tratta, riducendo l'equazione (3) al primo grado, le linee paralelle date dall'equazione (1) non incontrano più l'iperbola che in un solo punto, e per conseguenza non esiste diametro corrispondente.

2o. Per l'equazione del diametro, possiamo prendere

$$y=c'x.$$

Ma allora bisogna stabilire fra le tangenti c e c' la relazione $c'=\frac{b^2}{a^2c}$, ovvero, ciò che è il medesimo

$$cc'=\frac{b^2}{a^2}.$$

21. Questa relazione avrebbe potuto dedursi dalla sua analoga nell' ellisse (n.° 7) cangiando b^2 in $-b^2$, ad essa dà ancora delle conseguenze simili.

1.° Se si chiami α la tangente trigonometrica dell' angolo, che la tangente condotta all' estremità del diametro fa con l' asse delle x, si ha, fra α e c' questa relazione (*Vedi* Tangente).

$$\alpha c' = \frac{b^2}{a^2}$$

dunque $\alpha c' = cc'$, donde $\alpha = c$; dunque *le corde, che un diametro divide in parti eguali, sono paralelle alla tangente condotta all' estremità di questo diametro.*

2.° Il prodotto cc' essendo costante ed eguale a $\frac{b^2}{a^2}$, non può diventare eguale a -1; dunque gli assi attuali delle coordinate sono *i soli assi dell' iperbola*, poichè alcun altro diametro non è perpendicolare sopra le corde che esso divide in parti eguali.

3.° L' equazione $cc' = \frac{b^2}{a^2}$ prova che, se il diametro che ha per equazione $y = c'x$ divide in parti eguali le corde paralelle a quello la di cui equazione è $y = cx$; viceversa la seconda taglia in parti eguali la corde paralelle al primo. Dunque, *perchè due diametri siano coniugati, la condizione è.*

$$cc' = \frac{b^2}{a^2}$$

22. Di due diametri coniugati, non ve ne è che uno solo che incontri l' iperbola. Infatti, supponiamo che $y = cx$ sia l' equazione di un diametro, e che si cerchino le sue intersezioni con la curva, si trova per le ascisse di questi punti

$$x = \pm\sqrt{\frac{a^2b^2}{b^2 - a^2c^2}} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{\frac{b^2}{a^2} - c^2}}.$$

Questi valori di x sono reali se si prende $c < \frac{b}{a}$, positivamente o negativamente; ma essi diventeranno immaginari se si prende $c > \frac{b}{a}$. Nel primo caso, il diametro incontra l' Iperbola; e nel secondo esso non l' Incontra mai. Ora vediamo, dalla relazione $cc' = \frac{b^2}{a^2}$, che se c è $< \frac{b}{a}$, dobbiamo avere $c' > \frac{b}{a}$; dunque tutti i diametri che tagliano l' iperbola hanno i loro coniugati fra quelli che non l' incontrano.

Se si costruisce sopra gli assi della curva il rettangolo HKH'K', (*Tav.* XCVII, *fig.* 9), tutti i diametri che attraversano gli angoli HAK e H'AK' fanno con l' asse BC un angolo la di cui tangente, astrazione fatta dal segno, è $< \frac{b}{a}$, nel mentre che i diametri che attaversano l' angolo HAK' e H'AK fanno con

BC un angolo la di cui tangente è $> \frac{b}{a}$; dunque i primi sono quelli che incontrano la curva, e i secondi sono quelli che non l'incontrano.

23. Nel caso particolare in cui $e = \frac{b}{a}$, si ha ancora $e' = \frac{b}{a}$: allora i due diametri coniugati si confondono con la diagonale HH'. Similmente, quando $e = -\frac{b}{a}$, si ha ancora $e' = -\frac{b}{a}$, e allora i due diametri si confondono con l'altra diagonale KK'. In ambedue i casi, i diametri non incontrano l'iperbola che all'infinito.

24. L'equazione dell'iperbola riportata ai suoi assi essendo

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2 \quad \ldots\ldots (4)$$

ne dedurremo l'equazione ai diametri coniugati, cercando i differenti sistemi di coordinate per i quali l'equazione di questa curva non contiene le variabili che al quadrato.

In conseguenza, si sostituisce nell'equazione (4) i valori

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha', \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha'$$

si fa, per abbreviare

$$A = a^2 \operatorname{sen}^2\alpha' - b^2 \cos^2\alpha',$$
$$B = a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha,$$
$$C = a^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha' - b^2 \cos\alpha \cos\alpha',$$

e si ha l'equazione trasformata

$$Ay'^2 + Bx'^2 + 2Cx'y' = -a^2b^2 \quad \ldots\ldots (5):$$

ora, perchè essa abbia la forma domandata, bisogna mettere $C = 0$, vale a dire

$$a^2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha' - b^2 \cos\alpha \cos\alpha' = 0 \quad \ldots\ldots (6);$$

e con ciò l'equazione (5) si riduce alla seguente

$$Ay'^2 + Bx'^2 = -a^2b^2 \quad \ldots\ldots (7).$$

25. Ad $y' = 0$ corrisponde $x'^2 = -\frac{a^2b^2}{B} = \frac{-a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha}$;

e a $x' = 0$ corrisponde $y'^2 = \frac{-a^2b^2}{A} = \frac{-a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha' - b^2 \cos^2\alpha'}$.

Questi valori sono di segni differenti, poichè la relazione (6) dà

$$a^2 \operatorname{sen}^2\alpha \times a^2 \operatorname{sen}\alpha' = b^2 \cos\alpha \times b^2 \cos^2\alpha';$$

e si vede che se $a^2 \operatorname{sen}^2\alpha$ è minore di $b^2 \cos^2\alpha$, bisogna, per compensazione, che $a^2 \operatorname{sen}^2\alpha'$ sia maggiore di $b^2 \cos^2\alpha'$, e viceversa. Dunque uno dei nuovi assi è incontrato dalla curva, e l'altro non lo è, ciò che già si sapeva n.° 22.

Prendiamo per asse della x' quello che incontra la curva, e indichiamo con $2a'$ la parte di quest'asse compresa nell'iperbola, si avrà

$$a'^2 = \frac{-a^2b^2}{B} = \frac{-a^2b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha} \quad \ldots\ldots (8).$$

Poichè la linea dell' y' non incontra la curva, indichiamo con $-b'^2$ il valore negativo di y'^2, e si avrà

$$b'^2 = \frac{a^2 b^2}{A} = \frac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 \alpha' - b^2 \cos^2 \alpha'} \ldots\ldots (9).$$

Attualmente, se ai valori A e B si sostituiscono i valori $\frac{a^2 b^2}{b'^2}$ e $\frac{-a^2 b^2}{a'^2}$, l'equazione (7) diventa

$$a'^2 y'^2 - b'^2 x'^2 = -a'^2 b'^2 \ldots\ldots (10).$$

Il diametro sul quale si contano le x', quello cioè, che incontra la curva, si chiama *primo diametro* o *diametro trasverso*, e la sua lunghezza è $2a'$. L'altro sul quale si contano le y', si chiama *secondo diametro*; e, quantunque esso non incontri l'iperbola, si conviene di darli per lunghezza $2b'$.

26. L'equazione (6) essendo divisa per $a^2 \cos\alpha \cos\alpha'$ dà

$$\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = \frac{b^2}{a^2} \ldots\ldots\ldots (11);$$

e si vede che dando all'asse delle x' una posizione particolare, il che equivale a determinare α, si avrà un valore reale per $\operatorname{tang}\alpha'$: dunque *ciascun diametro ha il suo coniugato.* Ma conviene osservare che non dobbiamo fare $\operatorname{tang}\alpha = \pm\frac{b}{a}$ mentre allora non si avrebbero dei veri diametri (n.° 19). D'altra parte, queste ipotesi darebbero $\operatorname{tang}\alpha' = \pm\frac{b}{a}$; dunque, nei due casi, l'asse delle y' coinciderebbe con quello delle x', il che prova evidentemente che queste linee non possono più essere diametri coniugati.

Di più, siccome l'equazione (11) è simile a quella che lega fra loro le direzioni delle corde supplementarie (*Vedi* Supplementarie Corda), ne segue che se una delle corde è paralella al primo diametro, l'altra sarà paralella al secondo diametro. Si ricade così sopra le seguenti proprietà digià conosciute: *che due diametri coniugati sono paralelli a due corde supplementarie;* e viceversa, *che due diametri paralelli a corde supplementarie sono diametri coniugati.*

Nell'iperbola equilatera $b = a$; dunque $\operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha' = 1$, dunque gli angoli α, e α' sono complementi l'uno dell'altro.

27. Per conoscere se vi sono altri diametri coniugati rettangolari fuorchè i due assi, facciamo $\alpha = 90° + \alpha$, il che dà $\operatorname{sen}\alpha' = \cos\alpha$ e $\cos\alpha' = -\operatorname{sen}\alpha$. L'equazione (6) diventa

$$(a^2 + b^2) \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha;$$

e questa non può essere verificata che facendo $\operatorname{sen}\alpha = 0$ ovvero $\cos\alpha = 0$, supposizioni che riportano agli assi primitivi.

28. Se si volesse che i diametri coniugati dell'iperbola fossero eguali, si eguaglierebbero fra loro i valori di a'^2 e di b'^2, e si avrebbe

$$a^2 \operatorname{sen}^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha = -a^2 \operatorname{sen}^2\alpha' + b^2 \cos^2\alpha'.$$

Sostituendo $1 - \operatorname{sen}^2\alpha$ invece di $\cos^2\alpha$, e $1 - \operatorname{sen}^2\alpha'$ per $\cos^2\alpha'$, quest'equazione dà

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha' = \frac{2b^2}{a^2 + b^2} \ldots\ldots (12)$$

Se si trasporta il secondo termine dell'equazione (6) nell'altro membro, e che si elevi tutto al quadrato, e che si facciano allora le medesime sostituzioni che sopra, mettendo di più invece di $\text{sen}^2\alpha + \text{sen}^2\alpha'$ il suo equivalente, preso dall'equazione (12), si trova facilmente

$$\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\alpha' = \frac{b^4}{(a^2+b^2)^2} \ldots\ldots (13).$$

Dal quadrato dell'equazione (12) sottraggbiamo quattro volte questa, viene $(\text{sen}^2\alpha - \text{sen}^2\alpha')^2 = 0$; dunque

$$\text{sen}^2\alpha' = \text{sen}^2\alpha\,,\quad \cos^2\alpha' = \cos^2\alpha\,,\quad \text{tang}\,\alpha' = \pm\,\text{tang}\,\alpha.$$

Ma l'equazione (11) prova che le due tangenti debbono avere il medesimo segno; dunque $\text{tang}\,\alpha' = \text{tang}\,\alpha$, e quindi l'equazione (11) dà

$$\text{tang}\,\alpha = \text{tang}\,\alpha' = \pm\frac{b}{a}.$$

Dunque, nell'iperbola, il calcolo indica, per diametri coniugati eguali, due rette riunite in una sola, e dirette seguendo l'una o l'altra delle diagonali del rettangolo costruito sopra gli assi.

29. Nell'iperbola vi sono due teoremi del tutto analoghi a quelli del n.° 14; e siccome essi si dimostrano nella medesima maniera, servirà di enunziarli.

Teorema I. *Il parallellogrammo costruito sopra due diametri coniugati è equivalente al rettangolo degli assi.*

Teorema II. *La differenza dei quadrati dei diametri coniugati è eguale alla differenza dei quadrati degli assi.*

30. Da ciò che precede segue che, nei problemi relativi all'iperbola, potremo se ciò sembra più comodo, sostituire alle equazioni (6), (8) e (9) le seguenti che sono una deduzione delle medesime:

$$\text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\alpha' = \frac{b^2}{a^2},$$

$$a'b'\,\text{sen}(\alpha' - \alpha) = ab,$$

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2.$$

L'ultima prova che se $a = b$, si ha ancora $a' = b'$; dunque nell'iperbola equilatera i diametri coniugati sono eguali. Questa proprietà ha luogo nel circolo; ma i diametri coniugati in questa curva sono rettangolari, nel mentre che, nell'iperbola equilatera, essi fanno con l'asse trasverso angoli complementi l'uno dell'altro.

Nelle iperbole ordinarie, a essendo differente da b, a' non potrebbe essere eguale a b', e non vi sono, parlando propriamente, diametri coniugati eguali.

31. Togliendo l'accento alle variabili x' e y', l'equazione (10) sarà

$$a'^2y^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2 \ldots\ldots (10).$$

Essa è simile in tutto all'equazione (4) relativa agli assi; dunque le proprietà indipendenti dall'inclinazione delle ordinate saranno comuni agli assi dell'iperbola, e ai suoi diametri coniugati. Così,

1.° I quadrati delle ordinate, paralelle al secondo diametro, stanno fra loro come i prodotti dei segmenti formati sul primo (*Vedi* Iperbola).

2.° Quando un punto dato è situato sull'iperbola, o al di fuori, o al di dentro, la quantità $a'^2y^2 - b'^2x^2 + a'^2b'^2$ sarà nulla, positiva, o negativa (*Vedi* Iperbola).

3.° Indicando con α il rapporto del seno, eguale al coefficiente di x nell' equazione generale della linea retta, avremo pel valore di α relativo alla tangente (*Vedi* Tangenta),

$$\alpha = \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'};$$

e l' equazione della tangente sarà ancora

$$a'^2 y' y - b'^2 x' x = - a'^2 b'^2.$$

I limiti delle tangenti avranno per equazione (*Vedi* Tangenta),

$$y = \pm \frac{b'}{a'} x,$$

donde si conclude che esse si confondono con le diagonali del parallelogrammo costruito con i diametri coniugati (*Tav.* XCVII, *fig.* 10). La sottangente è ancora (*Vedi* Tangenta)

$$\mathrm{PT} = \frac{x'^2 - a'^2}{x'};$$

e si avrà sempre fra i valori di α e di α', relativi alla tangente e al diametro condotto pel punto di tangenza, la relazione

$$\alpha \alpha' = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

4.° Se $y = cx + d$ è l' equazione di una corda qualunque dell' iperbola, e se $y = c'x$ è quella del diametro che passa per i mezzi delle corde parallele, si avrà (n.° 20) la relazione

$$cc' = \frac{b'^2}{a'^2};$$

e questa relazione ha ancora luogo per due diametri coniugati le di cui equazioni fossero $y = cx$ e $y = c'x$ (n.° 21), come pure per due corde supplementarie condotte all' estremità di un diametro qualunque (*Vedi* Supplementaria Corda).

32. L' iperbola essendo riportata a due diametri coniugati, se vogliamo condurvi delle tangenti per un punto esterno, e che si ripetano i medesimi ragionamenti che per l' ellisse (n.° 17), avremo questo teorema:

Se, da ciascun punto di una data retta, si conducano due tangenti ad un' iperbola, e che si uniscano i due punti di contatto, si avranno delle secanti che s' incontreranno tutte in un medesimo punto, situato sul diametro coniugato di quello che è parallelo alla retta data.

E viceversa, *se, per un punto dato nel piano di un' iperbola, si tirano differenti secanti, e che per i punti ove ciascuna secante incontra la curva, si conducano due tangenti, il luogo dei due punti d' intersezione di queste tangenti, così prese due a due, sarà una retta parallela al diametro coniugato di quello che passa pel punto dato.*

33. L' equazione (10) prova ancora che, per descrivere un' iperbola della quale si conoscano due diametri coniugati, bisogna descrivere un' iperbola sopra questi diametri, come se essi fossero gli assi della curva, e inclinare quindi convenientemente le ordinate, senza cangiare le loro lunghezze.

Per quello ancora che può concernere ai diametri dell'Iperbola *si veda* Supplementarie Corda.

Parabola

34. Sia l'equazione di una retta qualunque,

$$y = cx + d:$$

se si combina con quella della parabola

$$y^2 = 2px,$$

e che si elimini x, avremo, per determinare y.

$$y^2 - \frac{2py}{c} + \frac{2pd}{c} = 0.$$

Le radici di questa equazione sono le ordinate dei punti ove la retta incontra la curva, e l'ordinata dal mezzo della corda che unisce questi punti è eguale alla semi-somma di queste due radici; dunque, indicando quest'ordinata per y, si ha

$$y = \frac{p}{c}.$$

Questo valore non contiene d, e rimane il medesimo fintanto che c è costante: così, *tutti i diametri della parabola sono paralelli all'asse.*

Viceversa, *ogni retta paralella all'asse può considerarsi come diametro della parabola*, poichè dando a c un valore conveniente, y diventa eguale a quella quantità che vorremo.

35. Supponiamo che un diametro $A'x'$ (*Tav.* XCVIII, fig. 1) sia stato condotto ad una distanza y' dall'asse, avremo, per questo diametro,

$$\frac{p}{c} = y', \quad \text{donde} \quad c = \frac{p}{y'}.$$

Questo valore è il valore della tangente trigonometrica dell'angolo, che fanno con l'asse le corde tagliate in parti eguali dal diametro. Ma, da un'altra parte, questo valore è ancora quello della tangente trigonometrica dell'angolo che fa con l'asse la tangente al punto A' (*Vedi* Tangente); dunque *le corde che un diametro divide in parti eguali sono paralelle alla tangente condotta all'estremità di questo diametro.*

Perchè la tangente c sia infinita, bisogna fare $y' = 0$, dunque la linea delle x è il solo asse della parabola.

36. Le formule per passare dagli assi rettangolari agli assi obliqui, sono (*Vedi* Trasformazione della coordinate).

$$x = x' \cos\alpha + y' \cos\alpha' + a, \qquad y = x' \operatorname{sen}\alpha + y' \operatorname{sen}\alpha' + b$$

L'equazione della parabola, in coordinate rettangolari, essendo $y^2 = 2px$, se si pone la nuova origine in un punto A' della curva, si avrà fra a e b la relazione $b^2 = 2pa$. Di più, se si prende il diametro $A'x'$ per asse delle x', si avrà $\operatorname{sen}\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$; e se si sceglie la tangente $A'y'$ per asse delle y', si avrà

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{p}{b}.$$

Prendiamo le formule conosciute (*Vedi* Seno)

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{\operatorname{tang}\alpha'}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha'}}, \qquad \cos\alpha' = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\alpha'}}:$$

sostituendo invece di $\operatorname{tang}\alpha'$ il suo valore, esse divengono

$$\operatorname{sen}\alpha' = \frac{p}{\sqrt{b^2+p^2}}, \qquad \cos\alpha' = \frac{b}{\sqrt{b^2+p^2}};$$

e sostituendo i valori di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{sen}\alpha'$, $\cos\alpha'$, le formule della trasformazione diventano

$$x = x' + \frac{by'}{\sqrt{b^2+p^2}} + a,$$

$$y = \frac{py'}{\sqrt{b^2+p^2}} + b.$$

Adesso per riportare la parabola ai nuovi assi non rimane, che da mettere questi valori nell' equazione

$$y^2 = 2px \ldots\ldots (1);$$

e si ottiene

$$y'^2 = \frac{2(b^2+p^2)}{p}x'.$$

Mettiamo ancora in luogo di b^2 il suo valore $2pa$, e, per abbreviare, poniamo $4\left(a+\frac{1}{2}p\right) = 2p'$: si avrà

$$\frac{2(b^2+p^2)}{p} = \frac{2(2pa+p^2)}{p} = 4\left(a+\frac{p}{2}\right) = 2p';$$

e l' equazione della parabola diventa, togliendo gli accenti ad x' e y',

$$y^2 = 2p'x \ldots\ldots\ldots (2).$$

Il coefficiente $2p'$ è ciò che si chiama il *parametro del diametro* al quale la parabola è riportata; e siccome $2p'$ rappresenta $4\left(a+\frac{1}{2}p\right)$, e che $a+\frac{1}{2}p$ è la distanza dal fuoco al punto A' (*Vedi* Parabola), si conclude che *il parametro di un diametro è eguale a quattro volte la distanza dal fuoco all'estremità di questo diametro.*

37. L' equazione della parabola essendo la medesima tanto rapporto ai suoi diametri, quanto rapporto al suo asse, le proprietà indipendenti dall' inclinazione delle coordinate saranno comuni nei differenti sistemi.

1.° Secondo che un punto è situato sopra la parabola, o al di fuori, o al di dentro, la quantità $y^2 - 2p'x$ dev' essere nulla, positiva, o negativa (*Vedi* Parabola).

2.° I quadrati delle ordinate al diametro stanno fra loro come le ascisse corrispondenti (*Vedi* Parabola).

3.° Indicando con α il rapporto del seno, eguale al coefficiente di x nell'equazione generale della linea retta, il valore di α, relativo alla tangente, sarà (*Vedi* Tangente).

$$a = \frac{p'}{y'};$$

Si avrà, per l'equazione della tangente,

$$y'y = p'(x + x');$$

e, per la suttangente (*Vedi* Tangente),

$$P'T' = 2x';$$

vale a dire che *la suttangente è sempre doppia dell'ascissa del punto di contatto.*

38. Una retta essendo data, se si conduce alla parabola una tangente paralella a questa retta, e il diametro che passa al punto di contatto, l'equazione della curva riportata a questo sistema di assi sarà $y^2 = 2p'x$. Si conducano, da un punto qualunque della retta data, due tangenti alla parabola: indicando con x'' e y'' le coordinate di questo punto si hanno (*Vedi* Tangente) per determinare quelle dei punti di contatto, le due equazioni

$$y'^2 = 2p'x', \quad y''y' = p'(x' + x'').$$

La seconda prova che la retta, che ha per equazione $y''y' = p'(x' + x'')$, passa per i punti di contatto. Se in questa equazione si fa $y' = o$, viene $x' = -x''$. risultamento indipendente da y'', e che dà per la parabola il teorema già trovato per l'ellisse e l'iperbola (n.ª 17, 32). Dunque in generale

Se, da ciascun punto di una retta data, si conducano due tangenti od una curva del second' ordine, e che si tiri una retta per i due punti di contatto, si avranno delle secanti che tutte s'incontreranno in un medesimo punto, situato sul diametro che divide in parti eguali le corde paralelle alla retta data.

E viceversa, *se, per un punto dato nel piano di una curva del second' ordine, si tirano differenti secanti, e che per i punti ove ciascuna secante incontra la curva, si conducano due tangenti, il luogo dei punti d'intersezione di queste tangenti, così prese due a due, sarà una retta paralella alle corde che divide in parti eguali il diametro che passa pel punto dato.*

39. L'equazione (2) paragonata all'equazione (1) prova ancora che se vogliamo descrivere una parabola, quando si conosce il parametro del diametro e l'inclinazione delle ordinate corrispondenti, basta di descrivere prima una parabola sopra questo diametro preso per asse, col parametro dato, e quindi d'inclinare convenientemente le ordinate di questa curva, senza cangiare le loro lunghezze.

Possiamo ancora determinare prima il fuoco e la direttrice della parabola, e quindi descriverla. Sia $A'x'$ (*Tav.* XCVIII, *fig.* 2) il diametro dato, si conduca la retta $y'A'T$ sotto l'inclinazione data, e questa linea sarà tangente alla parabola nel punto A' (n.ª 35); si faccia l'angolo $TA'F = y'A'x'$, e la linea $A'F$ passerà pel fuoco (*Vedi* Parabola). Si prenda $A'F$ eguale al quarto del parametro dato, e il punto F sarà il fuoco (n.° 36). Sopra il prolungamento di $A'x'$ si porti $A'C = A'F$; si conduca la retta CL perpendicolare ad $A'x'$, e questa retta sarà la direttrice (*Vedi* Parabola).

DIAMETRI DELLE CURVE ALGEBRICHE

40. Nelle sezioni coniche abbiamo usato la parola *diametro* per indicare una retta che divide in due parti eguali tutte le corde paralelle. Nelle curve algebriche di un ordine qualunque più in generale dobbiamo intendere per diametro una retta, la quale divida in tal modo le paralelle stese fra due o più rami, che la somma delle parti positive sia eguale a quella delle negative. In questo caso è evidente che l'equazione della curva riferita ad uno di questi diametri, ordinata per y, e ridotta a zero, deve mancare del suo secondo termine, il cui coefficiente rappresentando per ogni valore di x la somma dei corrispondenti valori di y (*Vedi* EQUAZIONI DEI GRADI SUPERIORI), è necessariamente nullo quando la parte negativa di questi valori eguaglia la positiva.

41. Entro ad una curva qualunque è sempre possibile di tracciare infiniti sistemi di corde paralelle in ogni direzione, da ciò si deduce che infiniti potranno esserne i diametri. Ma i diametri che più specialmente si considerano sono quelli che essendo nel tempo stesso assi ortogonali della curva, la dividono in due o più parti simili ed eguali. Per riconoscere se una curva abbia o no diametri di queste specie convien distinguer tre diversi casi; 1.° quando vogliamo che la curva sia divisa in due parti eguali dall'uno o dall'altro dei due assi X, Y (*Tav.* XCVIII, *fig.* 3), 2.° quando vogliamo che sieno respettivamente eguali tra loro le due porzioni della curva contenute nelle regioni R, S, cioè tra i due assi e i due loro prolungamenti, e le due contenute nelle regioni Q, T. tra l'uno degli assi e il prolungamento dell'altro, 3.° quando finalmente vogliamo che tutte queste quattro parti sieno eguali tra di loro.

42. Nel 1.° caso è evidente che se la curva dev'essere divisa in parti eguali dall'asse X, dovrà quest'asse dividere in parti eguali ciascuna doppia ordinata. L'equazione dovrà dunque rimanere la stessa qualora si cangi y in $-y$; non potrà in conseguenza contenere veruna potenza impari di y, come per la medesima ragione non potrà contenere potenze impari di x, quando la curva debba essere divisa in mezzo dall'asse Y. Agli assi o diametri che in tal guisa dividono la curva in due parti interamente ed esattamente eguali e simili, e per metà le doppie ordinate, si dà il nome di *diametri ortogonali* o *principali*. Così la parabola la cui equazione non contiene potenze impari di y, ha un diametro ortogonale che è l'asse delle x.

43. Nel 2.° caso è del pari manifesto che l'equazione non dovrà subire cangiamento alcuno, qualora vi si permutino insieme x ed y in $-x$ e $-y$. Queste coordinate dovran dunque trovarsi mescolate fra loro in tal modo, che in tutti quanti i termini formino o una dimensione di grado pari, o in tutti quanti una dimensione di grado impari. Infatti con la prima supposizione la permutazione simultanea di x, y in $-x$, $-y$ non farà cambiar di segno alcun termine, e lascerà l'equazione nello stato suo primitivo; nel secondo tutti quanti i termini cambieranno di segno, ma se poi lo cangeremo a tutta quanta l'equazione, ciascuno riprenderà nuovamente quello che gli apparteneva. Niuno dei due assi sarà diametro ortogonale, poichè le parti in cui ciascuno divide la curva non sono tra loro eguali, se non considerate inversamente, nè veruna doppia ordinata è divisa dagli assi per metà. Bensì divise saranno per metà tutte quante le rette che passando per l'origine A, si stendono da un punto della curva al suo opposto. Infatti supposte eguali e tra loro contrarie di segno le due ascisse AP, Ap, e quindi eguali in virtù dell'ipotesi le loro ordinate paralelle PN, pn; se si conduca Nn, i due triangoli che risulteranno da questa costruzione dovranno essere eguali e

simili, e quindi dovrà la retta N*a* passare per A, e quivi rimaner divisa in due parti eguali. Ciò ha fatto dare il nome di centro al punto A.

44. Nel 3.° caso l' equazione dovrà rimaner la stessa, in qualunque modo piaccia di cangiare o unitamente o separatamente x in $-x$, ed y in $-y$. Dovrà dunque in un tempo stesso mancare insieme di tutti i termini tanto con x, quanto con y a potenza impari; il che verificandosi, gli assi ortogonali della curva saranno altresì suoi diametri ortogonali, e la curva avrà per centro l' origine A.

45. Da tutto ciò si conclude 1.° che una curva algebrica avrà un diametro ortogonale, se la sua equazione sia funzione razionale di x ed y^2, o di x^2 ed y e delle respettive loro potenze: tale è il caso della parabola, della cissoide, e della concoide; 2.° che avrà due diametri ortogonali e di più sarà dotata di centro se la sua equazione con contenga che potenze pari di x e di y: tale è il caso dell' ellisse e dell' iperbola; 3.° non avrà diametri ortogonali, ma sarà bensì dotata di centro se la sua equazione contenga x ed y a potenze pari ed impari, ma in modo che le dimensioni formate in ciascun termine da queste variabili sieno o tutte quante di grado pari, o tutte quante di grado impari. Tale sarebbe il caso dell' equazioni $y^5+axy^3+byx^2+cx=0$, $y^4+axy+bx^2+c=0$.

Teoria dei diametri e piani diametrali nell' analisi a tre dimensioni.

46. L' equazione generale delle superficie del secondo grado è

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+F=0 \quad \ldots\ldots (A)$$

Ora mediante diverse riduzioni e trasformazioni che si possono fare a questa equazione, essa si cangia nelle due seguenti (*Vedi* Enumerazione delle superficie contenute nel second' ordine).

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H \quad \ldots\ldots (E),$$
$$P'y^2+P''z^2=2Qx \quad \ldots\ldots (F),$$

nelle quali tutte le superficie del second' ordine, senza eccezione vi sono comprese.

47. Il carattere distintivo delle superficie contenute nell' equazioni ridotte (E) ed (F), e che risulta dalla forma medesima di queste equazioni, è che le une hanno un centro, e che le altre non lo hanno.

Infatti, le equazioni di una retta che passa per l' origine sono $x=az$, $y=bz$; e combinandole con l' equazione (E), avremo, per i due punti M ed M' (*Tav.* XCVIII, *fig.* 4), ove la retta incontra la superficie, delle coordinate eguali e con segni contrari. Da ciò, è facile concludere che l' origine taglia nei loro mezzi tutte le corde condotte nella superficie da quest' origine. Ora questa proprietà è la medesima definizione che si dà del *centro*.

Quanto alle superficie dell' equazione (F), se esse avessero un centro si potrebbe mettervi l' origine; e conducendo, da quest' origine, una corda qualunque fra due punti della superficie, le coordinate di questi due punti non dovrebbero differire che per i segni. Perchè ciò segua, con facilità riconosceremo che l' equazione della superficie non deve contenere alcun termine al primo grado: ora, quando abbiamo trasportato l' origine (*Vedi* Enumerazione di sopra citata) per passare dall' equazione (C) alla trasformata (F), non abbiamo conservato il termine in x che pel solo motivo che è stato impossibile di farlo sparire; dunque l' equazione (F) non rappresenta che superficie senza centro. Ben inteso che Q è differente da zero; altrimenti l' equazione (F) sarebbe un caso particolare dell' equazione (E).

48. Bisognerà però osservare che se quest' ultime superficie non hanno centro, questo segue perchè le coordinate che determinano in generale la posizione di questo punto divengono infinite, o almeno una di loro: così, parlando esattamente, queste superficie debbon essere considerate come aventi un centro situato all' infinito; e per conseguenza, potremo applicar loro le proprietà delle prime facendoci le convenienti modificazioni. Ed è perciò che le parabole sono ellissi i di cui assi sono infiniti.

49. La forma dell' equazione (E) mette ancora in evidenza altre proprietà. Siccome essa non contiene x, y, z, che al quadrato, se si taglia la superficie con piani paralelli al piano di due assi coordinati, con facilità si vede che le sezioni sono curve che hanno i loro centri sul terzo. Ora, questa proprietà è quella che adopreremo per la definizione dei *diametri*; dunque gli assi attuali delle coordinate sono diametri della superficie.

Quando il diametro è perpendicolare ai piani delle sezioni paralelle, esso chiamasi *diametro principale* o *asse* della superficie.

50. È evidente ancora che l' equazione (E) dà per ciascuna variabile due valori eguali e con segni contrari. Ciascun piano coordinato taglia dunque per metà una serie di corde paralelle; e per questa ragione, si dice, che esso è un *piano diametrale*.

Quando un piano diametrale è perpendicolare alle corde che esso divide per metà, si chiama *piano diametrale principale*, o semplicemente *piano principale*. Alcune volte le corde medesime si chiamano ancora *corde principali*.

In generale, se un' equazione algebrica non contiene che termini della medesima parità, vale a dire tutti di grado pari, o tutti di grado impari, la superficie avrà l' origine per centro. L' equazione $xyz^2-2xz+yz+1=0$ è in questo caso.

Se i termini sono della medesima parità, solamente rapporto a due coordinate x ed y, l' asse della terza sarà un diametro. Esempio: $x^2y^5z-x^6z^2-y-z=0$

Finalmente, se tutti i termini sono di grado pari rapporto ad una sola coordinata z, il piano delle xy è un piano diametrale. Esempio: $xyz^4-x^3z^2-z^2-1=0$.

51. In una superficie del second' ordine, quando tre diametri son talmente disposti che ciascuno contenga i centri delle sezioni paralelle al piano dei due altri, si chiamano *diametri coniugati*. E similmente, tre piani diametrali sono *coniugati* allorquando le corde, che ciascuno taglia per metà, sono paralelle all' intersezione dei due altri.

Da queste definizioni risulta che nell' equazione (E) gli assi delle coordinate sono diametri coniugati, e che i piani coordinati sono piani diametrali coniugati. E, in generale, qualunque siano i diametri coniugati, o i piani diametrali coniugati, ai quali si riporta la superficie, la sua equazione deve conservare la forma (E); poichè, se essa ne avesse un' altra, le condizioni che caratterizzano questi piani e questi diametri non sarebbero adempite.

52. Nell' equazione (F), non vi è che l' asse delle z che sia un diametro, e non vi sono che i piani delle xy e delle xz che siano piani diametrali. Questi due piani si chiamano ancora coniugati, atteso che le corde che ciascuno di loro taglia per metà sono paralelle all' altro.

Piani diametrali in generale.

53. Un piano diametrale deve tagliare per metà un seguito di corde paralelle (n.° 50). Non vi è cosa più facile che di applicare il calcolo a questa definizione. Siano

$$x=\delta z+\rho\,, \qquad y=\delta' z+\rho' \;\ldots\ldots\; (1)$$

l'equazioni di una corda qualunque δ e δ' essendo costanti, ma ρ e ρ' variando da una corda ad un'altra. Sostituiamo questi valori nell'equazione generale (A), e poniamo per abbreviare,

$$R = A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta',$$
$$S = A\delta\rho + A'\delta'\rho' + B\delta\rho' + B\delta'\rho + B'\rho + B''\rho' + C\delta + C'\delta' + C''$$
$$T = A\rho^2 + A'\rho'^2 + 2B\rho\rho' + 2C\rho + 2C'\rho' + F:$$

verrà

$$Rz^2 + 2Sz + T = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Le radici di questa equazione sono i valori di z, nei punti ove la curva incontra la superficie. La semi-somma di questi due valori è $-\frac{S}{R}$, e questa è una delle coordinate del mezzo della corda; dunque indicando questa coordinata per z, avremo $z = -\frac{S}{R}$, ovvero

$$Rz + S = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (3).$$

Chiamando x ed y le due altre coordinate del mezzo della corda, dobbiamo avere ancora, fra x, y, z, le equazioni (1); per conseguenza l'eliminazione di ρ e ρ' fra le equazioni (1) e (3) darà il luogo dei mezzi di tutte le corde paralelle. Rimettendo per R ed S i loro valori, ed effettuando i calcoli, si trova

$$(A\delta + B\delta' + B')x + (A'\delta' + B\delta + B'')y$$
$$+ (A'' + B'\delta + B''\delta')z + C\delta + C'\delta' + C'' = 0 \quad \ldots\ldots (4).$$

Tale è l'equazione generale dei piani diametrali. Possiamo scriverla come segue,

$$(Ax + By + B'z + C)\delta + (A'y + Bx + B''z + C')\delta'$$
$$+ A''z + B'x + B''y + C'' = 0;$$

e, sotto questa forma, vediamo come essa si compone con i polinomi derivati, relativi a x, y, e z, del primo membro della proposta (A).

54. Tuttavia bisogna osservare che in certi casi la quantità indicata da R (n.° 53) può essere zero, il che riduce l'equazione (2) al primo grado. Le corde non incontrano dunque più la superficie che in un sol punto: o piuttosto uno dei due punti d'intersezione è ad una distanza infinita. In questo caso succede che il piano diametrale è paralello alle corde: mentre, perchè ciò sia, la condizione è (*Vedi* Applicazione dell'Algebra alla Geometria n.° 135)

$$(A\delta + B\delta' + B')\delta + (A'\delta' + B\delta + B'')\delta' + A'' + B'\delta + B''\delta' = 0:$$

o, riducendo

$$A\delta^2 + A'\delta'^2 + A'' + 2B\delta\delta' + 2B'\delta + 2B''\delta' = 0 \quad \ldots\ldots (5),$$

e si vede che questa condizione è adempita, poichè essa non è altra cosa che l'ipotesi di $R = 0$.

55. Quando la superficie ha un centro, possiamo ridurre la sua equazione a $Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H$ (n.° 46); e allora quella del piano diametrale diventa

$$P\delta x + P'\delta' y + P''z = 0 \quad \ldots\ldots (6).$$

Quest' equazione rappresenta un piano che passa per l'origine, che qui è situata al centro, d'altra parte, possiamo sempre determinare δ e δ', in modo che essa sia identica con quella di un piano dato, condotto per l'origine: dunque, *nelle superficie dotate di centro, tutti i piani diametrali passano pel centro; e, viceversa, tutti i piani condotti pel centro sono piani diametrali.*

56. Quando la superficie è mancante di centro, possiamo rappresentarla con l'equazione $P'y^2+P''z^2=2Qx$ (n.° 46). Quindi si ha pel piano diametrale,

$$P'\delta'y+P''z=Q\delta \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (7).$$

Un piano paralello alla linea delle x ha per equazione $\alpha y+z=\beta$, ed è evidente che l'equazione (7) diventa identica a questa ponendo $\delta=\frac{P''\beta}{Q}$, $\delta'=\frac{P''\alpha}{P'}$: dunque, *nelle superficie mancanti di centro, i piani diametrali sono paralelli alla linea delle x, e, viceversa, ogni piano paralello a questa linea è un piano diametrale.*

Del rimanente, possiamo considerare questa conclusione come compresa in quella del numero precedente. Ma allora bisogna, conformemente ad un'osservazione di già fatta (n.° 48), considerare le paraboloidi come aventi un centro situato ad una distanza infinita; e questo è ciò che convien fare in tutti i casi analoghi, onde evitare delle particolarità troppo piccole.

Diametri.

57. La ricerca dei diametri è facile; ma per diminuire la prolissità dei calcoli, prenderemo, in luogo dell'equazione generale (A), la seguente

$$Px^2+P'y^2+P''z^2=H+2Qx \cdot \cdot \cdot \cdot (H),$$

che è più semplice, e che comprende tutte le superficie del second' ordine: mentre le equazioni (E) ed (F) del (n.° 46) non ne sono che casi particolari.

Il diametro, dalla definizione datane (n.° 49), deve passare per i centri delle sezioni fatte nella superficie da un seguito di piani paralelli. Sia

$$z=\alpha x+\alpha'y+\gamma \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1),$$

l'equazione di uno di questi piani, α e α' essendo costanti e γ variabile: l'eliminazione di z fra le equazioni (1) ed (H) farà conoscere la projezione della sezione sul piano delle xy. Viene dopo eseguito ciò

$$(P+P''\alpha^2)x^2+(P'+P''\alpha'^2)y^2+2P''\alpha\alpha'xy$$
$$+2(P''\alpha\gamma-Q)x+2P''\alpha'\gamma y+P''\gamma^2-H=0 \cdot \cdot \cdot \cdot (2).$$

Le sole curve che possa dare un piano, tagliando una superficie del second'ordine, sono l'ellisse, l'iperbola e la parabola (*Vedi* Enumerazione delle superficie contenute nel second' ordine); ed è evidente che se la projezione è un'ellisse o un'iperbola, la sezione essa medesima non potrà essere che un'ellisse o un'iperbola. Di più, possiamo con facilità vedere che il centro della projezione è la projezione del centro della sezione. In conseguenza, supporremo che l'equazione (2) rappresenti un'ellisse o un'iperbola, e quindi determineremo le coordinate del centro di questa projezione. Per ottenerle, bisogna (*Vedi* Riduzione dell' equazione generale del secondo grado) eguagliare a zero i polinomi derivati, relativi a x e a y, del primo membro dell'equazione (2); facendo così, si trova,

$$(P+P''\alpha^2)x+P''\alpha\alpha'y+P''\alpha\gamma=Q \cdot \cdot \cdot \cdot (3),$$
$$(P'+P''\alpha'^2)y+P''\alpha\alpha'x+P''\alpha'\gamma=0 \cdot \cdot \cdot (4).$$

In queste equazioni x ed y sono due delle tre coordinate del centro della sezione; l'equazione (1) farebbe conoscere la terza z. Ma, per avere il luogo dei centri di tutte le sezioni paralelle che provengono dalla variazione di γ, sarà inutile di cercare i valori di x, y, z; e basterà di eliminare γ fra le equazioni (1), (3), (4). Si ottiene, per risultamento, le equazioni.

$$Px+P''\alpha z=Q; \quad P'y+P''\alpha' z=\rho \ldots\ldots (5),$$

le quali sono del primo grado, e son quelle di un diametro qualunque della superficie.

58. Quando la superficie ha un centro, possiamo fare $Q=o$, e queste equazioni diventano

$$Px+P''\alpha z=o \quad P'y+P'\alpha' z=o.$$

Scegliendo convenientemente α e α', la retta che esse rappresentano prende tutte le posizioni possibili intorno all'origine. Da ciò si conclude che *tutti i diametri passano pel centro*; e, *viceversa che qualunque retta condotta pel centro è un diametro.*

59. Quando la superficie non ha centro, possiamo supporre $H=o$, $P=o$; e le equazioni (5) danno

$$z=\frac{Q}{P''\alpha}, \quad y=-\frac{Q\alpha'}{P'\alpha}.$$

Ora possiamo determinare α e α' in modo che y e z abbiano quelle grandezze che vorremo; dunque, *nelle paraboloidi, i diametri sono paralelli alla linea delle x; e, viceversa, ogni retta che ha questa direzione è un diametro.*

Piani e diametri principali.

60. Abbiamo chiamato (n.° 50) *piano principale* un piano diametrale perpendicolare alle sue corde coniugate, cioè alle corde paralelle che esso taglia per metà. Per conseguenza, per avere tutti i piani principali di una superficie del second' ordine, basta stabilire le equazioni che esprimono questa condizione. Fino al presente non abbiamo fatto alcuna ipotesi sopra la direzione delle coordinate nell'equazione (A); ed è permesso di supporle rettangolari. Allora perchè il piano diametrale sia perpendicolare alle corde coniugate, bisogna (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria) stabilire fra i coefficienti dell' equazioni (1) e (4) del n.° 53 le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} A\delta+B\delta'+B'=(A''+B'\delta+B''\delta')\delta \\ A'\delta'+B\delta+B''=(A''+B'\delta+B''\delta')\delta' \end{array}\right\} \ldots\ldots (1).$$

Esse faranno conoscere δ e δ', e quindi i piani principali.

Per avere calcoli simmetrici, facciamo $A''+B'\delta+B''\delta'=\lambda$; invece di due incognite ne avremo tre, δ, δ', λ, che saranno determinate dalle equazioni

$$\left.\begin{array}{l} A\delta+B\delta'+B'=\lambda\delta \\ A'\delta'+B\delta+B''=\lambda\delta' \\ A''+B'\delta+B''\delta'=\lambda \end{array}\right\} \ldots\ldots (2).$$

Le due prime danno

$$\delta=\frac{(\lambda-A')B'+BB''}{(\lambda-A)(\lambda-A')-B^2}, \quad \delta'=\frac{(\lambda-A)B''+BB'}{(\lambda-A)(\lambda-A')-B^2}.$$

valori che saranno reali se λ non è immaginario. Sostituendoli nella terza equazione, eseguita ogni riduzione, e facendo

$$K = AB''^2 + A'B'^2 + A''B^2 - AA'A'' - 2BB'B''$$

viene

$$\lambda^3 - (A + A' + A'')\lambda^2 + (AA' + AA'' + A'A'' - B^2 - B'^2 - B''^2)\lambda + K = 0 \ldots (3).$$

Tale è l'equazione che bisogna risolvere per conoscere i valori di λ, e quindi quelli di δ e δ'.

61. Questa equazione essendo di grado impari ha almeno una radice reale. Ma perchè questa radice determini veramente un piano principale, non bisogna che questo piano vada a tagliare gli assi coordinati a distanze infinite. Cominciamo a considerare le superficie che hanno un centro. Allora questa difficoltà non può esistere; poichè in queste superficie, tutti i piani diametrali passano pel centro: così, esse hanno almeno un piano principale. Sarebbe difficile giudicare dall' equazione (3) se esse ne hanno più; ma a ciò si arriva per mezzo delle seguenti considerazioni.

Prendiamo le x e le y nel piano principale la di cui esistenza è dimostrata, e le z sul diametro perpendicolare. L'equazione della superficie non conterrà nè i termini del primo grado, poichè l'origine è al centro, nè i rettangoli xz e yz, poichè essa deve dare per z valori eguali e con segni contrari. Di più, possiamo dirigere le x e le y in tal modo che queste coordinate siano perpendicolari fra loro, e facciano sparire ancora il rettangolo xy; dunque l'equazione della superficie sarà della forma

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H \ldots . (4).$$

Essa è simile all' equazione (E) del n.° 46; ma le coordinate attuali sono rettangolari.

Da questa equazione, si vede sul momento che i piani delle xz e delle yz sono ancora piani principali. Così, la superficie ne ha almeno tre; e per conseguenza l'equazione (3), che deve darli tutti, ha le sue tre radici reali. Da un'altra parte siccome questa equazione non può avere più di tre radici, si conclude in generale che *le superficie dotate di centro hanno tre piani principali, e non ne hanno di più.*

62. La ricerca dei *diametri principali* ha un'intima connessione con quella dei piani principali. Prima di tutto è evidente che nell'equazione di sopra le linee delle x, delle y, e delle z, sono diametri principali: poichè ciascuna passa pel centro di un seguito di sezioni alle quali essa è perpendicolare. Dico di più che questi diametri principali sono, in generale, i soli che vi siano nella superficie. Supponiamo che si sia preso un tal diametro per linea delle z, e che si diriga, nel piano diametrale perpendicolare, le x e le y seguendo degli assi rettangolari che facciano sparire xy. Bisognerà che facendo $z = \gamma$ nell'equazione della superficie, ne risulti una curva che abbia l'origine per centro: ora ciò esige che non vi sia, dopo questa sostituzione, verun termine al primo grado; per conseguenza l'equazione della superficie non deve contenere alcuno dei termini in x, y, xz, yz. Essa non deve neppure contenere il termine in z, poichè l'origine è al centro, nè il prodotto xy, poichè si è fatto sparire; dunque essa ha ancora la forma precedente (4). Risulta da ciò che il piano delle xy è un piano principale: vale a dire che a ciascun diametro principale corrisponde un piano principale; e, in generale, siccome non vi sono, che tre piani principali, egualmente non vi sono *che tre assi* o *diametri principali.*

Questa conclusione però soffre eccezione, come pure quella del numero precedente, a motivo dei casi d'indeterminazione che possono offrire le equazioni (1) o (2). Questi casi non hanno luogo come lo vedremo nel seguito di quest'opera che per le superficie di rivoluzione.

Si osservi ancora che i tre piani principali sono coniugati e rettangolari fra loro, e che le loro intersezioni determinano i diametri principali, che essi medesimi sono coniugati e rettangolari. Questo è ciò che vien provato dall'equazione (4).

63. Considerando sempre le superficie che hanno un centro, facciamo conoscere come si ottengano le lunghezze degli assi, vale a dire le porzioni degli assi che sono compresi nella superficie. Supponiamo che le coordinate siano rettangolari e che l'origine sia situata al centro, prenderemo

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+2B''yz+G=0 \ldots . (G)$$

per l'equazione della superficie, e

$$x=\delta z, \qquad y=\delta' z \ldots . (5),$$

per quelle di un asse. È evidente che δ e δ' debbono essere determinate con l'analisi del n.° 60. Indicando con Δ il semi-asse, e con x, y, z, le coordinate del punto dov'esso incontra la superficie, si ha

$$\Delta^2=x^2+y^2+z^2=(\delta^2+\delta'^2+1)z^2.$$

Ma, da un'altra parte, eliminando x ed y dall'equazione (G), per mezzo delle equazioni (5), viene

$$(A\delta^2+A'\delta'^2+A''+2B\delta\delta'+2B'\delta+2B''\delta')z^2+G=0$$

e per conseguenza

$$\Delta^2=\frac{-(\delta^2+\delta'^2+1)G}{A\delta^2+A'\delta'^2+A''+2B\delta\delta'+2B'\delta+2B''\delta'}.$$

Ora, se si aggiungano le equazioni (2) del n.° 60, dopo aver moltiplicato la prima per δ e la seconda per δ', viene

$$A\delta^2+A'\delta'^2+A''+2B\delta\delta'+2B'\delta+2B''\delta'=(\delta^2+\delta'^2+1)\lambda;$$

dunque

$$\Delta^2=\frac{-G}{\lambda} \ldots . . . (6).$$

64. Se G è nullo, λ non l'essendo, si ha $\Delta=0$: questo è ciò che deve aver luogo quando l'equazione (G) rappresenta un punto, un cono, una retta, due piani che si tagliano, o un piano unico.

Se, calcolando λ, si trova $\lambda=0$, e che G non sia nullo, ne risulta $\Delta=\infty$: questo caso ha luogo per i cilindri ellittici, o iperbolici, e ancora per due piani paralelli.

Se nel medesimo tempo si ha $G=0$ e $\lambda=0$, Δ è indeterminato. Ciò deve succedere quando si hanno due piani che si tagliano, un piano unico, o una retta.

65. Lasciamo da parte questi casi particolari, e supponiamo che si sia divisa l'equazione (G) pel termine costante, dopo averlo passato nel secondo membro; in guisa che si abbia, per la superficie,

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Bxy+2B'xz+B''yz=1 \ldots . (K).$$

L' aquazione (3), che dà λ, non cangerà, poichè essa non contiene G, e si avrà semplicemente

$$\Delta^2 = \frac{1}{\lambda} : \ldots\ldots (7);$$

relazione degna di osservazione, la quale prova che dividendo l' onità per le radici dell' equazione (3), si hanno i quadrati dei semi-assi della superficie.

66. Suppooiamo che la soperficie sia riportata ai suoi assi. Poichè essi formano un sistema di diametri coniugati (n.° 62), possiamo dare ancora all' equaziona la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{per l'allissoide;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{per l'iperboloide a una nappa;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{per l'iperboloide a due nappe.}$$

(*Vedi* Superficia rotate di centro).

Cercando le distanze dal centro ai punti ove queste tre superficie incontraoo i loro assi, si trova a, b, c, per la prima; a, b, $c\sqrt{-1}$, per la seconda; $a\sqrt{-1}$ $b\sqrt{-1}$, c, per la terza: donque, secondo il genere della superficie, l'equazione (3) deva avere per radici

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad \text{o} \quad \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2}, \quad \text{o} \quad -\frac{1}{a^2}, -\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}.$$

Per conseguenza, determinando, per mezzo delle regole di Descartes, il numero delle radici positive o negative dell' equazione (3), sapremo quale superficie rappresenta l' equazioone (G). Si osservi che in virtù della relazioone (7), la radici dell' equazione (3), possono è vero essere negative, ma non immaginarie.

67. Parliamo adesso delle superficie che non haono centro. Per qoello che precede (n.° 61), possiamo sempre trovare tre piaoi perpendicolari fra loro che cangino l'equazione (G) in un' altra senza rettaogoli. Questa trasformazione si eseguirebbe, sostituendo a x, y, z, valori tali come $\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z$. Ora facendo le medesime sostituzioni nell' eqoazione generale (A), è evidente che i rettangoli spariscono ancora, poichè essi avranno i medesimi moltiplicatori; arriveremo perciò ad un' equazione della forma

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 - 2Qx = 2Q'y - 2Q''z + F = 0.$$

Nel caso in cui la superficie non ha centro, bisogna che uno dei quadrati sparisca (*Vedi* Enumerazione delle superficia contenute nel second' ordine); e allora, spostando l' origine (*Vedi* Enumerazione suddetta), l'equazione di sopra si cangia nella seguente

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx,$$

la quale è, in coordinate ortogonali, simile all' equazioone (F) del numero citato, e che com' essa rappresenta tutta le superficie prive di centro.

Da questa medesima equazione, si vede che i piani attuali delle xy e delle xz sono piani principali, e che la linea delle x è un asse della superficie. Quest'asse è il solo che esista nella superficie. Infatti, i diametri delle paraboloidi essendo paralelli fra loro, se ci fosse un altr'asse, esso dovrebbe essere paralello alla linea delle x, e contenere i centri delle sezioni perpendicolari: ora è evidente che queste sezioni hanno i loro centri sopra l'asse attuale delle x.

Egualmente, i piani delle xy e delle xz sono, in generale, i soli piani principali della superficie. Osserviamo prima di tutto che i piani diametrali essendo paralelli alla linea delle x (n.° 56), le corde perpendicolari ad un piano principale debbono essere paralelle al piano attuale delle yz. Supponiamo quindi che si facciano, nella superficie, delle sezioni paralelle a questo piano, e che si conducano, in queste sezioni, delle corde paralelle; siccome queste sezioni (almeno quando P' è diversa da P'') sono ellissi o iperbole che hanno i loro centri sopra la linea delle x, e i loro assi paralelli, alle y e alle z, egli è evidente che un piano non può tagliare le corde paralelle perpendicolarmente nei loro mezzi, quando esse non siano paralelle alle y o alle z. Ora, nel primo caso, il piano principale coincidrebbe con quello delle xz; e nel secondo con quello delle xy.

Se si avesse $P''=P'$, le sezioni paralelle al piano delle yz sarebbero circoli, e allora qualunque piano condotto per l'asse delle x potrebbe esser preso per piano principale.

Casi nei quali vi sono un'infinità di piani principali. Condizioni perchè la superficie sia di rivoluzione.

68. Abbiamo detto (n.° 62) che una superficie del second'ordine ha alcune volte più di tre piani principali, a motivo dell'indeterminazione che può aver luogo nelle equazioni (2) del (n.° 60). Questo caso non può succedere, che quando un valore di λ, ricavato dall'equazione (3), renda indeterminata almeno una delle quantità δ e δ'. Supponiamo che lo sia δ: avremo nel medesimo tempo le due equazioni

$$(\lambda-A')B'+BB''=0,$$

$$(\lambda-A)(\lambda-A')-B^2=0.$$

Dall'una si ricava $\lambda=A'-\frac{BB''}{B'}$; e questo valore essendo sostituito nell'altra, viene

$$\left(A'-A-\frac{BB''}{B'}\right)\frac{BB''}{B'}+B^2=0,$$

ovvero, sotto un'altra forma,

$$A-\frac{BB'}{B''}=A'-\frac{BB''}{B'}\ldots\ldots(a):$$

prima equazione di condizione.

Se mettiamo il primo valore λ nelle tre equazioni (2), e che si eseguiscano le riduzioni che risultano dall'equazione (a), vedremo, che la seconda equazione

diventa identica colla prima, il che è conforme alle teorie dell'algebra. Non vi saranno perciò più di due equazioni, le quali sono

$$B'\delta+B''\delta'+\frac{B'B''}{B}=0 \ldots\ldots (1),$$

$$B'\delta+B''\delta'+\frac{BB''}{B'}+A''-A'=0 \ldots\ldots (2).$$

Perchè esse non siano contradittorie, bisogna che si abbia

$$A''-A'+\frac{BB''}{B'}=\frac{B'B''}{B},$$

ovvero

$$A'-\frac{BB''}{B'}=A''-\frac{B'B''}{B} \ldots\ldots (b)$$

seconda equazione di condizione

Quando le relazioni (a) e (b) avranno luogo, è evidente che vi sarà indeterminazione, poichè δ e δ' non saranno sottoposte che alla sola equazione (1), trovata di sopra.

Possiamo riprendere i ragionamenti precedenti, supponendo che δ' sia indeterminata. Allora porremo

$$(\lambda-A)B''+BB'=0, \qquad (\lambda-A)(\lambda-A')-B^2=0.$$

La prima di queste due eguaglianze dà il valore $\lambda=A-\frac{BB'}{B''}$, il quale in virtù della relazione (a), è eguale al valore λ, trovato di sopra.

In luogo di continuare i calcoli, basterà di cangiare pertutto, in quelli che precedono, δ in δ', A in A', B' in B'', e *viceversa*. Siccome così si riproduce l'equazione (1), si conclude che essa contiene tutti i casi d'indeterminazione che possono incontrarsi nella ricerca dei piani principali. Quanto alle equazioni (a) e (b), la prima resta la medesima, e la seconda diventa

$$A-\frac{BB'}{B''}=A''-\frac{B'B''}{B} \ldots\ldots (c).$$

Ma questa potendo dedursi dall'equazioni (a) e (b) non esprime veruna nuova condizione. Mandando via i denominatori, le condizioni (a), (b), (c) possono scriversi così:

$$(A-A')B'B''+B(B''^2-B'^2)=0 \ldots\ldots (a'),$$
$$(A'-A'')BB'+B''(B'^2-B^2)=0 \ldots\ldots (b'),$$
$$(A''-A)BB''+B'(B^2-B''^2)=0 \ldots\ldots (c).$$

69. Per l'analisi precedente, quando queste condizioni sono adempite, i valori di δ e δ', per le corde paralelle che sono perpendicolari ai loro piani diametrali coniugati, non sono più soggetti che alla sola equazione (1). Ora possiamo dare a quest'equazione la forma

$$\frac{B}{B''}\delta+\frac{B}{B'}\delta'+1=0 \ldots\ldots (3);$$

e allora si conclude (*Vedi* Applicazione dell'algebra alla geometria n.° 125) che le corde sono perpendicolari alla retta che ha per equazioni

$$x = \frac{B}{B''} z, \qquad y = \frac{B}{B'} z \ldots\ldots (4).$$

70. Le condizioni che rendono δ e δ' indeterminate sono ancora quelle che debbono aver luogo quando la superficie è di rivoluzione; e l' equazioni (4), che abbiamo trovate, sono quelle dell'asse di rivoluzione, o almeno di una paralella a quest'asse. Questo è quello che possiamo dimostrare in più maniere: sebbene la seguente sembri le più semplice.

Prendiamo delle coordinate rettangolari, e si prenda la linea delle x paralella alla retta delle equazioni (4). Una corda qualunque perpendicolare a questa retta avrà per equazioni $x = \rho$ e $y = \delta' z + \rho'$: cerchiamo il piano diametrale coniugato. Basta di fare $\delta = 0$ nell'equazione generale (4) del n.° 53; e con ciò essa diventa

$$(B\delta' + B')x + (A'\delta' + B'')y + (A'' + B''\delta')z + C'\delta' + C'' = 0.$$

Qualunque sia δ', essa deve rappresentare un piano principale, cioè un piano perpendicolare alle sue corde coniugate: dunque dobbiamo avere (*Vedi* Applicazione dell'algebra alla geometria n.° 139)

$$B\delta' + B' = 0, \quad A'\delta' + B'' = (A'' + B''\delta')\delta'.$$

Siccome δ' deve rimanere indeterminate, da ciò si conclude $B = 0$, $B' = 0$, $B'' = 0$, $A' = A''$; e per conseguenza l'equazione della superficie dev'essere

$$Ax^2 + A'(y^2 + z^2) + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0.$$

Adesso è evidente che facendo delle sezioni paralelle al piano delle yz, si ottengono dei circoli che hanno i loro centri sopra una medesima perpendicolare a questo piano, per conseguenza la superficie è di rivoluzione intorno di una paralella all'asse della x, e questo è ciò che bisognava dimostrare.

Il caso in cui A' sia zero pare faccia eccezione a ciò. Ma allorquando, all'articolo Superficie Curva stabiliremo sopra le medesime la conclusione generale, lo comprenderemo, osservando che allora la superficie è un cilindro parabolico che può considerarsi come prodotto dalla rotazione di una parabola intorno ad un asse paralello al suo piano, e situato ad una distanza infinita dal suo vertice.

71. Esaminiamo adesso alcuni casi particolari

1.° Sia $B = 0$. La condizione (b') si riduce a $B'^2 B'' = 0$, eguaglianza impossibile se B' e B'' sono differenti da zero; dunque allorquando un' equazione del secondo gredo fra tre coordinate rettangolari non ha perduto che un solo rettangolo, essa non può rappresentare una superficie di rivoluzione.

2.° Siano $B = 0$, $B' = 0$. Le equazioni (a') e (b') compariscono verificate: ma se si elimina fra loro il rapporto $\frac{B}{B'}$, si trova una condizione necessaria ancora a adempirsi. L'eguaglianze (a') e (b') danno

$$\frac{B}{B'} = \frac{(A' - A)B''}{B''^2 - B'^2}, \quad \frac{B}{B'}(A'' - A') + B''\left(\frac{B^2}{B'^2} - 1\right) = 0.$$

Facciamo $B' = 0$: ellora $\frac{B}{B'} = \frac{A' - A}{B''}$; e quindi, mettendo questo valore nel-

l'ultima eguaglianza, si trova facilmente la condizione

$$B''^2 = (A''-A)(A'-A) \ldots\ldots (d).$$

Quando essa è adempita, l'equazioni (4) della paralella all'asse di rivoluzione diventano

$$x = 0, \quad y = \frac{A'-A}{B''} z.$$

3.° Supponiamo inoltre $B''=0$. La relazione (d) esige che si abbia $A''=A$ o $A'=A$. Vale a dire che i coefficienti dei due quadrati debbono essere eguali. Egli è evidente infatti, che la superficie è allora di rivoluzione intorno una paralella ad uno degli assi delle coordinate.

PROPRIETÀ DEI DIAMETRI CONIUGATI.

72. Nelle superficie del second' ordine che hanno un centro, i diametri coniugati godono di un gran numero di proprietà che meritano una particolare attenzione. La perfetta analogia di alcune fra loro con quelle che si conoscevano già per l'ellisse e l'iperbola, bastava per farle scoprire: ma ve ne sono altre i cui enunziati erano interamente nuovi quando sono comparsi, e dei quali siamo debitori ai Signori J. BINET, PETIT et CHASLES. I limiti di questo Dizionario non permettono di esporli tutti, ci limiteremo perciò a quelli che meritano più degli altri di essere osservati.

La definizione medesima dei diametri coniugati (n.° 51) esige che l'equazione della superficie non contenga ciascuna variabile che al quadrato, quando vengono scelti questi diametri per assi delle coordinate. Così, prendendo l'equazione della superficie riferita ai suoi assi, effettuando la necessaria trasformazione per cangiare la direzione delle coordinate senza spostare l'origine, e stabilendo le condizioni che fanno sparire i rettangoli, avremo tutte le relazioni che esistono fra i diametri coniugati e gli assi.

Non parleremo che dell'ellissoide; ma sarà facile di trasportare alle iperboloidi le differenti proposizioni che stabiliremo. Basterà a ciò il prendere negativamente i quadrati degli assi immaginari e dei diametri immaginari; mentre tutte le dimostrazioni sussisteranno ancora facendo da pertutto questi cangiamenti

73. Si abbia l'equazione dell'ellissoide riferita ai suoi assi (*Vedi* ELLISSOIDE)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \ldots\ldots\ldots (p).$$

L'origine dovendo rimanere al centro, prenderemo le formule (*Vedi* TRASFORMAZIONE DELLE COORDINATE)

$$x = \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1,$$
$$y = \alpha'\, x_1 + \beta'\, y_1 + \gamma'\, z_1;$$
$$z = \alpha''\, x_1 + \beta''\, y_1 + \gamma''\, z_1,$$

nelle quali x_1, y_1, z_1, rappresentano le nuove coordinate; e α, α', α''; β, β', β''; γ, γ', γ'', i coseni degli angoli formati con gli assi primitivi, dalle linee delle x_1, delle y_1, e delle z_1.

sostituendo questi valori nell'equazione (p), viene un'equazione della forma

$$Ax_1^2 + A'y_1^2 + A''z_1^2 + 2Bx_1y_1 + 2B'x_1z_1 + 2B''y_1z_1 = 1;$$

e, perchè la superficie sia riferita ai diametri coniugati, bisognerà fare

$$B=0, \quad B'=0, \quad B''=0.$$

Nel medesimo tempo è facile di vedere, che se si chiamano a', b', c', le semi-lunghezze di questi diametri, si avrà

$$A=\frac{1}{a'^2}, \quad A'=\frac{1}{b'^2}, \quad A''=\frac{1}{c'^2}.$$

dimodochè l' equazione dell' ellissoide diventerà

$$\frac{x_1^2}{a'^2}+\frac{y_1^2}{b'^2}+\frac{z_1^2}{c'^2}=1 \ldots\ldots (p_1).$$

74. Le proprietà dei diametri coniugati, sono contenute nelle relazioni che esistono fra le quindici quantità a, b, c, a', b', c', α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ''.

Riuniamo qui tutte queste relazioni, che sono in numero di nove.

In primo luogo, i coseni α, α', α'', β .... sono sempre soggetti alle tre condizioni

$$\left.\begin{array}{l}\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1\\ \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1\\ \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1\end{array}\right\}\ldots\ldots (1)$$

Inseguito, se si sviluppano i calcoli per avere la quantità rappresentate da A, A', A''; B, B', B'', avremo par ciò che precede,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\alpha'^2}{b^2}+\frac{\alpha''^2}{c^2}=\frac{1}{a'^2}\\ \frac{\beta^2}{a^2}+\frac{\beta'^2}{b^2}+\frac{\beta''^2}{c^2}=\frac{1}{b'^2}\\ \frac{\gamma^2}{a^2}+\frac{\gamma'^2}{b^2}+\frac{\gamma''^2}{c^2}=\frac{1}{c'^2}\end{array}\right\}\ldots\ldots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\alpha\beta}{a^2}+\frac{\alpha'\beta'}{b^2}+\frac{\alpha''\beta''}{c^2}=0\\ \frac{\alpha\gamma}{a^2}+\frac{\alpha'\gamma'}{b^2}+\frac{\alpha''\gamma''}{c^2}=0\\ \frac{\beta\gamma}{a^2}+\frac{\beta'\gamma'}{b^2}+\frac{\beta''\gamma''}{c^2}=0\end{array}\right\}\ldots\ldots (3).$$

Ecco tutte le relazioni delle quali si tratta. Ma si presenta un'importante osservazione: e questa è che le equazioni (2) e (3) non sono altra cosa che l' equazioni (a) e (b) dimostrate all' articolo Trasformazione delle coordinate, nelle quali si sarebbe sostituito.

$$\begin{array}{lcccccccccc} & a, & a', & a'', & b, & b', & b'', & c, & c', & c'' \\ \text{con} & \frac{a'\alpha}{a}, & \frac{a'\alpha'}{b}, & \frac{a'\alpha''}{c}, & \frac{b'\beta}{a}, & \frac{b'\beta'}{b}, & \frac{b'\beta''}{c}, & \frac{c'\gamma}{a}, & \frac{c'\gamma'}{b}, & \frac{c'\gamma''}{c}. \end{array}$$

Da ciò segue che l'equazioni (c), (d), (e) del medesimo articolo citato qui sopra, debbono egualmente aver luogo, dopo che ci avremo fatti questi cangiamenti; vale a dire che si ha

$$\left.\begin{array}{l} a'^2\alpha^2+b'^2\beta^2+c'^2\gamma^2=a^2 \\ a'^2\alpha'^2+b'^2\beta'^2+c'^2\gamma'^2=b^2 \\ a'^2\alpha''^2+b'^2\beta''^2+c'^2\gamma''^2=c^2 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (4),$$

$$\left.\begin{array}{l} a'^2\alpha\alpha'+b'^2\beta\beta'+c'^2\gamma\gamma'=0 \\ a'^2\alpha\alpha''+b'^2\beta\beta''+c'^2\gamma\gamma''=0 \\ a'^2\alpha'\alpha''+b'^2\beta'\beta''+c'^2\gamma'\gamma''=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (5),$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{b'c'}{bc}(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')=\frac{a'\alpha}{a} \\ \frac{b'c'}{ac}(\gamma\beta''-\beta\gamma'')=\frac{a'\alpha'}{b} \\ \frac{b'c'}{ab}(\beta\gamma'-\gamma\beta')=\frac{a'\alpha''}{c} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6),$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a'c'}{bc}(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')=\frac{b'\beta}{a} \\ \frac{a'c'}{ac}(\alpha\gamma''-\gamma\alpha'')=\frac{b'\beta'}{b} \\ \frac{a'c'}{ab}(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')=\frac{b'\beta''}{c} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6),$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a'b'}{bc}(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')=\frac{c'\gamma}{a} \\ \frac{a'b'}{ac}(\beta\alpha''-\alpha\beta'')=\frac{c'\gamma'}{b} \\ \frac{a'b'}{ab}(\alpha\beta'-\beta\alpha')=\frac{c'\gamma''}{c} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (6),$$

$$\frac{a'b'c'}{abc}(\alpha\beta'\gamma''-\alpha\gamma'\beta''+\gamma\alpha'\beta''-\beta\alpha'\gamma''+\beta\gamma'\alpha''-\gamma\beta'\alpha'')=1 \ldots (6).$$

È stato permesso di non prendere, nell' equazioni (6), che i segni superiori. Ciò equivale a dare ad alcuni coseni, per esempio ad α, α', α'', certi segni piuttosto che gli opposti; ovvero ancora, il che è la medesima cosa, a prendere le x positive in un senso piuttosto che in un senso contrario. Ora, è evidente che questa restrizione non può escludere verun sistema di diametri coniugati.

75. Teorema I. *La somma dei quadrati dei diametri coniugati di un' ellissoide è costante ed eguale alla somma dei quadrati degli assi.*

Infatti, se si aggiungono l' equazioni (4), viene, avendo riguardo alle relazioni (1),

$$a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2.$$

Corollario. Se esistono, nell'ellissoide, diametri coniugati eguali, indicando uno di loro per $2a'$, avremo

$$a'=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Il luogo dell'estremità di tutti i diametri che hanno questa lunghezza è l'intersezione dell'ellissoide e della sfera concentrica descritta col raggio a': ora, proveremo che ciascuno di questi diametri appartiene ad un sistema di tre diametri coniugati eguali. Infatti, se prendiamo uno di questi diametri con due diametri coniugati qualunque $2b'$ e $2c'$ dell'ellisse situata nel piano diametrale coniugato del primo, si avranno tre diametri coniugati dell'ellissoide; dunque $a'^2+b'^2+c'^2=a^2+b^2+c^2$, e per conseguenza $b'^2+c'^2=\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$. Da ciò segue che scegliendo per b' e c' i semi-diametri coniugati eguali della sezione diametrale, avremo

$$b'=c'=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}:$$

vale a dire che allora a', b', c', sono tre diametri coniugati eguali, riportandoci la superficie, la sua equazione sarebbe la seguente.

$$x^2+y^2+z^2=a'^2,$$

che è simile a quella della sfera: ma qui le coordinate non sono rettangolari.

76. Teorema II. *La somma dei quadrati delle projezioni di tre diametri conjugati di un' ellissoide, sopra una retta fissa, è costante.*

Si chiami D la retta fissa, e δ, δ', δ'', gli angoli che essa fa con gli assi rettangolari delle x, y, z. Si moltiplichino l' equazioni (4) respettivamente per δ^2, δ'^2, δ''^2, e l' equazioni (5) respettivamente per $2\delta\delta'$, $2\delta\delta''$, $2\delta'\delta''$, quindi si aggiungano tutte insieme: viene

$$a'^2(\alpha\delta+\alpha'\delta'+\alpha''\delta'')^2+b'^2(\beta\delta+\beta'\delta'+\beta''\delta'')^2$$
$$+c'^2(\gamma\delta+\gamma'\delta'+\gamma''\delta'')^2=a^2\delta^2+b^2\delta'^2+c^2\delta''^2.$$

Ma per una formula conosciuta, (*Vedi* Applicazione dell' Algebra alla Geometria n.° 124) le quantità che moltiplicano a'^2, b'^2, c'^2 nel primo membro, sono i quadrati dei coseni degli angoli formati dai semi-diametri a', b', c', con la linea D; dunque,

$$a'^2\cos^2(a'D)+b'^2\cos^2(b'D)+c'^2\cos^2(c'D)=a^2\delta^2+b^2\delta'^2+c^2\delta''^2.$$

In questa eguaglianza, il primo membro è la somma dei quadrati delle projezioni di a', b', c', sopra la linea D; e il secondo è la somma dei quadrati delle projezioni di a, b, c, sopra la medesima linea: così il teorema enunziato rimane dimostrato.

Corollari. Supponiamo che la retta D sia stata condotta pel centro, che p, p', p'', siano le projezioni di a', b', c', sopra questa retta, e che q, q', q'', siano le perpendicolari abbassate dall' estremità di a', b', c', sopra questa medesima retta: è evidente che si avrà

$$a'^2+b'^2+c'^2=p^2+p'^2+p''^2+q^2+q'^2+q''^2.$$

In virtù dei teoremi I e II, le due somme $a'^2+b'^2+c'^2$ e $p^2+p'^2+p''^2$ sono costanti; qualunque sia la posizione dei diametri coniugati; dunque la somma $q^2+q'^2+q''^2$ lo è ancora. Le perpendicolari q, q', q'', possono considerarsi come le projezioni di a' b', c', sopra un piano qualunque; e p, p', p'', come le perpendicolari abbassate, dall' estremità di questi diametri, sopra un piano diametrale: dunque nell' ellissoide,

1.° La somma dei quadrati delle perpendicolari abbassate sopra un diametro fisso, dall' estremità di tre diametri coniugati, è costante.

2.° La somma dei quadrati delle projezioni di tre diametri coniugati, sopra un piano fisso, è costante.

3.° La somma dei quadrati delle perpendicolari abbassate sopra un piano diametrale, dall' estremità di tre diametri coniugati, è costante.

77. Teorema III. *La somma dei quadrati delle facce del paralellepipedo costruito sopra i diametri coniugati di un' ellissoide è costante.*

Nella dimostrazione di questo teorema e dei seguenti, indicheremo con x' y' z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', le coordinate rettangolari dell' estremità dei tre semi-diametri a', b', c',; con F, G, H, i paralellogrammi formati da b' e c', da a' e c', da a' e b'. Rappresenteremo ancora con f, f', f'', le projezioni di F sopra i piani delle yz, delle xz e delle xy; con g, g', g'', quelle di G; e con h, h' h'', quelle di H.

Premesso ciò, sia OBEC (*Tav.* XCVIII, *fig.* 5) il paralellogrammo formato con b' e c', e OB'C' la projezione del triangolo OBC sul piano delle yz: per mezzo della figura, con facilità troveremo,

$$f=2\mathrm{OB'C'}=y'''z'''-y''z''-(y'''-y'')(z'''+z'')=y''z'''-z''y'''.$$

Ma si ha

$$\begin{array}{lll} x'=a'\alpha, & y'=a'\alpha', & z'=a'\alpha'', \\ x''=b'\beta, & y''=b'\beta', & z''=b'\beta'', \\ x'''=c'\gamma, & y'''=c'\gamma', & z'''=c'\gamma''; \end{array}$$

dunque $f=b'c'(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')$, ovvero, in virtù della prima equazione (6)

$$f=\frac{bc}{a}a'\alpha.$$

Si troverebbe similmente, per le projezioni f' ed f'',

$$f'=\frac{ac}{b}a'\alpha', \quad f''=\frac{ab}{c}a'\alpha''.$$

Ora, si sa (*Vedi* Projezioni), che il quadrato di un' area piana è eguale alla somma dei quadrati delle sue projezioni sopra tre piani rettangolari; dunque $F^2=f^2+f'^2+f''^2$, ovvero

$$F^2=\frac{b^2c^2}{a^2}a'^2\alpha^2+\frac{a^2c^2}{b^2}a'^2\alpha'^2+\frac{a^2b^2}{c^2}a'^2\alpha''^2.$$

Egualmente, considerando i paralellogrammi G ed H, dobbiamo avere

$$G^2=\frac{b^2c^2}{a^2}b'^2\beta^2+\frac{a^2c^2}{b^2}b'^2\beta'^2+\frac{a^2b^2}{c^2}b'^2\beta''^2,$$

$$H^2=\frac{b^2c^2}{a^2}c'^2\gamma^2+\frac{a^2c^2}{b^2}c'^2\gamma'^2+\frac{a^2b^2}{c^2}c'^2\gamma''^2.$$

Dunque, aggiungendo le tre ultime equazioni, e riducendo per mezzo dell' eguaglianze (4), si ottiene

$$F^2+G^2+H^2=b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2;$$

e da ciò risulta il teorema enunziato.

78. Teorema IV. *Se si praiettano sopra un piano fisso le facce del paralellepipedo costruito sopra tre diametri coniugati dell' ellissoide, la somma dei quadrati delle projezioni sarà costante.*

Siano F', G', H', le projezioni dei paralellogrammi F, G, H, sopra un piano fisso, e δ, δ', δ'', i coseni degli angoli di questo piano con i piani delle yz, delle xz e delle xy. Rammenteremo che, per praiettare un'area piana sopra un piano dato, possiamo proiettarla prima sopra tre piani rettangolari, e proiettare quindi le tre projezioni sul piano dato (*Vedi* Paojaziane). Segue da ciò, che avremo

$$F'=f\delta+f'\delta'+f''\delta''=\frac{bc\delta}{a}a'\alpha+\frac{ac\delta'}{b}a'\alpha'+\frac{ab\delta''}{c}a'\alpha'',$$

$$G'=g\delta+g'\delta'+g''\delta''=\frac{bc\delta}{a}b'\beta+\frac{ac\delta'}{b}b'\beta'+\frac{ab\delta''}{c}b'\beta'',$$

$$H'=h\delta+h'\delta'+h''\delta''=\frac{bc\delta}{a}c'\gamma+\frac{ac\delta'}{b}c'\gamma'+\frac{ab\delta''}{c}c'\gamma''.$$

Elevando al quadrato, aggiungendo, e riducendo con l'aiuto delle equazioni (4) e (5). viene

$$F'^2+G'^2+H'^2=b^2c^2\delta^2+a^2c^2\delta'^2+a^2b^2\delta''^2,$$

risultamento che contiene il teorema da dimostrare.

79. Teorema V. *Il volume del paralellepipedo costruita sopra tre diametri coniugati di un' ellissoide, è costante ed eguale al paralellepipedo costruito con gli assi.*

Questo paralellepipeda, che chiameremo V, è eguale a sei volte la piramide triangolare, formata con i semi-diametri a', b', c'. Siano OF, OG, OH (*Tav.* XCVIII, *fig.* 6) questi semi-diametri, le di cui estremità F, G, H, hanno per coordinate x', y', z', ec. Cerchiamo in primo luogo il volume della piramide OFGH in funzione di queste coordinate. A quest' effetto, si abbassino le perpendicolari FP, GQ, HR, sul piano delle xy, e si compiscano le costruzioni indicate sopra la figura. Allora facendo attenzione ai quattro solidi PQRHFG, OPQGFO, OPRHFO, OQRHGO; vedremo che la piramide OFGH è eguale alla somma dei due primi, meno quella dei due ultimi. Questi quattro solidi si possano considerare come prismi triangolari troncati, e per conseguenza, si ha

$$PQRHFG=\tfrac{1}{3}PQR.(z'+z''+z'''),\qquad OPQGFO=\tfrac{1}{3}OPQ.(z'+z''),$$

$$OPRHFO=\tfrac{1}{3}OPR.(z'+z'''),\qquad OQRHGO=\tfrac{1}{3}OQR.(z''+z''');$$

dunque, per la piramide OFGH, si ha

$$OFGH=\tfrac{1}{3}PQR.(z'+z''+z''')+\tfrac{1}{3}OPQ.(z'+z'')-\tfrac{1}{3}OPR.(z'+z''')$$
$$-\tfrac{1}{3}OQR.(z''+z''').$$

$$=\tfrac{1}{3}z'(PQR+OPQ-OPR)+\tfrac{1}{3}z''(PQR+OPQ-OQR)$$
$$+\tfrac{1}{3}z'''(PQR-OPR-OQR).$$

Il solo esame della figura basta per indicare le riduzioni, e viene

$$OFGH = \tfrac{1}{2} z' . OQR + \tfrac{1}{2} z'' . OPR - \tfrac{1}{2} z''' . OPQ.$$

Ma facilmente dalla figura vediamo, che

$$OQR = \tfrac{1}{2}[x''y''' - x''y'' - (y''+y''')(x'''-x'')] = \tfrac{1}{2}(x''y''' - y''x'''),$$
$$OPR = \tfrac{1}{2}[x'y' + (y'+y''')(x'''-x') - x'''y'''] = \tfrac{1}{2}(y'x''' - x'y'''),$$
$$OPQ = \tfrac{1}{2}[x'y' + (y'+y'')(x''-x') - x''y''] = \tfrac{1}{2}(y'x'' - x'y'').$$

Sostituendo questi valori in OFGH, e moltiplicando per 6 per avere V, fatto tutti i calcoli, si trova

$$V = x'y''z''' - x'z''y''' + z'x''y''' - y'x''z''' + y'z''x''' - z'y''x'''.$$

Finalmente, invece di x', y', z' . . . . sostituendoci i valori trovati (n.° 77), viene

$$V = a'b'c'(\alpha\beta'\gamma'' - \alpha\gamma'\beta'' + \beta\gamma'\alpha'' - \beta\alpha'\gamma'' + \gamma\alpha'\beta'' - \gamma\beta'\alpha'');$$

e, a motivo dell' ultima equazione (6),

$$V = abc,$$

risultamento conforme all' enunciato.

80. Nelle paraboloidi, tutti i diametri sono paralelli fra loro; per conseguenza, non bisogna cercare in queste superficie un sistema di tre diametri coniugati. D'altra parte, se ve ne esistessero, si potrebbe mettere l' equazione di queste superficie sotto la forma

$$Px^2 + P'y^2 + P''z^2 = H;$$

e, mediante ciò, esse avrebbero un centro, il che è impossibile: Ma possiamo trovare un' infinità di piani diametrali coniugati due a due, vale a dire tali che le corde divise in parti eguali da uno di loro siano paralelle all' altro. Infatti per quello che abbiamo detto, ni. 46 e 47, esistono un'infinità di sistemi di coordinate che possono dare un' equazione della forma

$$P'y^2 + P''z^2 = 2Qx$$

ed allora è evidente, che i piani delle xy e delle xz sono piani diametrali coniugati, e che la linea delle x è un diametro.

Chiunque volesse conoscere le ingegnose ricerche del Signore Chasles sopra le superficie del second' ordine, ricerche che ci hanno somministrato molte nuove proposizioni, le quali meritano una particolare attenzione a motivo della loro gran generalità, deve consultare la *Correspondance sur l' École Polytechnique* de M. Hachette, les *Annales* de M. Gergonne, et la *Correspondance mathématique et physique* de M. Quetelet.

Per completare poi tutto ciò, che ha relazione con la parola *diametro*, si potranno consultare in questo Dizionario gli articoli Normale, Piano, Superficie, Tangenta ec. Quanto ancora le opere Monge *Application de l' analyse à la Géométrie*; Le Roy *Analyse appliquée à la Géométrie des trois dimensions*, Paris, 1834; Le Fabure de Fourcy, *Leçons de Géométrie analytique*, Paris, 1838; ec. ec.

DIAMETRO dei pianeti (*Astron.*). I diametri dei pianeti sono o *reali* o *apparenti*. Il diametro apparente di un pianeta è l' angolo sotto il quale esso apparisce agli osservatori prendendo per raggio la distanza del pianeta dalla terra;

vale a dire conducendo dall'occhio dei raggi visuali a due punti opposti del disco di un pianeta: l'angolo formato da questi raggi, e di cui il diametro del pianeta è la corda, forma ciò che dicesi il *diametro apparente*. Quest'angolo essendo piccolissimo, si può considerare la corda come confusa con l'arco o come formante la sua misura. Così i diametri apparenti di uno stesso pianeta sono in ragione inversa delle sue distanze dalla terra, poichè è evidente che questi diametri debbono comparire tanto più grandi quanto sono più piccole le distanze.

Il *diametro reale* di un pianeta è la sua vera grandezza misurata per mezzo di una grandezza nota, come il metro, o paragonata col diametro della terra.

I diametri apparenti servono a trovare i diametri reali, quando sono note le distanze; il che faremo vedere alla parola Distanza.

La distanza dei pianeti dalla terra variando ad ogni istante in conseguenza dei movimenti proprj di questi corpi, variano pure i loro diametri apparenti, ma queste variazioni hanno luogo dentro certi limiti di cui ecco il medio:

Diametri medj apparenti

Sole	32' 2''
Mercurio	11,8
Venere	57,9
Marte	8,94
Giove	39
Saturno	18
Urano	3,54
Luna	31'

I diametri reali, prendendo per *unità* quello della terra, sono i seguenti:

Diametri reali

Sole	109,9300
Mercurio	0,3944
Venere	0,9730
Marte	0,5556
Giove	11,5616
Saturno	9,6094
Urano	4,2630
Luna	0,2729

Basta dunque moltiplicare questi numeri pel valore del diametro della terra espresso in leghe o in metri, per conoscere i diametri dei pianeti espressi in misure simili. Il diametro della terra preso all'equatore è di 12754863 metri.

DIAZ (Emanuele); dotto gesuita e missionario portoghese, nato nel 1590 ad Alpalham. Coltivò con successo le matematiche, ed ebbe luogo di osservare a Corhin la cometa del 1618, nella quale occasione scrisse la seguente opera: *Tractatus contra eos qui putant cometas esse sublunares et elementares*. Morì il 13 Novembre 1630 per le fatiche sofferte in un viaggio da lui intrapreso per penetrare nel regno del Tibet.

DICEMBRE. Questo mese ritiene tuttora il nome che aveva nel calendario albano e nell'antico calendario romano, nei quali era il decimo, come abbastanza indica il suo nome, cioè l'ultimo dell'anno. Allorchè il numero dei mesi fu portato a dodici, esso conservò il nome che gli era stato assegnato, quantunque in

ordine divenisse il dodicesimo. Il solstizio d'inverno ha luogo verso il 21 di questo mese: il sole entra allora nel Capricorno.

Il mese di Dicembre era anticamente consacrato a Saturno e comprendeva trentacinque giorni nel calendario albano, Romolo lo ridusse a trenta e Numa a ventinove. Giulio Cesare gli restituì il giorno che gli aveva tolto Numa, e Augusto vi aggiunse di più un altro giorno che ancora conserva. Commodo, che secondato dai suoi adulatori, cercò di variare i nomi di alcuni mesi, diede a questo mese il nome di *Amazonio*, in onore della sua concubina Marzia, che si dilettava di andar vestita in abito di amazone. Si consulti Pitisco, *Lexicon antiquitatum romanarum*, Venezia, 1719, 3 vol. in-fol.; Court de Gebelin, *Allegories orientales*, Parigi, 1773, in-4; Brady, *Clavis Calendaria*; Grevio, *Thesaurus antiquitatum romanarum*.

DICOTOMIA (*Astron.*). Di questa parola, che deriva dalle voci greche δὶς, *due volte* e τομος, *parte*, si servono gli astronomi per esprimere quella fase della luna nella quale essa è divisa in due parti eguali, o in cui non si vede illuminata che l'esatta metà del suo disco.

Il momento della dicotomia della luna è stato impiegato per determinare la distanza del sole dalla terra da Aristarco di Samo, circa 260 anni prima dell'era volgare: questo metodo, estremamente ingegnoso, ma poco suscettibile di esattezza per la difficoltà di cogliere l'istante in cui la luce è terminata da una linea retta, si trova descritto nell'*Astronomia* di Lalande. Si veda pure il *Trattato di Astronomia* di Delambre, cap. 25.

DICQUEMARE (Giacomo Francesco), professore di fisica e di storia naturale all'Havre, nato in questa città il 7 Marzo 1733. L'indole di questo Dizionario non ci permette di entrare a parlare delle importanti scoperte da lui fatte nella storia naturale: diremo soltanto che tale scienza non occupava sola tutto il suo tempo, e che si applicò ancora alla geografia, all'astronomia e alla nautica. Rifinito da un lavoro troppo assiduo, Dicquemare morì il 29 Marzo 1789. Tra le sue opere non citeremo che le seguenti: *Idée générale de l'astronomie*, Parigi, 1769, in-8; quest'opera è stata ristampata con parecchie aggiunte e correzioni col titolo di *Connaissance de l'astronomie mise à la portée de tout le monde*, Parigi, 1771, in-8; ivi, 1828, in-8; Il *Description du cosmoplane inventé et construit par l'abbé Dicquemare et dédié à l'abbé Nollet*, Parigi, in-4. Tale strumento di geografia e di cosmografia, composto di due piastre di cui l'una gira concentricamente all'altra e che ha venti pollici di diametro, serve a risolvere quasi tutti i problemi di astronomia nautica ma con poca precisione.

DIFETTIVO (*Aritm.*). Un numero difettivo è la medesima cosa che un *numero deficiente*. *Vedi* questa parola.

DIFETTIVO. (*Geom.*). Il Newton ha dato il nome d'*iperbole difettive* alle curve del terz'ordine, le quali non hanno che un solo asintoto. *Vedi Iperbola*.

DIFFERENZA (*Aritm.*, e *Alg.*). Eccesso di grandezza di una quantità sopra di un'altra, ossia quello che rimane quando si sottrae una quantità da un'altra quantità. Per esempio, la differenza fra 8 e 5 è 3; e in generale la differenza fra a e b è $a-b$, quantità che può esser positiva o negativa secondo che $b<a$ o $b>a$. *Vedi* Algebra.

Calcolo delle differenze. Uno dei rami fondamentali della scienza generale dei numeri. *Vedi* Matematiche.

1. Il calcolo delle differenze considerato in tutta la sua generalità, cioè abbracciando il calcolo differenziale, ha per oggetto le leggi della variazione delle quantità.

Per variazione, s'intende l'aumento o la diminuzione di grandezza che prova una funzione qualunque composta di quantità variabili, allorquando si aumentano o si diminuiscono queste variabili.

2. Per fissare l'idee, consideriamo ciò che diventa la funzione semplice ax, facendo crescere x di una quantità qualunque m; si ha allora

$$a(x+m) \text{ ovvero } ax+am,$$

così la funzione ax ha ricevuto un accrescimento am in seguito dell'aumentazione provata da x. Se al contrario si fosse diminuito x della medesima quantità m, ax sarebbe diventata

$$a(x-m) \text{ ovvero } ax-am,$$

e per conseguenza la funzione ax avrebbe provato una diminuzione am, corrispondente alla diminuzione m di x. Ora questa variazione am, in più o in meno, è ciò che in generale si chiama DIFFERENZA della funzione ax.

3. Si abbia egualmente $a+bx^2$ per un'altra funzione della variabile x; indicandola con y, avremo l'espressione

$$y=a+bx^2$$

ed è evidente che facendo variare x, y proverà una variazione corrispondente. Indichiamo con y' ciò che diventa y quando si aumenta x di una quantità n, avremo

$$y'=a+b(x+n)^2,$$

ma la variazione subita da y per divenire y', o $y'-y$, è

$$[a+b(x+n)^2]-[a+bx^2],$$

vale a dire

$$a+bx^2+2bnx+bn^2-a-bx^2=2bnx+bn^2.$$

Così $2bnx+bx^2$ è l'accrescimento o la *differenza* della funzione y.

4. In generale, φx essendo una funzione qualunque di x, se indichiamo con Δx l'accrescimento che si fa subire alla variabile x e con $\Delta\varphi x$ l'accrescimento che ne risulta per la funzione φx, avremo

$$\Delta\varphi x=\varphi(x+\Delta x)-\varphi x,$$

e, se invece di far variare x in *più*, si fosse fatto variare in *meno*, avremmo avuto

$$\Delta\varphi x=\varphi x-\varphi(x-\Delta x).$$

5. φx essendo una funzione qualunque della sola variabile x, se l'indichiamo con y avremo l'espressione

$$y=\varphi x,$$

e potremo allora considerare y come un'altra variabile, ma le di cui variazioni dipendono da quelle di x. Si dice allora che y è una *variabile dipendente*, nel mentre che si chiama x una *variabile indipendente*.

6. Gli accrescimenti che si fanno subire alle variabili possono considerarsi come quantità reali o ideali, vale a dire, come quantità finite ovvero infinitamente piccole; nel primo caso il calcolo delle differenze prende il nome di CALCOLO DELLA DIFFERENZE FINITE, e nel secondo, quello di CALCOLO DIFFERENZIALE. Esporremo in questo punto le leggi generali di questi calcoli, e le loro più importanti applicazioni, quindi getteremo un colpo d'occhio sopra l'istoria della loro introduzione nella scienza e sopra le diverse considerazioni metafisiche alle quali essi hanno dato luogo.

7. CALCOLO DELLE DIFFERENZE FINITE. La *differenza* di una funzione essendo

la variazione che prova, allorchè si fanno crescere o diminuire le quantità variabili che essa contiene, la regola generale per trovare questa differenza è perciò di sottrarre la funzione primitiva dalla funzione variata, ed è con questo metodo che abbiamo trovato di sopra

$$\Delta\varphi x = \varphi(x+\Delta x) - \varphi x,$$

ovvero.

$$\Delta\varphi x = \varphi x - \varphi(x-\Delta x),$$

prendendo l'accrescimento negativo.

Risulta da questa costruzione, che per ottenere la differenza di una quantità composta, tale come $A+Bx$, nella quale A e B sono quantità costanti ed x una quantità variabile, basta far variare il termine che contiene x, vale a dire, che si ha

$$\Delta(A+Bx) = B\Delta x,$$

poichè la quantità A non ricevendo veruno accrescimento, sparisce quando si sottrae la funzione primitiva della funzione variata; infatti si ha

$$\begin{aligned}\Delta(A+Bx) &= (A+B(x+\Delta x)) - (A+Bx)\\ &= A+Bx+B\Delta x - A - Bx\\ &= B\Delta x.\end{aligned}$$

Si avrebbe per la medesima ragione

$$\Delta[A+Bx+Cy] = B\Delta x + C\Delta y,$$

e così in seguito in tutti i casi simili.

È facile vedere che in generale la differenza di un seguito di termini tale come

$$\varphi x + \varphi' y + \varphi'' z + \text{ec.},$$

φx, $\varphi' y$, $\varphi'' z$ indicando delle funzioni qualunque delle variabili x, y, z, si trova prendendo la differenza di ciascun termine, ossia si ha

$$\Delta[\varphi x + \varphi' y + \varphi'' z + \text{ec.}] = \Delta\varphi x + \Delta\varphi' y + \Delta\varphi'' z + \text{ec.}$$

8. $\Delta\varphi x$ indicando sempre l'accrescimento o la diminuzione provata da φx, quando si aumenta o si diminuisce la variabile x della quantità Δx, possiamo considerare questa quantità $\Delta\varphi x$ come una nuova funzione di x, che può ammettere ancora un'accrescimento o una diminuzione corrispondente a quello della variabile x. Così, supponendo ancora che x cresca della medesima quantità Δx si avrebbe dopo l'accrescimento

$$\Delta\varphi(x+\Delta x),$$

e la variazione corrispondente della funzione $\Delta\varphi x$, o la *differenza* di questa funzione sarebbe

$$\Delta(\Delta\varphi x) = \Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi x.$$

La *differenza* di $\Delta\varphi x$ o $\Delta(\Delta\varphi x)$, si esprime per $\Delta^2\varphi x$, ed è ciò che si chiama la *differenza seconda* della funzione φx.

9. Si ha dunque per la *differenza seconda* di φx, l'espressione

$$\Delta^2\varphi x = \Delta\varphi(x+\Delta x) - \Delta\varphi x.$$

Sostituendo il valore di $\Delta\varphi x$ o $\varphi(x+\Delta x)-\varphi x$, quest' espressione diviene

$$\Delta^2\varphi x = \Delta\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x+\Delta x)+\varphi x,$$

ma abbiamo ancora dall' espressione generale del o.° 4

$$\Delta\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x+2\Delta x)-\varphi(x+\Delta x).$$

Adunque la differenza seconda è

$$\Delta^2\varphi x=\varphi(x+2\Delta x)-2\varphi(x+\Delta x)+\varphi x.$$

10. Considerando di nuovo $\Delta^2\varphi x$, come una nuova funzione di x, la sua differenza $\Delta(\Delta^2\varphi x)$ o $\Delta^3\varphi x$ sarà la *differenza terza* di φx, e per quello che precede avremo

$$\Delta^3\varphi x=\Delta^2\varphi(x+\Delta x)-\Delta^2\varphi x.$$

Ma dal n.° 9 si ha

$$\Delta^2\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x+3\Delta x)-2\varphi(x+2\Delta x)+\varphi(x+\Delta x),$$

$$\Delta^2 x=\varphi(x+2\Delta x)-2\varphi(x+\Delta x)+\varphi x,$$

così, sostituendo, troveremo

$$\Delta^3\varphi x=\varphi(x+3\Delta x)-3\varphi(x+2\Delta x)+3\varphi(x+\Delta x)-\varphi x.$$

11. Seguitando il medesimo metodo si troverebbe, per la *differenza quarta* di φx l' espressione.

$$\Delta^4\varphi x=\varphi(x+4\Delta x)-4\varphi(x+3\Delta x)+6\varphi(x+2\Delta x)$$
$$-4\varphi(x+\Delta x)+\varphi x$$

12. Da quello che precede, osservando che i coefficienti numerici di questi sviluppi sono i medesimi che quelli del binomio del Newton, possiamo concludere per analogia, che la *differenza m^{sima}* della funzione φx deve avere per espressione generale.

$$\Delta^m\varphi x=\varphi(x+m\Delta x)-m\varphi(x+(m-1)\Delta x)+$$
$$\frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+(m-2)\Delta x)-\text{ec.}\ldots\ldots(-1)^m\varphi x,$$

l' ultimo termine φx avendo il segno + quando m è pari, e il segno — quando è impari.

Rovesciando quest' espressione possiamo darle la forma più comoda

$$\Delta^m\varphi x=(-1)^m\Big[\varphi x-m\varphi(x+\Delta x)+\frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+2\Delta x)$$
$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\varphi(x+3\Delta x)$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\varphi(x+4\Delta x)$$
$$-\text{ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]$$

13. Per dare una dimostrazione generale di questa legge, basta provare che essa è vera per la differenza dell' ordine $m+1$; supponendola vera per la differenza dell' ordine m; mentre è evidente che poichè essa si verifica facendo $m=4$, ne risulterà che essa è egualmente vera per $m=5$, e quindi per tutti i valori interi di m.

Ora, indicando, per abbreviare con i l' accrescimento Δx della variabile x, questa legge è

$$\Delta^m \varphi x = (-1)^m \left[\varphi x - m\varphi(x+i) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+2i) - \text{ec.}\ldots \right] \ldots (a).$$

Prendendo la *differenza* dai due membri di quest' eguaglianza, si ha

$$\Delta(\Delta^m \varphi x) = (-1)^m \left[\varphi(x+i) - m\varphi(x+2i) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+3i) - \text{ec.}\ldots\ldots \right]$$

$$-(-1)^m \left[\varphi x - m\varphi(x+i) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x+2i) - \text{ec.}\ldots\ldots \right]$$

Ovvero, effettuando l' addizione dei coefficienti delle medesime funzioni,

$$\Delta^{m+1}\varphi x = (-1)^{m+1}.\left[\varphi x - (m+1).\varphi(x+i) + \left(m + \frac{m(m-1)}{1.2} \right).\varphi(x+2i) - \right.$$

$$-\left(\frac{m(m-1)}{1.2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \right)\varphi(x+3i) +$$

$$\left. + \left(\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \right).\varphi(x+4i) - \ldots \text{ec.} \right]$$

il che riducesi a

$$\Delta^{m+1}\varphi x = (-1)^{m+1}.\left[\varphi x - (m+1).\varphi(x+i) + \frac{(m+1)m}{1.2}\varphi(x+2i) - \right.$$

$$\left. - \frac{(m-1)m(m-2)}{1.2.3}\varphi(x+3i) + \text{ec.} \right] \ldots (b).$$

Mentre, servendoci per abbreviare della notazione delle fattorielle, si ha in generale, p essendo un numero intero qualunque

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots p} = \frac{m^{\underline{p|-1}}}{1^{\underline{p|-1}}}$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-p)}{1.2.3.4\ldots\ldots(p+1)} = \frac{m^{\underline{p+1|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}$$

Ma riducendo al medesimo denominatore,

$$\frac{m^{\underline{p|-1}}}{1^{\underline{p|1}}}+\frac{m^{\underline{p+1|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}=\frac{(p+1)m^{\underline{p|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}+\frac{m^{\underline{p+1|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}$$

$$=\frac{(p+1)m^{\underline{p|-1}}+(m-p)m^{\underline{p|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}$$

$$=\frac{(m+1).m^{\underline{p|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}$$

$$=\frac{(m+1)^{\underline{p+1|-1}}}{1^{\underline{p+1|1}}}$$

espressione che, facendo successivamente $p=0$, $p=1$, $p=2$, ec., dà i coefficienti di (b), cioè:

$$(m+1),\ \frac{(m+1)m}{1.2},\ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3},\ \text{ec.}\ldots.$$

Ora, l'espressione (b) è ciò che diventa (a), quando facciamo $m=m+1$; così basta che la legge (a) sia vera per un valore qualunque di m, perchè essa sia vera in generale.

14. Allorquando l'accrescimento della variabile è negativo, la legge di sopra diventa

$$\Delta^m\varphi x=\varphi x-m.\varphi(x-i)+\frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x-2i)-\text{ec.}\ldots$$

il che si deduce senza difficoltà.

15. Fx e fx essendo due funzioni differenti di una medesima variabile x, la differenza del suo prodotto, o

$$\Delta(Fx.fx)$$

si troverà facilmente da quello che precede, poichè dalla concezione generale delle differenze, si ha

$$\Delta(Fx.fx)=F(x+\Delta x).f(x+\Delta x)-Fx.fx,$$

ora

$$F(x+\Delta x)=Fx+\Delta Fx,$$
$$f(x+\Delta x)=fx+\Delta fx$$

e per conseguenza

$$F(x+\Delta x).f(x+\Delta x)=Fx.fx+fx.\Delta Fx+Fx.\Delta fx+\Delta Fx.\Delta fx,$$

dunque

$$\Delta(Fx.fx)=Fx.\Delta fx+\Delta fx.\Delta Fx+fx.\Delta Fx.$$

La *differenza seconda* del medesimo prodotto si otterrebbe nella medesima maniera. Questa differenza è

$$\Delta^2(Fx.fx)=Fx.\Delta^2fx+2\Delta Fx.\Delta fx+\Delta^2Fx.fx$$
$$+2\Delta Fx.\Delta^2fx+2\Delta^2Fx.\Delta fx$$
$$+\Delta^2Fx.\Delta^2fx.$$

In generale, p, essendo un indice qualunque, si ha

$$\Delta^p(Fx.fx)=Fx\Delta^p fx+p\Delta Fx\,[\Delta^{p-1}fx+\Delta^p fx]$$

$$+\frac{p(p-1)}{1.2}.\Delta^2 Fx\,[\Delta^{p-2}fx+2\Delta^{p-1}fx+\Delta^p fx]$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}.\Delta^3 Fx\,[\Delta^{p-3}fx+3\Delta^{p-2}fx+3\Delta^{p-1}fx+\Delta^p fx]$$

$$+\text{ec}\ .\ (c),$$

Questa legge che, nei casi degli accrescimenti *negativi*, diventa

$$\Delta^p(Fx.fx)=Fx\Delta^p fx+p\Delta Fx[\Delta^{p-1}fx-\Delta^p fx]$$

$$+\frac{p(p-1)}{1.2}.\Delta^2 Fx[\Delta^{p-2}fx-2\Delta^{p-1}fx+\Delta^p fx]$$

$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}\Delta^3 Fx[\Delta^{p-3}fx-3\Delta^{p-2}fx+3\Delta^{p-1}fx+\Delta^p fx]$$

$$+\text{ec.}\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

è la legge fondamentale della teoria delle differenze. La sua dimostrazione generale può eseguirsi col metodo che abbiamo adoperato al n.° 12.

16. In questo punto dobbiamo fare osservare che il calcolo delle differenze non ha solamente per scopo di trovare le differenze delle quantità date, ma che esso deve ancora poter risalire da queste differenze alle funzioni dalle quali esse derivano, quando le prime solamente sono conosciute. Questa distinzione divide questo calcolo in due rami il primo dei quali considera le *differenze dirette*, o le differenze propriamente dette, e il secondo le *differenze inverse*, ossia le somme.

Così, $\Delta\varphi x$ essendo la differenza diretta di φx, reciprocamente φx è la differenza inversa o la *somma* di $\Delta\varphi x$.

S'indicano le differenze inverse con la caratteristica Σ; dimodochè per esprimere che φx è la somma di $\Delta\varphi x$: si scrive

$$\varphi x=\Sigma\,[\Delta\varphi x]$$

17. Siccome vi sono differenze di più ordini, vi sono egualmente somme di più ordini, per esempio

$$\Sigma^2\,[\Delta^2\varphi x]$$

indica la *somma seconda* di $\Delta^2\varphi x$. In generale Σ^m è la caratteristica della *somma dell'ordine* m.

18. Per risalire da una differenza qualunque alla funzione primitiva, è evidente che bisogna prendere la somma del medesimo ordine, e che si ha

$$\Sigma^m[\Delta^m\varphi x]=\varphi x$$

19. Una funzione qualunque di una variabile essendo data, se si considera questa funzione come la differenza di un' altra funzione incognita, il problema di trovare quest'ultima è dunque lo scopo del *calcolo delle differenze inverse*. Così Fx essendo la funzione data, trovare la somma di Fx o ΣFx, equivale a trovare un'altra funzione fx tale che, si abbia

$$Fx=\Delta fx$$

Se sempre è facile di trovare le *differenze* di una quantità data, non segue il medesimo delle *somme*; ma non è questo il luogo per occuparci di questo problema, che forma lo scopo generale del calcolo delle *differenze inverse*, ossia del Calcolo Integrale.

20. Si considerano ancora le *somme* come *differenze di un ordine negativo*, vale a dire che si ammette la medesima significazione alle caratteristiche Σ^p e Δ^{-p}, in questa maniera

$$\Sigma^m \varphi x \quad e \quad \Delta^{-p} \varphi x$$

sono espressioni identiche

Se nelle leggi (*a*) e (*c*), si fa l'indice negativo, esse si applicano immediatamente alle *somme*. La prima non considerando che gli accrescimenti negativi, che è il caso più semplice, diventa

$$\Sigma^m \varphi x = \varphi x + m\varphi(x-i) + \frac{m(m+1)}{1.2}\varphi(x-2i) +$$

$$+ \frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\varphi(x-3i) + \text{ec.} \ldots\ldots (d),$$

e la seconda

$$\Sigma^m(Fx.fx) = Fx.\Sigma^m fx - m\Delta Fx[\Sigma^{m+1}fx - \Sigma^m fx]$$

$$+ \frac{m(m+1)}{1.2}.\Delta^2 Fx[\Sigma^{m+2}fx - 2\Sigma^{m+1}fx +$$

$$+ \Sigma fx^m - \text{ec.} \ldots\ldots] \ldots\ldots (e).$$

21. Con alcuni esempi faremo conoscere l'applicazione di queste formule. Indicando i sempre l'accrescimento della variabile x, proponiamoci di trovare le differenze successive della quantità x^n,

La prima differenza, o Δx^n sarà

$$\Delta x^n = (x+i)^n - x^n,$$

sviluppando il binomio $(x+i)^n$

$$\Delta x^n = nx^{n-1}i + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^{n-3}i^3 + \text{ec.} \ldots$$

Per ottenere la differenza seconda, poichè per la legge (*a*), si ha

$$\Delta^2 \varphi x = \varphi x - 2\varphi(x+i) + \varphi(x+2i)$$

facendo $\varphi x = x^n$, otterremo

$$\Delta^2 x^n = x^n - 2(x+i)^n + (x+2i)^n,$$

ovvero, sviluppando i binomi,

$$\Delta^2 x^n = x^n$$

$$- 2x^n - 2nx^{n-1}i - 2\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 - \text{ec.}$$

$$+ x^n + 2nx^{n-1}i + 4\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}i^2 + \text{ec.}$$

e riducendo

$$\Delta^2 x^n = n(n-1)x^{n-2}i^2 + 6\,\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,x^{n-3}i^3 + \text{ec.}$$

Si troverebbe egualmente per la *terza differenza*

$$\Delta^3 x^n = n(n-1)(n-2)x^{n-3}i^3 + Ax^{n-4}i^4 + Bx^{n-5}i^5 + \text{ec.}$$

indicando, per abbreviare, con A, B, C ec., i coefficienti delle potenze i^4, i^5, i^6 ec.

In generale, la *differenza* m^{sima} avrà la forma

$$\Delta^m x^n = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots\ (n-m+1)x^{n-m}i^m +$$
$$+ Mx^{n-m-1}i^{m+1} + \text{ec.}$$

Allorquando l'esponente n è intero e positivo, il numero dei termini di $\Delta^m x^n$, diminuendo di un'unità, quando m aumenta di un'unità, si vede con facilità che nel caso di $m = n$, si ha

$$\Delta^m x^n = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ldots\ 1\,.\,i^m$$

e che questa differenza non contiene più la variabile x.

Segue da quest' osservazione, che le differenze di un ordine superiore ad m sono zero, e che in generale si ha

$$\Delta^m x^n = 0,$$

tutte le volte che m è maggiore di n.

Dando dei valori particolari ad n, avremo

$$\Delta x^2 = 2xi + i^2$$
$$\Delta^2 x^2 = 2i$$
$$\Delta^3 x^2 = 0$$
ec. ec.
$$\Delta x^3 = 3x^2 i + 3xi^2 + i^3$$
$$\Delta^2 x^3 = 6xi + 6i^2$$
$$\Delta^3 x^3 = 6i^3$$
$$\Delta^4 x^3 = 0$$
ec. ec.

22. Proponiamoci adesso di trovare le differenze successive della fattoriella $x^{m|i}$ prendendo per accrescimento della variabile l'accrescimento i della fattoriella, avremo

$$\Delta x^{m|i} = (x+i)^{m|i} - x^{m|i}$$

Ora, dalla natura delle fattorielle

$$(x+i)^{m|i} = (x+i)^{m-1|i}\,.\,(x+mi)$$
$$x^{m|i} = x\,.\,(x+i)^{m-1|i}$$

Così, facendo la sottrazione

$$(x+i)^{m|i} - x^{m|i} = (x+i)^{m-1|i}\,[x+mi-x],$$

dunque

$$\Delta x^{m|i} = mi(x+i)^{m-1|i}$$

Prendendo le *differenze ad accrescimenti negativi*, quest'espressione diventa più semplice, mentre allore si ha

$$\begin{aligned}\Delta x^{m|i} &= x^{m|i} - (x-i)^{m|i}\\ &= (x+(m-1)i) \,.\, x^{m-1|i} - (x-i)x^{m-1|i}\\ &= mi \,.\, x^{m-1|i}\,.\end{aligned}$$

La *differenza seconda* essendo

$$\begin{aligned}\Delta^2 x^{m|i} &= \Delta(mi \,.\, x^{m-1|i})\\ &= mi \,.\, \Delta x^{m-1|i}\end{aligned}$$

si ottiene immediatemente, in virtù della precedente espressione,

$$\Delta^2 x^{m|i} = m(m-1)i^2 \,.\, x^{m-1|i}.$$

Continuando nella medesima meniera con facilità vedremo, che in generale si ha

$$\Delta^n x^{m|i} = m(m-1) \;.\;.\;.\;.\; (m-n+1) \,.\, i^n \,.\, x^{m-n|i}\,.$$

Se invece della semplice fettoriella $x^{m|i}$ prendiamo il binomio $(a+x)^{m|i}$, avremo, considerando sempre gli eccrescimenti come negativi,

$$\begin{aligned}\Delta(a+x)^{m|i} &= (a+x)^{m|i} - (a+x-i)^{m|i}\\ &= (a+x+(m-1)i)(a+x)^{m-1|i}\\ &\quad - (a+x-i)(a+x)^{m-1|i}\\ &= mi\,(a+x)^{m-1|i}\end{aligned}$$

e, quindi

$$\Delta^n(a+x)^{m|i} = m(m-1)(m-2) \;.\;.\;.\;.\; (m-n+1) \,.\, i^n (a+x)^{m-n|i}\,.$$

Abbiamo fatto uso di queste differenze ell'articolo Coefficienti indeterminati.

Queste sono le formule più essenziali che si possono stabilire sopra le differenze; siccome però il signor La Croix nel suo Calcolo differenziale e integrale in quarto, Parigi, 1810-19, Tomo III, nel trettere questa teoria l'ha applicata allo sviluppo in serie, e specielmente alle serie numeriche, e l'ha trattata con una generalità che merita une particolare osservazione; così abbiamo creduto di fare cosa utile e nel medesimo tempo piacevole ei nostri lettori di riportare quasi per intero la detta teoria e le sue applicazioni, sebbene alcune delle formule che si troveranno sieno identiche con quelle che abbiamo trovate fino a questu punto.

23. Nel calcolo differenziale, come vedremo, non si considerano le differenze fra i valori di una medesima funzione, che per dedurre dal loro sviluppo nuove funzioni derivate dalle prima, e che ne sono i *coefficienti differenziali*. Questa ricerca non dipende che dalle forma generale dell'espressioni delle differenze o accrescimenti, e non sopra i loro valori numerici; ma l'esame di questi valori ha provato che, in un gran numero di casi, essi seguono leggi più semplici di quelle delle quantità da cui essi deriveno, o almeno essi formeno spesso serie decrescenti le queli con maggior facilità si prestano all'approssimazioni, e alle quali

è per conseguenza utile di riferire le quantità primitive. Ed è nel considerarlo sotto questa forma, che i primi geometri si sono occupati del *calcolo delle differenze*, propriamente detto.

Lo scopo del calcolo diretto alle differenze è dunque quello di determinare gli accrescimenti in loro medesimi, deducendoli non solamente dall' espressione analitica delle funzioni, ma ancora dai loro valori numerici o particolari, quando l' espressione analitica manca o fosse troppo complicata.

24. Esaminando come si formano le serie con i quadrati e i cubi dei termini del seguito naturale dei numeri, si cade di già sopra proprietà delle differenze, che meritano di essere osservate per la loro utilità, come lo prova la spiegazione delle tavole quì sotto descritte.

QUADRATI	DIFFERENZE PRIME	DIFFERENZE SECONDE
1		
4	3	
9	5	2
16	7	2
25	9	2
36	11	2
49	13	2
ec.	ec.	ec.

CUBI	DIFFEREN. PRIME	DIFFEREN. SECONDE	DIFFEREN. TERZE
1			
8	7		
27	19	12	
64	37	18	6
125	61	24	6
216	91	30	6
343	127	36	6
ec.	ec.	ec.	ec.

Non abbiamo fatto entrare in queste tavole il seguito naturale dei numeri 1, 2, 3, 4, ec., perchè la differenza dall' uno all' altro è sempre eguale all' unità, ma accanto ai quadrati abbiamo situato, in una seconda colonna, la differenza fra ciascuno di questi numeri e quello che lo precede; poi in una terza colonna, la differenza fra ciascuno dei numeri della seconda e quello che lo precede; quest' ultime si chiamano *differenze seconde*, poichè sono le differenze delle *differenze prime*.

Queste, formando una progressione per differenze, presentano di già una legge più semplice di quella che esiste nei numeri della prima colonna, e l' altre essendo costanti, offrono ancora una maggior semplicità. Una conseguenza molto importante che si offre subito, è, che possiamo, per mezzo dei soli numeri 1, 3, 2, situati respettivamente alla testa delle tre colonne dalla prima tavola, formare, con semplici addizioni, la colonna dei quadrati; poichè aggiungendo 2 a 3 avremo 5, poi 2 a 5 avremo 7, e formeremo così la seconda colonna; aggiungendo quindi 3 con 1 avremo 4; 5 con 4 avremo 9; e così degli altri quadrati.

La prima colonna della seconda tavola contiene i cubi; la seconda, le loro prime differenze; la terza, le loro seconde differenze, le quali formano una progressione per differenze; e finalmente nella quarta colonna sono le differenze delle differenze seconde, ossia le *differenze terze*, che sono costantemente eguali

n 6. In questa tavola, per mezzo dei quattro numeri 1, 7, 12 e 6, situati respettivamente in testa delle diverse colonne della tavola, *potremo formare tutte queste colonne, cominciando da quella della destra, e aggiungendo ciascuno dei numeri di una medesima colonna con quello che si trova una linea più alta, nella colonna a sinistra.*

Questa regola, che fino a questo punto non è stabilita che sopra una semplice induzione, e per due serie di numeri solamente, sarà quanto prima dimostrata ed estesa ad un numero infinito di funzioni, per le quali si ottengono ancora determinazioni rigorose.

Da un'altra parte, si prendano in una tavola di logaritmi le differenze fra i termini consecutivi, troveremo dei numeri che anderemo assai inegualmente, se operiamo in principio della tavola, ove la funzione varia molto; ma passando alle differenze seconde, terze, ec., arriveremo a numeri che diventeranno molto piccoli, e finiranno per restare i medesimi, in un intervallo più o meno grande. I logaritmi seguiranno dunque sensibilmente, in quest'intervallo, una legge analoga a quella che abbiamo fatto osservare di sopra, rapporto ai quadrati e ai cubi, e della quale possiamo far uso per rendere più semplice la costruzione di questa tavola.

25. Quando abbiamo veduto il partito che possiamo tirare dal considerare le differenze successive, spinte fino all'ordine in cui esse sono costanti, tanto rigorosamente quanto approssimativamente, pare molto semplice che debba cadere in mente di cercare l'espressione generale delle loro relazioni. Sia perciò

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n,$$

una serie di valori consecutivi che riceva una quantità, in virtù delle variazioni che essa prova da se medesima, o per l'effetto di quelle che succedono ad un'altra quantità dalla quale essa dipende; le cifre inferiori sono qui *indici* che fanno conoscere il posto che occupa ciascun valore nella serie, indicando il numero di quelli che lo precedono, dimodochè il primo u, si considera corrispondere all'indice o. Si fa quindi

$$\left.\begin{array}{l} u_1-u \quad =\Delta u\ , \\ u_2-u_1 \quad =\Delta u_1\ , \\ u_3-u_2 \quad =\Delta u_2\ , \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_n-u_{n-1}=\Delta u_{n-1} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (1),$$

servendoci, come l'abbiamo fatto (n.° 4), della caratteristica Δ per indicare l'operazione di prendere la differenza fra due valori consecutivi di una medesima quantità.

Quando questa quantità varia per gradi eguali, le differenze Δu, Δu_1, Δu_2, ec. sono tutte eguali; ma se il contrario ha luogo, si fa, per analogia

$$\left.\begin{array}{l} \Delta u_1 \quad -\Delta u \quad =\Delta.\Delta u \quad =\Delta^2 u\ , \\ \Delta u_2 \quad -\Delta u_1 \quad =\Delta.\Delta u_1 \quad =\Delta^2 u_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta u_{n-1}-\Delta u_{n-2}=\Delta.\Delta u_{n-2}=\Delta^2 u_{n-2}\ , \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (2),$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 u_1 \quad -\Delta^2 u \quad =\Delta.\Delta^2 u \quad =\Delta^3 u\ , \\ \Delta^2 u_2 \quad -\Delta^2 u_1 \quad =\Delta.\Delta^2 u_1 \quad =\Delta^3 u_1\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^2 u_{n-2}-\Delta^2 u_{n-3}=\Delta.\Delta^2 u_{n-3}=\Delta^3 u_{n-3} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (3).$$

26. Per mezzo delle regole esposte (n.° 7.) e dell' equazioni (1), si ottengono per i valori u_1, u_2, u_3, ... u_n, dell' espressioni le quali non dipendono che dal valore primordiale u e dalle sue differenze successive Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ec. mentre, poichè

$$\Delta u_1 = \Delta(u+\Delta u) = \Delta u + \Delta^2 u,$$

ne resulta

$$u^2 = u_1 + \Delta u_1 = u + \Delta u + \Delta(u+\Delta u)$$
$$= u + 2\Delta u + \Delta^2 u$$

Finalmente

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u + 2\Delta u + \Delta^2 u + \Delta(u + 2\Delta u + \Delta^2 u)$$
$$= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u.$$

La forma di quest' espressioni, i di coi coefficienti numerici sono i medesimi di quelli del quadrato e del cubo di un binomio, fa presentire che

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.};$$

facilmente possiamo assicurarcene, sviluppando l'espressione

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n,$$

la quale dà

$$\left.\begin{aligned} u_{n+1} = u &+ \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.} \\ + \Delta u &+ \frac{n}{1}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^3 u + \text{ec.} \end{aligned}\right\}$$

$$= u + \frac{(n+1)}{1}\Delta u + \frac{(n+1)n}{1.2}\Delta^2 u + \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.}$$

il che prova per conseguenza che, se la legge supposta ha luogo per l'*indice n*, essa avrà egualmente luogo per l'indice $n+1$: così questa legge essendo stata osservata sopra gl'indici 1, 2, 3, si estenderà necessariamente a tutti quelli che seguono.

27. È facile vedere, dalla concatenazione che esiste nell'equazioni (1), (2) e (3) che la differenza prima dipende da due valori consecutivi; la differenza seconda da 3; la differenza terza, da 4, e così di seguito, e che possiamo esprimere immediatamente ciascuna di queste differenze con i valori da cui essa dipende, senza passare per le differenze degli ordini inferiori: le formule necessarie a ciò si costruiranno facilmente come segue.

Avendo in principio

$$\Delta u = u_1 - u \quad \text{e} \quad \Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

osserveremo che Δu_1 deve comporsi con u_1 ed u_2 come Δu si compone con u ed u_1, vale a dire che basta di aumentare di un' unità gl' indici, per passare a $\Delta u_1 = u_2 - u_1$, ed otterremo

$$\Delta^2 = u_2 - u_1 - (u_1 - u)$$
$$= u_2 - 2u_1 + u;$$

poi, siccome aumentando di un'unità gl'indici, in quest'ultimo risultamento, si forma $\Delta^2 u_1$, verrà

$$\Delta^3 u = \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u = u_3 - 2u_2 + u_1 - (u_2 - 2u_1 + u)$$
$$= u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u$$

Quest'espressioni hanno ancora i medesimi coefficienti delle potenze del binomio, ma suppongono che i due termini siano separati dal segno $-$: avremo dunque, per analogia,

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-3} + \text{ec.},$$

e ci assicureremo che la medesima legge ha luogo per l'ordine $n+1$, considerando che

$$\Delta^{n+1} u = \Delta^n u_1 - \Delta^n u =$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{n+1} - \frac{n}{1} u_n + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} u_{n-2} + \text{ec.} \\ - u_n + \frac{n}{1} u_{n-1} - \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} + \text{ec.} \end{array}\right\} =$$

$$u_{n+1} - \frac{n+1}{1} u_n + \frac{(n+1)n}{1.2} u_{n-1} - \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} u_{n-2} + \text{ec.}$$

28. Avanti di progredire più oltre, faremo osservare che l'espressioni di u_n e di $\Delta^n u$ possono scriversi come segue:

$$u_n = (1 + \Delta u)^n, \qquad \Delta^n u = (u - 1)^n$$

purchè ci si rammenti di cangiare, nello sviluppo della prima di quest'equazioni, gli esponenti delle potenze di Δu in esponenti della caratteristica Δ, e nella seconda, gli esponenti delle potenze di u in indici di questa lettera. Il primo termine 1 è compreso nella legge della prima formula, perchè può considerarsi come rappresentante $(\Delta u)^0$, che si cangia in $\Delta^0 u$, simbolo equivalente ad u. Egualmente, considerando, nella seconda formula, che 1 rappresenta u^0, il quale deve cangiarsi in u_0, si comprendono tutti i termini dell'enunziata legge.

Tali sono i primi segni di un'analogia estesissima, che le differenze hanno con le potenze.

Alcuni geometri presentano sotto la forma

$$u_n = (1 + \Delta)^n u,$$

la prima delle due precedenti equazioni; e dopo lo sviluppo non dobbiamo che cangiare il significato della lettera Δ, la quale, trattata in principio come una quantità, diventa in seguito una caratteristica d'operazione.

L'espressione $\Delta^n u$ offre ancora una conseguenza che non bisogna tralasciare, e questa è che *una serie che ha delle differenze costanti in un ordine qualunque, è ricorrente*, poichè la condizione $\Delta^n u = 0$, rispondendo all'equazione

$$u_n - \frac{n}{1} u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} \ldots\ldots \pm u = 0,$$

fa vedere che un termine qualunque u_n si esprime con n termini che lo precedono, affetti da coefficienti costanti; bisogna però stare attenti, poichè l'inversa di questa proposizione non è vera: le serie ricorrenti non hanno sempre differenze costanti.

29. Sono le potenze intere e positive e le funzioni razionali e intere di una variabile indipendente, che godono di questa proprietà.

Infatti, sia $u=x^m$, e sopponiamo che x aumenti sempre della medesima quantità h; si trova (n.° 21).

$$\Delta u=(x+h)^m-x^m=mx^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2+\text{ec.}$$

risultamento della forma

$$\Delta u=mhx^{m-1}+Ah^2x^{m-2}+Bh^3x^{m-3}+\text{ec.}$$

Seguendo le regole del n.° 25, la differenza seconda sarà

$$\Delta^2u=\Delta(mhx^{m-1}+Ah^2x^{m-2}+Bh^3x^{m-3}+\text{ec.})=$$
$$\Delta.mhx^{m-1}+\Delta.Ah^2x^{m-2}+\Delta.Bhx^{m-3}+\text{ec.}=$$
$$mh\Delta.x^{m-1}+Ah^2\Delta.x^{m-2}+Bh^3\Delta.x^{m-3}+\text{ec.};$$

e componendo $\Delta.x^{m-1}$, $\Delta.x^{m-2}$, $\Delta.x^{m-3}$, ec., sul modello di $\Delta.x^m$, otterremo un risultamento della forma

$$\Delta^2u=m(m-1)h^2x^{m-2}+A'h^3x^{m-3}+B'h^4x^{m-4}+\text{ec.}$$

Senza che vi sia bisogno di andare al di là di questi sviluppi, la legge del primo termine è evidente, e si vede che l'espressione di Δ^nu deve cominciare per

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}h^n.$$

Si vide al citato n.° 21 che la differenza m^{ima} di u era costante, e che perciò le differenze degli ordini superiori erano nulle.

30 È facile di concludere da ciò che *qualunque funzione razionale e intera di x, ha sempre delle differenze costanti, cioè quelle il di cui ordine è indicato dalla più alta potenza di x.* Infatti questa funzione essendo della forma

$$Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\text{ec.},$$

avremo

$$\Delta^n(Ax^\alpha+Bx^\beta+Cx^\gamma+\text{ec.})=A\Delta^n.x^\alpha+B\Delta^n.x^\beta+C\Delta^n.x^\gamma+\text{ec.};$$

e se α indica il più alto esponente di x, verrà pel caso in cui $n=\alpha$,

$$\Delta^\alpha.x^\alpha=\alpha(\alpha-1)\ldots\ldots 1h^\alpha,\quad \Delta^\alpha.x^\beta=0,\quad \Delta^\alpha.x^\gamma=0,\text{ ec;}$$

donde segue che la differenza dell'ordine α della funzione proposta è costante.

31. I calcoli indicati nel n.° 29 fanno già vedere che lo sviluppo di $\Delta^n.x^m$, il quale comincia per la potenza n dell'accrescimento h, deve contenere tutte le altre, fino a quella il di cui esponente è m inclusivamente; ma l'espressione di Δ^nu, trovata nel n.° 27, dà subito il termine generale di questo sviluppo.

Infatti, la serie dei valori

$$u=x^m,\quad u_1=(x+h)^m,\quad u_2=(x+2h)^m,\ \ldots\ u_n=(x+nh)^m,$$

conduce a

$$\Delta^n . x^m = [x+nh]^m - \frac{n}{1}[x+(n-1)h]^m + \frac{n(n-1)}{1.2}[x+(n-2)h]^m$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}[x+(n-3)h]^m + \text{ec.};$$

e se indichiamo con i l'esponente di h nel termine generale dello sviluppo della formula qui sopra, l'espressione di questo termine sarà evidentemente

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-i+1)}{1.2.3 \ldots\ldots i} x^{m-i} h^i \times$$

$$\left\{ n^i - \frac{n}{1}\left(n-1\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(n-2\right)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(n-3\right)^i + \text{ec.} \right\}.$$

Quello che di già sappiamo sopra la forma della differenza cercata, ci conduce alla seguente conseguenza che merita osservazione, che la funzione

$$n^i - \frac{n}{1}\left(n-1\right)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(n-2\right)^i - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\left(n-3\right)^i + \text{ec.}$$

è nulla fintantochè $i < n$, poichè in $\Delta^n . x^m$ non potrebbe esservi alcuna potenza di h inferiore al grado n.

Vediamo, quindi, che il coefficiente

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots\ldots (m-i+1)}{1.2.3 \ldots\ldots i}$$

sparirebbe quando $i = m+1$, e che perciò la più alta potenza di h non può superare il grado m.

Osserveremo ancora che $\Delta^m . x^m$ essendo indipendente da x, rimane sempre eguale a

$$m(m-1)(m-2) \ldots\ldots 1 . h^m,$$

qualunque sia x; ma se facciamo $n = m$ e $x = 0$, nella serie dei valori u, u_1, u_2, ec., troveremo

$$\Delta^m . x^m = \left[m^m - \frac{m}{1}\left(m-1\right)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(m-2\right)^m - \text{ec.} \right] h^m;$$

donde segue che

$$m^m - \frac{m}{1}\left(m-1\right)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(m-2\right)^m - \text{ec.} = 1.2.3 \ldots\ldots m$$

32. Segue dalla proposizione dimostrata nel n.° 30, che il processo indicato nel n.° 24, per formare le tavole dei quadrati e dei cubi, si estende a tutte le funzioni algebriche razionali e intere, e può essere utile per abbreviare i calcoli nella risoluzione dell'equazioni numeriche, nella quale spesso abbiamo da formare i valori successivi che prende il primo membro dell'equazione, quando si

sostituiscano in luogo dell' incognita numeri in progressione per differenza. Si vede subito, da ciò che precede, che la funzione che compone il primo membro dell' equazione ha delle differenze costanti, quando si arriva all' ordine indicato dall' esponente del suo grado, e che per mezzo dei primi valori di questa funzione e delle sue differenze, fino all' ordine del quale si tratta, si forma facilmente la serie dei suoi valori.

Si abbia, per esempio, l' equazione

$$x^3+px^2+qx+r=0;$$

se si rappresenta il primo membro per u, e che si cangi x in $x+1$, troveremo facilmente

$$\begin{aligned} \Delta u &= 3x^2+(3+2p)x+1+p+q \\ \Delta^2 u &= \qquad 6x+6+2p \\ \Delta^3 u &= \qquad\qquad 6 \end{aligned}$$

Partendo da $x=0$; avremo

$$u=r, \quad \Delta u=1+p+q, \quad \Delta^2 u=6+2p, \quad \Delta^3 u=6$$

E inutile di osservare che le differenze Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, si dedurrebbero immediatamente dai quattro primi valori della funzione proposta (n.° 24).

La tavola dei valori di u corrispondenti ai valori positivi $x=1$, $=2$, $=3$, ec., si formerà egualmente di quella dei cubi (n.° 24). Prendendo per esempio $x^3-5x^2+6x-1=0$, formeremo subito la parte compresa al di sotto delle linee grasse, nella quì sotto tavola

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
— 5	— 281			
— 4	— 169	112		
— 3	— 91	78	— 34	
— 2	— 41	50	— 28	6
— 1	— 13	28	— 22	6
		12	— 16	6
0	— 1		— 10	6
1	+ 1	2		6
2	— 1	— 2	— 4	
3	— 1	0	+ 2	6
4	+ 7	+ 8	8	6
5	29	22	14	6

Per ottenere i valori di u corrispondenti ai valori negativi di $x=-1$, $=-2$, $=-3$, ec., bisogna continuare la tavola risalendo, il che cangia l'ad-

dizioni in sottrazioni, vale a dire che la differenza terza dev' essere sottratta da ciascuna differenza seconda, questa dalla differenza prima che è sopra la medesima linea, e questa differenza dal valore di u che è accanto; ben' inteso che effettuando queste operazioni, bisogna aver riguardo al segno proprio delle quantità che s' impiegano.

Possiamo formare in una tavola a parte, la serie dei valori di u corrispondenti ai valori negativi di x. Per eseguir ciò, è sufficiente di calcolare nella prima tavola, i diversi numeri che appartengono alla linea $x=0$, per formare la prima linea di una nuova tavola, e operare quindi le sottrazioni come abbiamo detto di sopra. Ed è in questa guisa che abbiamo costruito la seconda tavola qui sotto

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
+ 0	— 1	12	— 16	6
1	+ 1	2	— 10	6
2	— 1	— 2	— 4	6
3	— 1	0	+ 2	6
4	+ 7	+ 8	8	6
5	29	22	14	6

x	u	Δu	$\Delta^2 u$	$\Delta^3 u$
— 0	— 1	12	— 16	6
— 1	— 13	28	— 22	6
— 2	— 41	50	— 28	6
— 3	— 91	78	— 34	
— 4	— 169	112		
— 5	— 281			

Si potrebbero immaginare altre disposizioni, forse più comode, ma queste particolarità di pratica non possono appartenere alla natura di quest' opera; quello che precede basta per provare come, con le differenze, si possa continuare, tanto indietro quanto avanti, un seguito di numeri la di cui legge sia data.

33. Il calcolo approssimativo è soprattutto laborioso, rapporto alle funzioni trascendenti, e molto si guadagna a servirsi in questi calcoli delle differenze, cosa, che potremo concepire con maggior facilità mediante il seguente esempio, preso dai logaritmi.

Sia $u=lx$, donde $u_1=l(x+h)$, $u_2=l(x+2h)$, $u_3=l(x+3h)$; le formule del n.° 27 daranno

$$\Delta lx=l(x+h)-lx=l\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=M\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\text{ec.}\right)\ (\textit{Vedi}\ \text{LOGARITMI}),$$

$$\Delta^2 lx=l(x+2h)-2l(x+h)+lx$$

$$=l\left(1+\frac{2h}{x}\right)-2l\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$=-M\left(\frac{h^2}{x^2}-\frac{2h^3}{x^3}+\text{ec.}\right),$$

$$\Delta^3 lx = l(x+3h) - 3l(x+2h) + 3l(x+h) - lx$$

$$= l\left(1+\frac{3h}{x}\right) - 3l\left(1+\frac{2h}{x}\right) + 3l\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= M\left(\frac{2h^3}{x^3} - \text{ec.}\right).$$

Spingeremo queste serie in avanti, secondo la grandezza del numero x, e fino a tanto che l'ultima differenza sia tanto piccola per esser trascurata senza errore sensibile.

Se si avesse, per esempio, $x = 10000$ e $h = 1$, verrebbe

$$u = l\,10000,\ \Delta u = 0,00004\ 34272\ 76863,$$
$$\Delta^2 u = -0,00000\ 00043\ 42076,$$
$$\Delta^3 u = 0,00000\ 00000\ 00868;$$

e se non si volessero avere gli ultimi risultamenti che con 10 cifre solamente, si potrebbero impunemente trascurare le differenze del quart'ordine, mentre sarebbe necessario che esse fossero ripetute un gran numero di volte, per influire sopra la terza differenza. Formeremo dunque successivamente, come nel n.° 24 le colonne delle differenze terze, seconde, prime, donde dedurremo i logaritmi dei numeri

10001, 10002, 10003, ec.,

partendo da quello di 10000, che è eguale a

4,00000 00000 00000.

Bisognerebbe fare il calcolo con 15 decimali, per riconoscere quando l'accumulazione delle quantità trascurate potrebbe cominciare ad influire sopra l'ultima cifra che ci proponiamo di conservare, del che ci assicureremo per mezzo di alcuni logaritmi calcolati rigorosamente a intervalli lontani; mentre allorquando, in seguito delle successive addizioni, saremo arrivati a questi logaritmi, bisognerà che il metodo delle differenze gli dia tali come essi sono stati dedotti *a priori*, almeno nelle prime dieci cifre decimali, se vogliamo arrestarci a questo numero. Quando l'ultima di queste cifre cesserà di essere esatta, calcoleremo *a priori* le differenze Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, e ci serviremo dei nuovi valori come dei precedenti.

La formula

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \text{ec. (n.° 26)}$$

dà ancora il mezzo di valutare direttamente l'errore che produce, sopra un valore situato in quel posto che vorremo, la soppressione delle differenze di un ordine dato. Nell'esempio di sopra, facendo $n = 50$, e calcolando per questo valore quello del termine

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\Delta^4 u,$$

osservando che $\Delta^4 lx = -M\left(\frac{6h^4}{x^4} - \text{ec.}\right)$, troveremo che esso non influisce ancora sopra il decimo decimale del logaritmo 10050; a più forte ragione seguirebbe il medesimo per le differenze degli ordini superiori.

34. Ecco altre espressioni più convergenti delle differenze prime e seconde della funzione logaritmica. La serie ottenuta (*Vedi* Logaritmi).

$$l(n+z) = ln + 2M\left\{\frac{z}{2n+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z}{2n+z}\right)^5 + \text{ec.}\right\},$$

dà, cangiando n in x e z in h

$$\Delta lx = 2M\left\{\frac{h}{2x+h} + \frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^5 + \text{ec.}\right\};$$

poi aggiungendo insieme le due equazioni

$$l(x+h) = lx + M\left\{\frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \frac{h^4}{4x^4} + \text{ec.}\right\},$$

$$l(x-h) = lx - M\left\{\frac{h}{x} + \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3} + \frac{h^4}{4x^4} + \text{ec.}\right\},$$

ne risulta

$$l(x+h) + l(x-h) = 2lx - 2M\left\{\frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^4}{4x^4} + \frac{h^6}{6x^6} + \text{ec.}\right\}.$$

cangiando $x-h$ in x, e scrivendo per conseguenza $x+h$ per x, e $x+2h$ per $x+h$, verrà

$$l(x+2h) - 2l(x+h) + lx =$$

$$-2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2} + \frac{h^4}{4(x+h)^4} + \frac{h^6}{6(x+h)^6} + \text{ec.}\right\};$$

ora il primo membro essendo equivalente a $u_2 - 2u_1 + u$, dà $\Delta^2 u$: si ha dunque

$$\Delta^2 lx = -2M\left\{\frac{h^2}{2(x+h)^2} + \frac{h^4}{4(x+h)^4} + \frac{h^6}{6(x+h)^6} + \text{ec.}\right\}.$$

Quando x è un poco grande rapporto ad h, basta tener conto dei due primi termini dell'espressione di Δlx. Infatti, quando $x = 10000$ e $h = 1$, il secondo termine, cioè, $\frac{2M}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3$ dà solamente 0,00000 00000 00036, e la seguente avrebbe 22 zeri fra la virgola e la prima cifra significativa. Riguardo a $\Delta^2 lx$ si può limitarsi al primo termine; poichè il secondo $\frac{M}{2} \cdot \frac{h^4}{(x+h)^4}$, si riduce a

0,00000 00000 00000 0217. Segue da ciò che indicando con N un numero al di sopra di 10000, si ha con moltissima esattezza

$$\Delta lN = 2M\left(\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\frac{1}{(2N+1)^3}\right),$$

$$\Delta^2 lN = -\frac{M}{(N+1)^2},$$

quanto alla differenza terza, si avrebbe il primo termine del suo valore, differenziando $\Delta^2 lN$ e facendo $dN=1$, il che darebbe $\frac{2M}{(N+1)^3}$. Si vede con ciò che il valore $\Delta^3 lM$ diverrà ben tosto assai piccolo per potersi trascurare; e dopo quello che abbiamo detto, la costruzione di una tavola di logaritmi diventerà la cosa più facile. Del rimanente se si volessero maggiori particolarità sopra questo soggetto, bisognerà consultare una memoria del signor Delambre, stampata fra quelle dell'Accademia di Torino, anni 1790-91, dalla quale il Sig. La Croix ha ricavato ciò che precede, e dalla quale egli estrae ancora ciò che spetta alle differenze delle funzioni circolari.

35. Le differenze della funzione a^x hanno tutte una medesima forma, degna di osservazione per la sua semplicità. Si trova successivamente

$$\Delta . a^x = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h-1),$$

$$\Delta^2 . a^x = (a^h-1)\Delta . a^x = a^x(a^h-1)^2,$$

donde in generale,

$$\Delta^n . a^x \ldots\ldots\ldots = a^x(a^h-1)^n.$$

Otterremo ancora semplicemente lo sviluppo di $\Delta^n . a^x y$, y essendo una funzione qualunque di x; avremo subito l'equazione

$$\Delta . a^x y = (y+\Delta y)a^{x+h} - ya^x = a^x[(a^h-1)y+a^h\Delta y],$$

e facendo $(a^h-1)y+a^h\Delta y = y'$, verrà

$$\Delta^2 . a^x y = \Delta . a^x y' = a^x[(a^h-1)y'+a^h\Delta y'];$$

poi ponendo $(a^h-1)y'+a^h\Delta y' = y''$, se ne ricaverà

$$\Delta^3 a^x y = \Delta a^x y'' = a^x[(a^h-1)y''+a^h\Delta y''],$$

ec.;

mandando via quindi y', y'', ec., dopo aver fatto, per maggior semplicità, $a^h = \alpha$, si troverà

$$\Delta^2 . a^x y = a^x[(\alpha-1)^2 y+2(\alpha-1)\alpha\Delta y+\alpha^2\Delta^2 y],$$

$$\Delta^3 . a^x y = a^x[(\alpha-1)^3 y+3(\alpha-1)^2\alpha\Delta y+3(\alpha-1)\alpha^2\Delta^2 y+\alpha^3\Delta^3 y],$$

e in generale,

$$\Delta^n . a^x y = a^x\left[(\alpha-1)^n y+\frac{n}{1}(\alpha-1)^{n-1}\alpha\Delta y+\frac{n(n-1)}{1.2}(\alpha-1)^{n-2}\alpha^2\Delta^2 y \ldots \alpha^n\Delta^n y\right]$$

36. Le formule trigonometriche conosciute

$$\text{sen}\,A - \text{sen}\,B = 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)\cos\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\cos A - \cos B = -2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(A-B)\,\text{sen}\,\frac{1}{2}(A+B),$$

danno

$$\Delta \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \cos \frac{1}{2}(2x+h),$$

$$\Delta \cos x = \cos(x+h) - \cos x = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2x+h);$$

donde segue

$$\Delta^2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \left[\cos \frac{1}{2}(2x+3h) - \cos \frac{1}{2}(2x+h) \right]$$

$$= -4 \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2x+2h) = -4 \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^2 \operatorname{sen}(x+h).$$

Proseguendo così, arriveremo alle formule generali

$$\Delta^{4i} \operatorname{sen} x = 2^{4i} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{4i} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2x+4ih),$$

$$\Delta^{4i+1} \operatorname{sen} x = 2^{4i+1} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{4i+1} \cos \frac{1}{2}[2x+(4i+1)h],$$

$$\Delta^{4i+2} \operatorname{sen} x = -2^{4i+2} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{4i+2} \operatorname{sen} \frac{1}{2}[2x+(4i+2)h],$$

$$\Delta^{4i+3} \operatorname{sen} x = -2^{4i+3} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{4i+3} \cos \frac{1}{2}[2x+(4i+3)h],$$

racchiuse nelle due seguenti:

$$\Delta^{2n} \operatorname{sen} x = \pm 2^{2n} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{2n} \operatorname{sen} \frac{1}{2}(2x+2nh),$$

$$\Delta^{2n+1} \operatorname{sen} x = \pm 2^{2n+1} \left(\operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{2n+1} \cos \frac{1}{2}[2x+(2n+1)h],$$

nelle quali bisogna prendere il segno + quando n è un numero pari, e il segno — nel caso contrario.

37. Le formule trovate qui sopra sono di già comodissime; ma il signor Legendre è giunto a qualche cosa di più semplice ancora, esprimendo le differenze dell'ordine n con quelle dell'ordine $n-1$ e dell'ordine $n-2$, per mezzo di questa equazione:

$$\Delta^n \operatorname{sen} x = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^2 \left\{ \Delta^{n-1} \operatorname{sen} x + \Delta^{n-2} \operatorname{sen} x \right\}.$$

Per provarne la verità, cominceremo da fare $n = 2i-1$ nell'espressione di $\Delta^{2n} \operatorname{sen} x$ del precedente numero; e verrà

$$\Delta^{4i-2} \operatorname{sen} x = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h \right)^{4i-2} \operatorname{sen}[x+(2i-1)h] \quad \ldots (1);$$

poi prendendo le differenze prima, seconda, terza e quarta di quest'equazione

osservando che il fattore $\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i-2}$ è costante (n.° 25), avremo

$$\Delta^{4i-1}\,\text{sen}\,x = -\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i-2}\Delta\,\text{sen}\,[x+(2i-1)h]\;\ldots\;(2),$$

$$\Delta^{4i}\,\text{sen}\,x = -\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i-2}\Delta^{2}\,\text{sen}\,[x+(2i-1)h]\;\ldots\;(3),$$

$$\Delta^{4i+1}\,\text{sen}\,x = -\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i-2}\Delta^{3}\,\text{sen}\,[x+(2i-1)h]\;\ldots\;(4),$$

$$\Delta^{4i+2}\,\text{sen}\,x = -\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i-2}\Delta^{4}\,\text{sen}\,[x+(2i-1)h]\;\ldots\;(5).$$

Moltiplicando adesso per $-\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^2$, la somma dell'equazioni (1) e (2), facendo per abbreviare, $x+(2i-1)h = x'$, avremo

$$-\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^2\left\{\Delta^{4i-1}\,\text{sen}\,x+\Delta^{4i-2}\,\text{sen}\,x\right\} = \left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i}(\text{sen}\,x'+\Delta\,\text{sen}\,x')$$

ora

$$\text{sen}\,x'+\Delta\,\text{sen}\,x' = \text{sen}\,(x'+h) = \text{sen}\,(x+2ih),$$

e

$$\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^{4i}\text{sen}\,(x+2ih) = \Delta^{4i}\,\text{sen}\,x:$$

dunque

$$\Delta^{4i}\,\text{sen}\,x = -\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^2(\Delta^{4i-1}\,\text{sen}\,x+\Delta^{4i-2}\,\text{sen}\,x).$$

Se si tratta nella medesima maniera l'espressioni di $\Delta^{4i-1}\,\text{sen}\,x$ e di $\Delta^{4i}\,\text{sen}\,x$, si troverà che la loro somma moltiplicata per $-\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^2$ è eguale a $\Delta^{4i+1}\,\text{sen}\,x$ (n.° 36); seguirà lo stesso dell'espressioni di $\Delta^{4i}\,\text{sen}\,x$ e di $\Delta^{4i+1}\,\text{sen}\,x$, rapporto a $\Delta^{4i+2}\,\text{sen}\,x$, finalmente di quelle di $\Delta^{4i+1}\,\text{sen}\,x$ e di $\Delta^{4i+2}\,\text{sen}\,x$, rapporto a $\Delta^{4i+3}\,\text{sen}\,x$. In tutti questi calcoli, bisogna prendere ciascuna differenza, col segno da cui essa è affetta; e siccome i quattro risultamenti indicati comprendono le diverse variazioni che possono esserci in questi segni, l'equazione posta al principio di quest'articolo si trova dimostrata per tutti i casi.

38. L'espressione generale $u_2 = u_1+\Delta u_1 = u_1+\Delta u+\Delta^2 u$ dà

$$\text{sen}\,(x+2h) = \text{sen}\,(x+h)+[\text{sen}(x+h)-\text{sen}\,x]-\text{sen}\,(x+h)\left(2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}h\right)^2$$

allorchè vi si mette per $\Delta^2\,\text{sen}\,x$ il suo valore del n.° 36. Questa formula è molto speditiva per calcolare delle tavole di seni; mentre facendo successivamente $x = 0°$, $x = 1°$, $x = 2°$, ec. e prendendo $h = 1°$, avremo

$$\text{sen}\,2° = \text{sen}\,1°+(\text{sen}\,1°-\text{sen}\,0°)-\text{sen}\,1°(2\,\text{sen}\,30')^2,$$
$$\text{sen}\,3° = \text{sen}\,2°+(\text{sen}\,2°-\text{sen}\,1°)-\text{sen}\,2°(2\,\text{sen}\,30')^2,$$
$$\text{sen}\,4° = \text{sen}\,3°+(\text{sen}\,3°-\text{sen}\,2°)-\text{sen}\,3°(2\,\text{sen}\,30')^2,$$
ec.,

e non vi sarà bisogno di calcolare con la serie

$$\operatorname{sen} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{ec.} \quad (\textit{Vedi } \text{Seno}),$$

che il seno di 30′ e quello di 1.°, per i quali questa serie è convergentissima. Se si formano inseguito i prodotti dei nove primi numeri pel termine costante $(2 \operatorname{sen} 30')^2$, non rimarrà da eseguire che semplici addizioni e sottrazioni. Calcolando con tredici decimali, l'errore, secondo il signor Delambre, non sarebbe che di 0,00000 00000 06, sopra il seno di 60°. Passato questo termine, i seni si otterranno per mezzo della formula

$$\operatorname{sen}(60^\circ + A) = \operatorname{sen}(60^\circ - A) + \operatorname{sen} A;$$

e si avranno i seguenti seni, per verificarsi nell'intervallo:

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}, \quad \operatorname{sen} 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}, \quad \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{sen} 54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}, \quad \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

Scrivendo, $x - 1'$, $x - 10''$, in luogo di x nella formula

$$\operatorname{sen}(x+2h) = \operatorname{sen}(x+h) + [\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x] - \operatorname{sen}(x+h)\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h\right)^2,$$

e facendo $h = 1'$, $h = 10''$, avremo queste due equazioni

$$\operatorname{sen}(x + 1') = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}[\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x - 1')] - \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} 30'')^2,$$

$$\operatorname{sen}(x + 10'') = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}[\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x - 10'')] - \operatorname{sen} x (2 \operatorname{sen} 5'')^2,$$

le quali serviranno a calcolare i seni, di minuto in minuto, e di dieci secondi in dieci secondi, quando avremo ottenuto, per mezzo della serie riportata di sopra; i valori di sen 1′ e di sen 30″, quelli di sen 10″ e di sen 5″.

L'equazione della quale abbiamo fatto uso può cangiarsi nella seguente:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+h) - [\operatorname{sen}(x+2h) - \operatorname{sen}(x+h)] - \operatorname{sen}(x+h)\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h\right)^2,$$

e per mezzo della sostituzione di $x - 2h$ in luogo di x essa diventa

$$\operatorname{sen}(x-2h) = \operatorname{sen}(x-h) - [\operatorname{sen} x - \operatorname{sen}(x-h)] - \operatorname{sen}(x-h)\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h\right)^2;$$

in questo stato essa darebbe successivamente i seni, partendo dall'arco di 90° e andando verso 0°.

39. La maniera d'impiegare la formula

$$\Delta^n \operatorname{sen} x = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h\right)^2 \left\{\Delta^{n-1} \operatorname{sen} x + \Delta^{n-2} \operatorname{sen} x\right\}$$

non è difficile a trovarsi. Partendo subito da 0°, per passare a un arco piccolissimo, che supporremo rappresentato da h, l'espressioni di $\Delta \operatorname{sen} x$ e di $\Delta^2 \operatorname{sen} x$ daranno subito

$$\Delta \operatorname{sen} 0^\circ = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h \cos \frac{1}{2}h,$$

$$\Delta^2 \operatorname{sen} 0^\circ = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}h\right)^2 \operatorname{sen} h.$$

Queste due differenze essendo calcolate avremo sen h e sen $2h$; poi formando i prodotti dei nove primi numeri pel fattore costante $\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h\right)^2$, se ne ricaveranno dall' equazioni

$$\Delta^3 \operatorname{sen} 0^\circ = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h\right)^2 \left\{ \Delta \operatorname{sen} 0^\circ + \Delta^2 \operatorname{sen} 0^\circ \right\},$$

$$\Delta^4 \operatorname{sen} 0^\circ = -\left(2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} h\right)^2 \left\{ \Delta^2 \operatorname{sen} 0^\circ + \Delta^3 \operatorname{sen} 0^\circ \right\},$$

ec.,

con semplici addizioni e sottrazioni, i valori delle differenze successive di sen 0°, per mezzo delle quali formeremo quelle di sen $3h$, sen $4h$, ec. (n° 24).

Con simili processi sono state in Francia calcolate, nell' ufizio del catasto, le gran tavole dei seni naturali con 25 decimali per le 10000^{sime} parti del quarto di circolo, le quali però non sono state stampate, ma due copie ben collazionate sono state depositate all' osservatorio di Parigi, negli archivi dell' ufizio delle longitudini.

Le tangenti si deducono tanto facilmente dai seni e dai coseni, che inutile è il ricorrere ad altre formole; di più le loro differenze non si presentano sotto una forma comoda, e poi quando si hanno fino a 45°, si ottengono quelle degli archi seguenti per mezzo dell' equazione

$$\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{1}{2} A\right) = 2 \operatorname{tang} A + \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{1}{2} A\right).$$

Le secanti si deducono senza pena dalla formula

$$\sec A = \operatorname{tang}\left(45^\circ \pm \frac{1}{2} A\right) \pm \operatorname{tang} A.$$

40. Ora passeremo al calcolo dei logaritmi dei seni; cominceremo dall'osservare che la formula $\operatorname{sen} \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} a}{2 \cos \frac{1}{2} a}$ dà tutti quelli dei seni degli archi minori di 45°, per mezzo di quelli degli archi compresi fra 45° e 90°. Per ottenere quest' ultimi di grado in grado, il signor Delambre propose la serie

$$l \operatorname{sen}(x+h) = l \operatorname{sen} x + 2M \left\{ \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x+h) + \operatorname{sen} x} + \frac{1}{3} \left[\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x+h) + \operatorname{sen} x}\right]^3 + \text{ec.} \right\}$$

che si deduce dalla serie (*Vedi* Logaritmi)

$$l(n+z) = ln + 2M \left\{ \frac{2}{2n+z} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{2n+z}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{2}{2n+z}\right)^5 + \text{ec.} \right\},$$

facendo $n = \operatorname{sen} x$, e $n+z = \operatorname{sen}(x+h)$, donde risulta $z = \operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x$. Mettendo $\Delta \operatorname{sen} x$ invece di z, avremo

$$l \operatorname{sen}(x+h) = l \operatorname{sen} x + 2M \left\{ \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x + \Delta \operatorname{sen} x} + \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} x + \Delta \operatorname{sen} x}\right)^3 + \text{ec} \right\}$$

Se prendiamo $x = 45°$ e $h = 1°$, avremo per il seno di 46° una serie convergentissima, e che lo diverrà sempre più a misura che si avanzerà verso 90°, perchè la differenza $\Delta \operatorname{sen} x$ va sempre diminuendo: quanto al seno di 45°, il suo logaritmo è $\frac{1}{2} l \frac{1}{2}$.

Non possiamo passare sotto silenzio una serie semplicissima, propria a dare il logaritmo del coseno quando l'arco è piccolissimo, e che il signor Delambre è stato il primo a fare osservare. Si sa che

$$l(1-x^2) = -M\left(x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + \text{ec.}\right) \quad (\textit{Vedi } \textsc{Logaritmi}).$$

Se si cangia x in $\operatorname{sen} x$, avremo $1-x^2 = \cos^2 x$, $l(1-x^2)$ diventerà $l \cos^2 x$, o $2 l \cos x$, e si otterrà per conseguenza

$$l \cos x = -M\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^6 x + \text{ec.}\right\}.$$

Riprendiamo adesso la nostra formula, le differenze successive di $l \operatorname{sen} x$, dedotte dalla formula di quì sopra, non si presentano sotto una forma assai comoda per usarsi nella pratica; ma quando non sarà necessario di calcolare che dei valori compresi in un piccolo intervallo, potremo limitarci al primo, o tutto al più, ai due primi termini di questa differenza, conclusa dallo sviluppo di $l \operatorname{sen}(x+h)$ per mezzo del teorema del Taylor, termini che saranno

$$M\left[\cot x \frac{h}{1} - \left(1 + \cot^2 x\right)\frac{h^2}{1.2}\right],$$

poichè

$$\frac{dl \operatorname{sen} x}{dx} = M\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = M \cot x,$$

$$\frac{d^2 l \operatorname{sen} x}{dx^2} = -M\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= -M\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -M(1 + \cot^2 x).$$

Quando non ci proponiamo di verificare che delle tavole di già calcolate, o di correggerle, possiamo dare all'espressione di $l \operatorname{sen}(x+h)$ una forma che permetta d'impiegare, invece dei seni naturali, i logaritmi contenuti nelle tavole. Infatti,

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}(x+h) + \operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+h-x)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+h+x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}h}{\operatorname{tang}\left(x + \frac{1}{2}h\right)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}h \cot\left(x + \frac{1}{2}h\right);$$

avremo adunque

$$l\,\text{sen}\,(x+h) = l\,\text{sen}\,x + \frac{2M}{1}\,\text{tang}\,\frac{h}{2}\,\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

$$+\frac{2M}{3}\left[\text{tang}\,\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]^3$$

$$+\frac{2M}{5}\left[\text{tang}\,\frac{h}{2}\cot\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]^5 + \text{ec.}$$

I termini di questa formula essendo frazioni assai piccole, per metterle in numeri, ci serviremo dei logaritmi delle tangenti e delle cotangenti, dati dalle tavole proposte, poichè l'errore che potrebbe trovarsi negli ultimi decimali di questi logaritmi non sarà di veruna conseguenza rapporto ai risultamenti. Ed è in questa guisa che il signor Delambre ha rilevato diverse inesattezze nelle grandi tavole del Wlacq.

41. La formula

$$u_n = u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 u$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 u + \text{ec.} \quad (\text{n.}^{\text{o}}\ 26)$$

ha la proprietà di legare algebricamente, con l'indice del posto che essi occupano, i differenti termini di una serie di numeri dati,

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ldots\ u_n,$$

senza conoscere la funzione dalla quale provengono questi valori.

Infatti se in quest'espressione, ove le differenze Δu, $\Delta^2 u$, ec. sono numeri conosciuti, si considera n come una variabile indeterminata, e che per conseguenza si sostituisca in luogo di x, avremo una funzione che goderà della proprietà di prendere successivamente $n+1$ valori u, u_1, u_2, ... u_n, allorchè vi si farà $x=0$, $=1$, ... $=n$, e che di più darà tanti valori quanti vorremo sottoposti alla medesima legge, dando ad x valori differenti da quelli che abbiamo indicati.

Siano per esempio, i numeri

$$3,\ 7,\ 19;$$

prendendo le loro differenze successive, si trova

$$u=3,\quad \Delta u=4,\quad \Delta^2 u=8$$

e ne risulta

$$u_x = 3+4x+4x(x-1) = 3+4x^2,$$

espressione, che quando facciamo $x=0$, $=1$, $=2$, rende i tre numeri dati, e dalla quale se ne ricaverebbero un'infinità di altri legati ai primi per mezzo di una medesima legge algebrica. Vediamo ancora che mediante quest'operazione, i numeri dati sono compresi in una serie le di cui differenze seconde sono costanti, e il di cui termine generale è $3+4x^2$.

42. Ciò conduce naturalmente all'*interpolazione*, *che consiste a inserire fra i termini di una serie, nuovi termini soggetti alla medesima legge dei primi.* Inserire dei medj fra due termini di una progressione per differenze, o di una

progressione per quozienti, equivale a calcolare dei termini che risponderebbero a valori frazionari dell'indice, ciò significa *interpolare*.

Nella progressione per differenze

$$a\,,\ a+\delta\,,\ a+2\delta\ \ldots\ a+(n-1)\delta\,,$$

il termine medio fra $a+\delta$ e $a+2\delta$, corrisponderebbe ad $n=\frac{3}{2}$ e sarebbe per conseguenza

$$a+\frac{3}{2}\delta$$

Nella progressione per quozienti

$$1\,,\ a\,,\ a^2\,,\ a^3\,,\ a^4\,,\ \ldots\ a^n\,,$$

ove gli esponenti tengono il luogo dell'indice, s'inserirebbero due medj fra a^3 e a^4, facendo successivamente $n=3+\frac{1}{3}$, $=3+\frac{2}{3}$, il che darebbe in quest'intervallo i termini

$$a^3,\quad a^{3+\frac{1}{3}},\quad a^{3+\frac{2}{3}}\quad a^4$$

formando una nuova progressione la di cui ragione sarebbe $a^{\frac{1}{3}}$

La medesima operazione si effettuerebbe per l'espressione di u_x, formata nella medesima maniera, se quest'espressione potesse considerarsi come il termine generale della serie alla quale appartengono i numeri dati, ma questo è ciò che non ha luogo, che con restrizioni che presentemente faremo conoscere. Il problema generale di *trovare una funzione di* x *che divenga successivamente ciascuno degli* n+1 *numeri dati, allorchè per* x *vi mettiamo i valori* 0, 1, 2, 3...*n*, è indeterminato di sua natura; mentre possiamo soddisfare a queste condizioni con funzioni molto differenti fra loro, purchè esse contengano un sufficiente numero di costanti arbitrarie per verificare l'equazioni che ne risultano.

Ciò equivale a determinare l'equazione di una curva, per mezzo della sola condizione di passare per un numero $n+1$ di punti dati, il che non potrebbe effettuarsi completamente, se non che nel caso in cui l'equazione sia data di specie, poichè possiamo trovare delle curve differentissime che si taglino in tanti punti quanti vorremo; tali sarebbero le curve FGH e CDE (*Tav.* XCVIII, *fig.* 12), le quali non avrebbero di comune che i punti dati M, M_1, M_2, M_3, ec., e che d'altra parte differirebbero molto nell'intervallo da uno di questi punti al seguente.

Se sviluppiamo secondo le potenze di x l'espressione

$$u_x=u+\frac{x}{1}\Delta u+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 u$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 u+\text{ec.},$$

essa prenderà la forma

$$u_x=u+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3\ \ldots\ldots+\nu x^n\,,$$

e i coefficienti α, β, γ, ... ν, non dipenderanno che dalle differenze date Δu, $\Delta^2 u$, ... $\Delta^n u$. Si vede allora che u_x è l'ordinata di una curva del ge-

nere parabolico soggetta a passare per $n+1$ punti dati; ma senza oscire ancora da questo genere di curve, si sarebbe potuto variare la forma dell'espressione di u_x.

Ponendo per esempio, $u_x = u + Ax + Bx^3$, e determinando i coefficienti u, A, e B perchè u_x divenga 3, 7, 19, quando $x = 0$, $= 1$, $= 2$, si troverebbe

$$u_x = 3 + \frac{8}{3}x + \frac{4}{3}x^3,$$

formula differentissima da quella che abbiamo ottenuto nel precedente numero, con le medesime condizioni.

Se la curva parabolica corrispondente all'espressione generale di u_x riportata di sopra non è la sola che possa passare per gli $n+1$ ponti dati, essa è almeno la più semplice, e la teoria dell'osculazioni (*Vedi* Osculazione) fa conoscere che simili curve possono, in un piccolo spazio, approssimarsi sensibilmente ad una curva qualunque, specialmente quando non si trovano ponti singolari in questo spazio; e ciò perchè eccettuato dei casi particolari, una funzione che non diviene infinita quando la sua variabile è nulla, può svilupparsi seguendo le potenze intere e positive di questa variabile, in una serie che sarà convergente, se la variabile non prende che un valore piccolissimo, e perciò in quest' intervallo, una tale funzione segue sensibilmente la legge delle funzioni razionali e intere che hanno delle differenze costanti (n.° 30).

43. La formula precedente suppone che la differenza dei valori dati di x sia l'unità, e che essi comincino da zero; si cangiano facilmente queste circostanze, osservando che se

$$u = f(a), \qquad u_1 = f(a+h) \ldots u_n = f(a+nh),$$

e che si faccia

$$a + nh = x, \quad \text{donde} \quad n = \frac{x-a}{h},$$

ne risulterà

$$u_n = u_x = u + \frac{x-a}{h}\,\frac{\Delta u}{1}$$
$$+ \frac{(x-a)}{h}\left(\frac{x-a}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u}{1.2} + \text{ec.},$$

espressione nella quale il primo valore u risponde a $x = a$, e gli altri segnono a intervalli indicati da h

Ponendo per abbreviare,

$$x - a = h' \quad \text{e} \quad u_x - u = \Delta' u,$$

avremo questa formula generalissima e semplicissima

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\,\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{1.2\,h^2}\,\Delta^2 u$$
$$+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{1.2.3\,h^3}\,\Delta^3 u + \text{ec.},$$

che farà conoscere la differenza $\Delta' u$ fra u_x ed u, per un intervallo h'.

44. Prima di andare più avanti, ne faremo riconoscere l'uso per mezzo di un

esempio ricavato dalle tavole dei logaritmi. Supponiamo che si voglia ottenere il logaritmo ordinario di 3,1415926536, per mezzo di una tavola contenente i logaritmi da 1 fino a 1000, con dieci decimali, considereremo i logaritmi contenuti in questa tavola come i valori dati dalla funzione u_x, i numeri come quelli di x, e formeremo la seguente tavola

NUMERI	LOGARITMI	DIFFERENZ. 1ª	DIFFER. 2ª	DIFFER. 3ª	DIFFER. 4ª
3,14	0,4969296481				
3,15	0,4983105538	13809057			
3,16	0,4996870826	13765288	— 43769		
3,17	0,5010592622	13721796	— 43492	+ 277	
3,18	0,5024271200	13678578	— 43218	+ 274	— 3

dalla quale si rileva che le differenze vanno decrescendo, il che rende convergente l'espressione di $\Delta' u$; e siccome prendendo alcuni logaritmi consecutivi di più, si troverebbe ancora -3 per la quarta differenza, ne segue che in questo intervallo l'espressione di $\Delta' u$ deve rigorosamente terminare al quarto termine, quando non prendiamo che 10 cifre decimali.

Dalla tavola di sopra si ha

$$u = 0,4969296481,$$
$$\Delta u = +0,0013809057, \qquad \Delta^2 u = -0,0000043769,$$
$$\Delta^3 u = +0,0000000277, \qquad \Delta^4 u = -0,0000000003$$

e siccome

$$h = 0,01, \qquad h' = 0,0015926536,$$

otterremo

$$\frac{h'}{h} = 0,15926536, \quad \frac{h'-h}{2h} = \frac{h'}{2h} - \frac{1}{2} = -0,42036732$$

$$\frac{h'-2h}{3h} = \frac{h'}{3h} - \frac{2}{3} = -0,61357821, \quad \frac{h'-3h}{4h} = \frac{h'}{4h} - \frac{3}{4} = -0,71018366.$$

Con questi valori sarà facilissimo di mettere in numeri la formula

$$\Delta' u = \frac{h'}{h}\Delta u + \frac{h'(h'-h)}{h \,.\, 2h}\Delta^2 u$$
$$+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h \,.\, 2h \,.\, 3h}\Delta^3 u$$
$$+ \frac{h'(h'-h)(h'-2h)(h'-3h)}{h \,.\, 2h \,.\, 3h \,.\, 4h}\Delta^4 u,$$

la quale darà,

$$\Delta' u = 0,0002202245,$$

e per conseguenza

$$l3,1415926536 = 0,4971498726.$$

45. L'origine degl'indici, cioè l'indice o, può situarsi ove si vuole: così allorquando gl'indici

$$0, 1, 2, 3, \ldots n,$$

corrispondono alla serie dei valori

$$u, u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots u_n$$

se si diminuiscono tutti gl'indici di m unità, essi diventeranno

$$-m, -(m-1), \ldots\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\ldots n-m$$

e i valori corrispondenti si scriveranno così:

$$u_{-m}, u_{-(m-1)}, \ldots\ldots u_{-2}, u_{-1}, u, u_1, u_2, \ldots\ldots u_{n-m}.$$

Gl'indici minori di m diventeranno negativi, ma l'ordine di successione degli n non essendo turbato, la formula del n.° 26 avrà ancora luogo, cangiandovi

$$\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \text{ ec.}, \quad \text{in} \quad \Delta u_{-m}, \Delta^2 u_{-m}, \Delta^3 u_{-m}, \text{ ec.},$$

e n in $n+m$, purchè l'indice sia contato a partire dallo zero attuale.

L'origine degl'indici sarebbe situato simmetricamente, se essa fosse alla metà dell'intervallo abbracciato dalla riunione dei dati valori; ma bisogna allora distinguere il caso in cui il numero di questi valori è impari da quello nel quale esso è pari. Nel primo caso, l'origine degli indici cade sopra la quantità media, da ciascuna parte della quale si riuniscono simmetricamente gli altri valori e le loro differenze, quando si scrivono come nella tavola seguente, ove ciascuna differenza è situata al di sotto e fra le quantità da cui essa deriva.

Gl'indici essendo

$$\text{ec.}, -4, -3, -2, -1, \qquad 0, +1, +2, +3, +4, \text{ ec.},$$

i valori di u_x e le loro differenze saranno indicate da

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\text{ec. } u_{-4} & & u_{-3} & & u_{-2} & & u_{-1} & & u & & u_1 & & u_2 & & u_3 & & u_4 \text{ ec.} \\
& \Delta u_{-4} & & \Delta u_{-3} & & \Delta u_{-2} & & \Delta u_{-1} & & \Delta u & & \Delta u_1 & & \Delta u_2 & & \Delta u_3 & \\
& & \Delta^2 u_{-4} & & \Delta^2 u_{-3} & & \Delta^2 u_{-2} & & \Delta^2 u_{-1} & & \Delta^2 u & & \Delta^2 u_1 & & \Delta^2 u_2 & & \\
& & & \Delta^3 u_{-4} & & \Delta^3 u_{-3} & & \Delta^3 u_{-2} & & \Delta^3 u_{-1} & & \Delta^3 u & & \Delta^3 u_1 & & & \\
& & & & \Delta^4 u_{-4} & & \Delta^4 u_{-3} & & \Delta^4 u_{-2} & & \Delta^4 u_{-1} & & \Delta^4 u & & & & \\
& & & & & \Delta^5 u_{-4} & & \Delta^5 u_{-3} & & \Delta^5 u_{-2} & & \Delta^5 u_{-1} & & & & & \\
& & & & & & \Delta^6 u_{-4} & & \Delta^6 u_{-3} & & \Delta^6 u_{-2} & & & & & & \\
& & & & & & & \Delta^7 u_{-4} & & \Delta^7 u_{-3} & & & & & & & \\
& & & & & & & & \Delta^8 u_{-4}. & & & & & & & &
\end{array}$$

Cominciamo dal non considerare che i tre valori u_{-1}, u, u_1, e arrestiamoci in conseguenza alle seconde differenze che supporremo costanti. Prendendo le quantità h e h' a cominciare da u, la formula del n.° 43 darà, a motivo di $h=1$, e di $\Delta^2 u = \Delta^2 u_{-1}$,

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\Delta u + \frac{h'(h'-1)}{1.2}\Delta^2 u_{-1}$$

$$= u + \frac{h'}{1}\left\{\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u_{-1}\right\} + \frac{h'^2}{2}\Delta^2 u_{-1};$$

ma

$$\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u_{-1} = \frac{2\Delta u - \Delta^2 u_{-1}}{2} = \frac{\Delta u + \Delta u - \Delta^2 u_{-1}}{2}$$

$$= \frac{\Delta u + \Delta u_{-1}}{2};$$

dunque

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} + \frac{h'^2}{1.2}\,\Delta^2 u_{-1}.$$

Supponiamo inseguito cinque valori, u_{-2}, u_{-1}, u, u_1, u_2, ciò ci condurrà alle differenze quarte, che bisognerà trattare come costanti; ponendo

$$\Delta^4 u = \Delta^4 u_{-1} = \Delta^4 u_{-2};$$

avremo

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\Delta u + \frac{h'(h'-1)}{1.2}\,\Delta^2 u$$

$$+ \frac{h'(h'-1)(h'-2)}{1.2.3}\,\Delta^3 u$$

$$+ \frac{h'(h'-1)(h'-2)(h'-3)}{1.2.3.4}\,\Delta^4 u_{-2}.$$

Mettendo in quest' espressione $\Delta^2 u_{-1} - \Delta^3 u_{-1}$, in luogo di $\Delta^2 u$; $\Delta^3 u_{-1} - \Delta^4 u_{-2}$, in luogo di $\Delta^3 u$, cominceremo dal trovare

$$u_x = u + \frac{h'}{2}\,(\Delta u + \Delta u_{-1}) + \frac{h'^2}{2}\,\Delta^2 u_{-1}$$

$$+ \frac{h'(h'-1)}{1.2}\left\{ \Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\left(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^4 u_{-2} + \frac{h'-3}{4}\,\Delta^4 u_{-2}\right)\right\}$$

Quello che è fra le grappe, nell' ultima linea, può scriversi così:

$$\left(1 + \frac{h'-2}{3}\right)\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\left(1 + \frac{h'-3}{4}\right)\Delta^4 u_{-2}$$

$$= \frac{h'+1}{3}\,\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{3}\cdot\frac{h'+1}{4}\,\Delta^4 u_{-2}$$

$$= \frac{h'+1}{3}\left\{\Delta^3 u_{-1} + \frac{h'-2}{4}\,\Delta^4 u_{-2}\right\}$$

$$= \frac{h'+1}{3}\cdot\frac{2\Delta^3 u_{-1} + 2\Delta^3 u_{-1} - 2\Delta^4 u_{-2} + h'\Delta^4 u_{-2}}{4}$$

$$= \frac{h'+1}{3}\left\{\frac{\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2}}{2}\right\} + \frac{h'(h'+1)}{3.4}\,\Delta^4 u_{-2};$$

e da ciò si conclude

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} + \frac{h'(h'-1)(h'+1)}{1.2.3}\cdot\frac{(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})}{2}$$

$$+ \frac{h'^2}{1.2}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{h'^2(h'-1)(h'+1)}{1.2.3.4}\,\Delta^4 u_{-1}.$$

E senza dubbio lo Stirling per mezzo di un'induzione presso a poco simile ha trovato la seguente formula,

$$u_x = u + \frac{h'}{1}\,\frac{(\Delta u + \Delta u_{-1})}{2} + \frac{h'(h'^2-1)}{1.2.3}\,\frac{(\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2})}{2}$$

$$+ \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5}\,\frac{(\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3})}{2}$$

$$+ \frac{h'(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7}\,\frac{(\Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4})}{2}$$

$$+ \text{ ec.}$$

$$+ \frac{h'^2}{1.2}\,\Delta^2 u_{-1} + \frac{h'^2(h'^2-1)}{1.2.3.4}\,\Delta^4 u_{-2}$$

$$+ \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6}\,\Delta^6 u_{-3}$$

$$+ \frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)(h'^2-9)}{1.2.3.4.5.6.7.8}\,\Delta^8 u_{-4}$$

$$+ \text{ ec.},$$

che egli non ha dimostrata, ma che sarà fatto in una maniera generalissima e semplicissima, all' articolo Funzioni generatrici.

Lo Stirling ha fatto, per abbreviare,

$$\Delta u + \Delta u_{-1} = \mathrm{B}, \qquad \Delta^2 u_{-1} = b,$$
$$\Delta^3 u_{-1} + \Delta^3 u_{-2} = \mathrm{C}, \qquad \Delta^4 u_{-2} = c,$$
$$\Delta^5 u_{-2} + \Delta^5 u_{-3} = \mathrm{D}, \qquad \Delta^6 u_{-3} = d,$$
$$\Delta^7 u_{-3} + \Delta^7 u_{-4} = \mathrm{E}, \qquad \Delta^8 u_{-4} = e,$$
$$\text{ec.},$$

il che dà

$$u_x = u + \frac{\mathrm{B}h' + bh'^2}{1.2}$$

$$+ \frac{2\mathrm{C}h' + ch'^2}{1.2}\cdot\frac{h'^2-1}{3.4}$$

$$+ \frac{3\mathrm{D}h' + dh'^2}{1.2}\cdot\frac{h'^2-1}{3.4}\cdot\frac{h'^2-4}{5.6}$$

$$+ \frac{4\mathrm{E}h' + eh'^2}{1.2}\cdot\frac{h'^2-1}{3.4}\cdot\frac{h'^2-4}{5.6}\cdot\frac{h'^2-9}{7.8}$$

$$+ \text{ ec.}$$

46. Allorquando il numero delle quantità date è pari, si pone l' origine degl' indici nel mezzo dell' intervallo che separa le due quantità medie; e per evitare gl' indici frazionari, si mette fra questi numeri una differenza di due unità, come si vede dalla prima linea della seguente tavola

ec.	-7,	-5,	-3,	-1,	o,	$+1$,	$+3$,	$+5$,	$+7$, ec.,
ec. u_{-7}		u_{-5}		u_{-3}		u_{-1}		u_1	u_3	u_5	u_7 ec.,
	Δu_{-7}		Δu_{-5}		Δu_{-3}		Δu_{-1}		Δu_1	Δu_3	Δu_5
		$\Delta^2 u_{-7}$		$\Delta^2 u_{-5}$		$\Delta^2 u_{-3}$		$\Delta^2 u_{-1}$		$\Delta^2 u_1$	$\Delta^2 u_3$
			$\Delta^3 u_{-7}$		$\Delta^3 u_{-5}$		$\Delta^3 u_{-3}$		$\Delta^3 u_{-1}$	$\Delta^3 u_1$	
				$\Delta^4 u_{-7}$		$\Delta^4 u_{-5}$		$\Delta^4 u_{-3}$		$\Delta^4 u_{-1}$	
					$\Delta^5 u_{-7}$		$\Delta^5 u_{-5}$		$\Delta^5 u_{-3}$		
						$\Delta^6 u_{-7}$		$\Delta^6 u_{-5}$			
							$\Delta^7 u_{-7}$.				

Lo Stirling dà, per questo caso, la formula

$$u_x = \frac{(u_1+u_{-1})}{2} + \frac{h'^2-1}{2.4}\,\frac{(\Delta^2 u_{-1}+\Delta^2 u_{-3})}{2}$$

$$+\frac{(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8}\cdot\frac{(\Delta^4 u_{-3}+\Delta^4 u_{-5})}{2}$$

$$+\frac{(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12}\cdot\frac{(\Delta^6 u_{-5}+\Delta^6 u_{-7})}{2}+\text{ec.}$$

$$+\frac{h'}{2}\Delta u_{-1}+\frac{h'(h'^2-1)}{2.4.6}\Delta^3 u_{-3}+\frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)}{2.4.6.8.10}\Delta^5 u_{-5}$$

$$+\frac{h'(h'^2-1)(h'^2-9)(h'^2-25)}{2.4.6.8.10.12.14}\Delta^7 u_{-7}+\text{ec.},$$

che abbrevia, ponendo

$$\begin{array}{ll} u_1+u_{-1}=A, & \Delta u_{-1}=a, \\ \Delta^2 u_{-1}+\Delta^2 u_{-3}=B, & \Delta^3 u_{-3}=b, \\ \Delta^4 u_{-3}+\Delta^4 u_{-5}=C, & \Delta^5 u_{-5}=c, \\ \Delta^6 u_{-5}+\Delta^6 u_{-7}=D, & \Delta^7 u_{-7}=d, \\ \text{ec.}, & \end{array}$$

donde segue

$$u_x = \frac{A+ah'}{2}$$

$$+\frac{3B+bh'}{2}\cdot\frac{h'^2-1}{4.6}$$

$$+\frac{5C+ch'}{2}\cdot\frac{h'^2-1}{4.6}\cdot\frac{h'^2-9}{8.10}$$

$$+\frac{7D+dh'}{2}\cdot\frac{h'^2-1}{4.6}\cdot\frac{h'^2-9}{8.10}\cdot\frac{h'^2-25}{12.14}$$

$$+\text{ec.}$$

Questa formula si deduce da quella del numero precedente, osservando che le prime differenze sono in numero pari, nella tavola della pagina 370, e che il loro termine generale è rappresentato da Δu_x; si cangerà dunque h' in $h'+1$ nell' espressione di u_x del numero citato, poi ne sottrarremo il primo valore; i valori di u e le loro differenze non dipendendo da h', non variano; non avremo perciò che da differenziare i loro coefficienti, come qui sotto lo facciamo per un termine di ciascuna delle due serie che compongono il valore di u_x. Nella prima,

$$\frac{h'}{2}\cdot\frac{(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5},$$

che equivale a

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-2)(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5},$$

diventa

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5};$$

sottraendo da questo valore il precedente, si troverà

$$\frac{1}{2}\,\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5}\left\{(h'+3)-(h'-2)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4}$$

Nella seconda serie, il coefficiente

$$\frac{h'^2(h'^2-1)(h'^2-4)}{1.2.3.4.5.6}=\frac{(h'-2)(h'-1)h'.h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}$$

si cangia in

$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+1)(h'+2)(h'+3)}{1.2.3.4.5.6}$$

e la differenza di questo valore al precedente è

$$\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4.5.6}\left\{(h'+1)(h'+3)-(h'-2)h'\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)(2h'+1)}{1.2.3.4.5}.$$

Operando egualmente sopra gli altri coefficienti, si troverà

$$\Delta u_x=\frac{(\Delta u+\Delta u_{-1})}{2}+\frac{h'(h'+1)}{1.2}\cdot\frac{(\Delta^3 u_{-1}+\Delta^3 u_{-2})}{2}$$

$$+\frac{(h'-1)h'(h'+1)(h'+2)}{1.2.3.4}\,\frac{(\Delta^5 u_{-2}+\Delta^5 u_{-3})}{2}+\text{ec.}$$

$$+\frac{(2h'+1)}{1}\,\frac{\Delta^2 u_{-1}}{2}+\frac{(2h'+1)(h'+1)h'}{1.2.3}\cdot\frac{\Delta^4 u_{-2}}{2}$$

$$+\frac{(2h'+1)(h'+2)(h'+1)h'(h'-1)}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{\Delta^6 u_{-3}}{2}+\text{ec.}$$

Quest' espressione è quella di una prima differenza; ma passeremo all' espressione di u_x, diminuendo di un' unità gli esponenti delle caratteristiche Δ, poichè ciò equivale a prendere le prime differenze per delle quantità primitive, le differenze seconde per delle differenze prime, e così di seguito; e siccome la formula dalla quale abbiamo cominciato suppone che i valori dati siano in numero impari, le loro differenze, prese adesso per i valori dati, sono necessariamente in numero pari, come si può vedere nella seconda linea della tavola del n.° 45; ma per situare l' origine degl' indici fra le due quantità medie che qui sono indicate da u_{-1} e u, e fare in modo che la differenza di quest' indici sia di due unità, bisogna scrivere $\frac{h'-1}{2}$, invece di h, e quindi sostituire invece dei valori.

$$\ldots\ u_{-4},\ u_{-3},\ u_{-2},\ u_{-1},\ u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots$$

i valori

$$\ldots\ u_{-7},\ u_{-5},\ u_{-3},\ u_{-1},\ u_1,\ u_3,\ u_5,\ u_7,\ \ldots$$

Effettuando accuratamente queste trasformazioni, ricaderemo sopra l'espressione di u_x relativa al caso in cui il numero delle quantità date è pari.

47. Fin qui abbiamo supposto che le differenze dei valori della variabile indipendente x fossero eguali fra loro; questa circostanza non incontrandosi sempre, conviene costruire una formula che non sia soggetta a quest' ipotesi. Si giunge egualmente a ciò prendendo ancora per termine generale della serie delle quantità date, una funzione razionale e intera della variabile x.

Questa funzione, scritta sotto la forma

$$u_x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots + Px^n,$$

e diventando successivamente

$$u,\ u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots\ u_n,$$

quando diamo ad x i valori

$$a,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_n,$$

dà per determinare i coefficienti A, B, C, D, ec., l'equazioni

$$u = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + ec.,$$

$$u_1 = A + Ba_1 + Ca_1^2 + Da_1^3 + ec.,$$

$$u_2 = A + Ba_2 + Ca_2^2 + Da_2^3 + ec.,$$

$$u_3 = A + Ba_3 + Ca_3^2 + Da_3^3 + ec.,$$

ec.

il di cui numero, $n+1$, è eguale a quello dei coefficienti A, B, . . . P. Se si sottrae successivamente la prima dalla seconda, questa dalla terza, è così di seguito, si giunge a risultamenti respettivamente divisibili per $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ec., donde si ricava

$$\frac{u_1 - u}{a_1 - a} = B + C(a_1 + a) + D(a_1^2 + a_1 a + a^2) + ec.,$$

$$\frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + ec.,$$

$$\frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = B + C(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + ec.,$$

ec.

Per rammentare l'analogia che i primi membri di quest' equazioni hanno con le differenze, faremo come il Laplace,

$$\frac{u_1 - u}{a_1 - a} = \delta u,\ \frac{u_2 - u_1}{a_2 - a_1} = \delta u_1,\ \frac{u_3 - u_2}{a_3 - a_2} = \delta u_2,\ ec.,$$

ed allora avremo

$$\delta u = B + C(a_1 + a) + D(a_1^2 + a_1 a + a^2) + ec.,$$

$$\delta u_1 = B + C(a_2 + a_1) + D(a_2^2 + a_2 a_1 + a_1^2) + ec.,$$

$$\delta u_2 = B + D(a_3 + a_2) + D(a_3^2 + a_3 a_2 + a_2^2) + ec.,$$

ec.

Sottraendo ancora ciascuna di quest' equazioni da quella che la segue, i risultamenti diventeranno respettivamente divisibili per a_2-a, a_3-a_1, ec.; e facendo, secondo lo spirito della notazione stabilita di sopra,

$$\frac{\delta u_1-\delta u}{a_2-a}=\delta^2 u,\quad \frac{\delta u_2-\delta u_1}{a_3-a_1}=\delta^2 u_1,\ \text{ec.},$$

si troverà

$$\delta^2 u=C+D(a_2+a_1+a)+\text{ec.},$$
$$\delta^2 u_1=C+D(a_3+a_2+a_1)+\text{ec.},$$
$$\text{ec.}$$

sottraendo ancora ciascuna di quest' equazioni da quella che segue, i resultamenti saranno divisibili per a_3-a, ec., si farà dunque

$$\frac{\delta^2 u_1-\delta^2 u}{a_3-a}=\delta^3 u,\ \text{ec.},$$

ed otterremo

$$\delta^3 u=D+\text{ec.}$$

Il metodo del calcolo è di già sufficientemente stabilito per continuarsi quanto vorremo.

Se non si avessero che quattro valori dati, u, u_1, u_2, e u_3, l' espressione di u_x potrebbe arrestarsi al termine Dx^3; allora l' equazioni di sopra condurrebbero a

$$D=\delta^3 u,$$
$$C=\delta^2 u-(a_2+a_1+a)\delta^3 u,$$
$$B=\delta u-(a_1+a)\delta^2 u+(a_2a_1+a_2a+a_1a)\delta^3 u$$
$$A=u-a\delta u+a_1a\delta^2 u-a_2a_1a\delta^3 u;$$

e sostituendo questi valori nell' espressione di u_x; si avrebbe

$$u_x=u+(x-a)\delta u+[x^2-(a_1+a)x+a_1a]\delta^2 u$$
$$+[x^3-(a_2+a_1+a)x^2+(a_2a_1+a_2a+a_1a)x-a_2a_1a]\delta^3 u.$$

Con facilità si vede che i coefficienti di δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, possono decomporsi in fattori semplici; e facendolo, viene

$$u_x=u+(x-a)\delta u+(x-a)(x-a_1)\delta^2 u+(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\delta^3 u.$$

Quest' espressione può estendersi a quel numero di valori dati che vorremo, per mezzo delle quantità δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ec., di cui la successiva derivazione è indicata dal segnito dell' equazioni

$$\frac{u_1-u}{a_1-a}=\delta u,\quad \frac{u_2-u_1}{a_2-a_1}=\delta u_1,\quad \frac{u_3-u_2}{a_3-a_2}=\delta u_2,\quad \frac{u_4-u_3}{a_4-a_3}\delta u_3,\ \text{ec.},$$

$$\frac{\delta u_1-\delta u}{a_2-a}=\delta^2 u,\quad \frac{\delta u_2-\delta u_1}{a_3-a_1}=\delta^2 u_1,\quad \frac{\delta u_3-\delta u_2}{a_4-a_2}=\delta^2 u_2,\ \text{ec.},$$

$$\frac{\delta^2 u_1-\delta^2 u}{a_3-a}=\delta^3 u,\quad \frac{\delta^2 u_2-\delta^2 u_1}{a_4-a_1}=\delta^3 u_1,\ \text{ec.},$$

$$\frac{\delta^3 u_1-\delta^3 u}{a_4-a}=\delta^4 u,\ \text{ec.},$$

ec.,

comprese nell' equazione generale

$$\frac{\delta^{s-1}u_{r+1}-\delta^{s-1}u_r}{a_{r+s}-a_r}=\delta^s u_r.$$

Con queste condizioni avremo

$$u_x=u+(x-a)\delta u+(x-a)(x-a_1)\delta^2 u+(x-a)(x-a_1)(x-a_2)\delta^3 u$$
$$+(x-a)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\delta^4 u+\text{ec.}\ldots.$$

48. Quando i valori a, a_1, a_2, ... sono equidifferenti, si ha

$$a_1=a+h,\ a_2=a+2h,\ \ldots.\ a_n=a+nh;$$

donde segue

$$\delta u=\frac{\Delta u}{h},\ \delta u_1=\frac{\Delta u_1}{h},\ \delta u_2=\frac{\Delta u_2}{h},\ \delta u_3=\frac{\Delta u_3}{h},\ \text{ec.},$$

$$\delta^2 u=\frac{\Delta^2 u}{2h^2},\ \delta^2 u_1=\frac{\Delta^2 u_1}{2h^2},\ \delta^2 u_2=\frac{\Delta^2 u_2}{2h^2},\ \text{ec.},$$

$$\delta^3 u=\frac{\Delta^3 u}{2.3h^3},\ \delta^3 u_1=\frac{\Delta^3 a_1}{2.3h^3},\ \text{ec.},$$

$$\delta^4 u=\frac{\Delta^4 u}{2.3.4h^4},\ \text{ec.},$$

ec.

Con questi valori e facendo $x-a=h'$, ricaderemo sopra l'espressione di u_x ottenuta nel n.° 43.

49. I coefficienti rappresentati da δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ec., sono capaci di una forma degna di osservazione, infatti

$$\delta u=\frac{u_1-u}{a_1-a}=\frac{u_1}{u_1-a}+\frac{u}{a-a_1},$$

$$\delta^2 u=\frac{\delta u_1-\delta u}{a_2-a}=\frac{1}{a_2-a}\left\{\frac{u_2}{a_2-a_1}+\frac{u_1}{a_1-a_2}-\frac{u_1}{a_1-a}-\frac{u}{a-a_1}\right\}$$

e se si riduce insieme i due termini affetti da u_1, verrà

$$\delta^2 u=\frac{u_2}{(a_2-a)(a_2-a_1)}+\frac{a_1}{(a_1-a)(a_1-a_2)}+\frac{u}{(a-a_2)(a-a_1)};$$

otterremo similmente

$$\left.\begin{aligned}\delta^3 u=&\frac{u_3}{(a_3-a)(a_3-a_1)(a_3-a_2)}+\frac{u_2}{(a_2-a)(a_2-a_1)(a_2-a_3)}\\&+\frac{u_1}{(a_1-a)(a_1-a_2)(a-a_3)}+\frac{u}{(a-a_1)(a-a_2)(a-a_3)}\end{aligned}\right\};$$

il che basta per mettere in evidenza la legge di quest' espressioni.

Sostituendoli nel valore di u_x, e riunendo i termini nei quali u ha il medesimo indice, si avrebbe un risultamento della forma

$$u_x = \alpha u + \beta u_1 + \gamma u_2 + \text{ec.},$$

che si ottiene immediatamente in modo molto più semplice, come vedremo quanto prima.

Non è inutile, per l'applicazione della formula del n.° 47, l'osservare che se per x mettiamo successivamente i valori a, a_1, a_2, ec., formeremo l'equazioni.

$$\begin{aligned}
u &= u,\\
u_1 &= u + (a_1 - a)\delta u,\\
u_2 &= u + (a_2 - a)\delta u + (a_2 - a)(a_2 - a_1)\delta^2 u,\\
u_3 &= u + (a_3 - a)\delta u + (a_3 - a)(a_3 - a_1)\delta^2 u + (a_3 - a)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)\delta^3 u,\\
&\text{ec.},
\end{aligned}$$

per mezzo delle quali ciascuno dei coefficienti δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ec., è determinato da quelli che lo precedono.

50. L'Eulero si è occupato specialmente dell'espressioni della forma

$$u_x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^7 + \text{ec.},$$

$$u_x = Ax^2 + Bx^4 + Cx^6 + Dx^8 + \text{ec.},$$

ma non importa di arrestarci molto sopra le medesime, mentre i loro coefficienti si deducono da quelli della formula del n.° precedente. Basta a ciò, l'osservare che dividendo per x i due membri della prima, e per x^2 quelli della seconda, se ne deducono le seguenti

$$\frac{u_x}{x} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{ec.},$$

$$\frac{u_x}{x^2} = A + Bx^2 + Cx^4 + Dx^6 + \text{ec.},$$

le quali diventano

$$u'_{x'} = A + Bx' + Cx'^2 + Dx'^3 + \text{ec.};$$

quando facciamo $x^2 = x'$ o che invece della funzione $u'_{x'}$ si sostituiscono le funzioni $\frac{u_x}{x}$ e $\frac{u_x}{x^2}$. Effettuati questi cangiamenti nei valori di A, B, C, ec. ottenuti precedentemente n.° 47, essi daranno quelli che convengono alle formule proposte.

L'espressione di $u'_{x'}$, essendo messa sotto la forma data in ultimo luogo a quella di u_x (n.° 47), diventerà

$$u'_{x'} = u' + (x^2 - a^2)\delta u' + (x^2 - a^2)(x^2 - a^2_1)\delta^2 u' + \text{ec.},$$

ove non rimarrà più da mettere per la funzione $u'_{x'}$, e le quantità che ne derivano, che ciascuno dei valori $\frac{u_x}{x}$, $\frac{u_x}{x^2}$, con i quali u' si cangia successivamente in $\frac{u}{a}$ e $\frac{u}{a^2}$: i valori di $\delta u'$, $\delta^2 u'$, $\delta^3 u'$, ec., sviluppati come lo sono quelli di δu, $\delta^2 u$, $\delta^3 u$, ec., nel n.° 49 saranno simili a quelli che l'Eulero ha trovato per i coefficienti delle sue formule.

51. Le leggi per l' eliminazione dell' incognite, nell'equazioni del primo grado, fanno vedere che i valori di A, B, C, D, ec., dedotti dall' equazioni

$$u = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{ec.},$$

$$u_1 = A + Ba_1 + Ca_1^2 + Da_1^3 + \text{ec.},$$

$$u_2 = A + Ba_2 + Ca_2^2 + Da_2^3 + \text{ec.},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_n = A + Ba_n + Ca_n^2 + Da_n^3 + \text{ec.},$$

non potrebbero contenere le quantità u, u_1, u_2, ... u_n; che al primo grado, e nel numeratore solamente. Segue da ciò che possiamo stabilire l' equazione

$$u_x = Xu + X_1u_1 + X_2u_2 \dots + X_nu_n;$$

allora le funzioni X, X_1, X_2, ... X_n, non dipenderanno che dalla variabile x e dai suoi valori a, a_1, a_2, ... a_n, ed avremo $u_x = u$ quando $x = a$, se

$$X = 1, \quad X_1 = 0, \quad X_2 = 0 \dots\dots X_n = 0;$$

$u_x = u_1$, quando $x = a_1$, se

$$X = 0, \; X_1 = 1, \; X_2 = 0 \dots\dots X_n = 0;$$

$u_x = u_2$, quando $x = a_2$, se

$$X = 0, \; X_1 = 0, \; X_2 = 1 \dots\dots X_n = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$u_x = u_n$, quando $x = a_n$, se

$$X = 0, \; X_1 = 0, \; X_2 = 0 \dots\dots X_n = 1.$$

Considerando per colonne il quadro delle condizioni indicate di sopra, si vede subito che la funzione X deve sparire quando diamo ad x tutti i valori compresi nella serie a, a_1, a_2, ... a_n, eccettuato il primo. Si soddisfà a questa condizione, nel modo il più semplice, prendendo il prodotto

$$(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n),$$

che la supposizione di $x = a$ cangia in

$$(a-a_1)(a-a_2) \dots (a-a_n);$$

dividendo dunque il primo prodotto per il secondo, il quoziente, che diventa l' unità quando $x = a$, adempirà tutte le condizioni imposte per la funzione X e potremo fare per conseguenza

$$X = \frac{(x-a_1)(x-a_2) \dots (x-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2) \dots (a-a_n)}.$$

Si troverà egualmente

$$X_1 = \frac{(x-a)(x-a_2) \dots (x-a_n)}{(a_1-a)(a_1-a_2) \dots (a_1-a_n)},$$

$$X_2 = \frac{(x-a)(x-a_1) \dots (x-a_n)}{(a_2-a)(a_2-a_1) \dots (a_2-a_n)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_n = \frac{(x-a)(x-a_1) \dots (x-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1) \dots (a_n-a_{n-1})};$$

avremo perciò l'espressione

$$u_x = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a-a_1)(a-a_2)\ldots\ldots(a-a_n)}u + \frac{(x-a)(x-a_2)\ldots\ldots(x-a_n)}{(a_1-a)(a_1-a_2)\ldots\ldots(a_1-a_n)}u_1 + \frac{(x-a)(x-a_1)\ldots\ldots(x-a_{n-1})}{(a_n-a)(a_n-a_1)\ldots\ldots(a_n-a_{n-1})}u_n,$$

comodissima per le applicazioni, poichè possiamo calcolarne immediatamente tutti i termini per mezzo dei logaritmi.

52. Questa formula, che dobbiamo al Lagrange, merita osservazione non solamente per la sua eleganza, ma ancora perchè essa prova molto bene che l'interpolazione è un problema indeterminato, quando s'ignora le forme della funzione donde deriva la serie dei numeri dati (n.° 42).

Infatti, il prodotto

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots\ldots\ldots(x-a_n),$$

che forma il numeratore di X, non è la sola funzione capace di annullarsi, per i valori $x = a_1, a_2, \ldots\ldots = a_n$. Se ci serviamo delle funzioni circolari, si trova subito l'espressione semplicissima

$$\operatorname{sen} p(x-a_1)\operatorname{sen} q(x-a_2)\ldots\ldots\operatorname{sen} t(x-a_n),$$

che gode di questa proprietà, qualunque sieno i numeri $p, q, \ldots\ldots t$; potremo perciò stabilire ancora

$$X = \frac{\operatorname{sen} p(x-a_1)\operatorname{sen} q(x-a_2)\ldots\operatorname{sen} t(x-a_n)}{\operatorname{sen} p(a-a_1)\operatorname{sen} q(a-a_2)\ldots\operatorname{sen} t(a-a_n)},$$

$$X_1 = \frac{\operatorname{sen} p'(x-a)\operatorname{sen} q'(x-a_2)\ldots\ldots\operatorname{sen} t'(x-a_n)}{\operatorname{sen} p'(a_1-a)\operatorname{sen} q'(a_1-a_2)\ldots\ldots\operatorname{sen} t'(a_1-a_n)},$$

osservando che i numeri $p', q', \ldots t'$, possono essere differenti dai numeri p, $q, \ldots t$, e così di seguito per tutte le altre funzioni X.

Se simili espressioni si accordano con quelle del numero precedente, per i valori di x compresi nella serie $a, a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$, esse ne differiscono molto fra mezzo, quando gli archi non sono abbastanza piccoli per essere sensibilmente proporzionali ai loro seni.

Possiamo variare queste formule in un gran numero di maniere, lo Charles ne ha proposte diverse altre, delle quali ecco le più semplici. Rappresentando la semicirconferenza per π, e supponendo che i valori a, a_1, a_2, ec. siano il seguito naturale dei numeri 0, 1, 2, 3, ec., possiamo fare

$$u_x = p\frac{u\operatorname{sen}\pi x}{\operatorname{sen} p\pi x} + q\frac{u_1\operatorname{sen}\pi(x-1)}{\operatorname{sen} q\pi(x-1)} + r\frac{u_2\operatorname{sen}\pi(x-2)}{\operatorname{sen} r\pi(x-2)} + \text{ec.},$$

$$\pi u_x = p\frac{u\operatorname{sen}\pi x}{e^{px}-1} + q\frac{u_1\operatorname{sen}\pi(x-1)}{e^{q(x-1)}-1} + r\frac{u_2\operatorname{sen}\pi(x-2)}{e^{r(x-2)}-1} + \text{ec.}$$

$$\pi^2 u_x = (\operatorname{sen}\pi x)^2\left\{\frac{u}{x^2} - \frac{u_1}{(x-1)^2} + \frac{u_2}{(x-2)^2} - \frac{u_3}{(x-3)^3} + \text{ec.}\right\}.$$

Nelle due prime formule, le quantità p, q, r, ec., sono indeterminate, ma pe-

rò soggette, nella prima, alla condizione di non essere numeri interi o frazioni il di cui denominatore sia minore del più forte indice di u. Queste quantità possono servire ad adempire delle condizioni, alle quali sarebbero sottoposti in particolare i valori intermediari che si cerca.

La composizione di queste formule è fondata, come quella delle precedenti, sopra la condizione che i due membri diventino identici allorquando si fa successivamente

$$x=0 \text{ e } u_x=u, \quad x=1 \text{ e } u_x=u_1, \quad x=2 \text{ e } u_x=u_2, \text{ ec.}$$

Il secondo membro comincia dal ridursi ad un solo termine, il quale, per verità si presenta, sotto la forma di $\frac{0}{0}$, ma di cui è facile trovare il vero valore. Infatti, se supponiamo, per esempio, $x=1$, i numeratori dei termini delle due prime formule si annullano tutti, ma non vi è che il denominatore del secondo termine, al quale succede altrettanto; adesso, se osserviamo, che

$$\operatorname{sen}\pi(x-1)=\frac{\pi(x-1)}{1}-\frac{\pi^3(x-1)^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

(*Vedi* Circolari Funzioni)

$$e^{q(x-1)}-1=\frac{q(x-1)}{1}+\frac{q^2(x-1)^2}{1.2}+\text{ec.}$$

(*Vedi* Esponenziali Funzioni)

vedremo che l'espressioni $q\frac{u_1\operatorname{sen}\pi(x-1)}{\operatorname{sen}q\pi(x-1)}$, $q\frac{u_1\operatorname{sen}\pi(x-1)}{e^{q(x-1)}-1}$, si riducono, l'una ad u_1, l'altra a πu_1, quando $x=1$. I numeratori di tutti i termini del secondo membro della terza formula essendo moltiplicati per $(\operatorname{sen}\pi x)^2$, si annulleranno tutte le volte che x sarà eguale a un numero intero; ma non vi è che un solo denominatore che si annulli: quando si ha, per esempio, $x=1$, il termine $-\frac{u_1(\operatorname{sen}\pi x)^2}{(x-1)^2}$ si riduce a $\pi^2 u_1$.

Il Lagrange, in ultimo luogo, ha indicato la formula

$$u_x=A'\operatorname{sen}\frac{\pi x}{a}+A''\operatorname{sen}\frac{2\pi x}{a}+A'''\operatorname{sen}\frac{3\pi x}{a}+\text{ec.},$$

come adattata a servire all'interpolazione di una serie di termini periodici che diventeranno di nuovo o, per tutti i valori di x compresi nella serie a, $2a$, $3a$, ec.

Da ciò che precede, dobbiamo concludere che alcune funzioni possono avere, per gli accrescimenti dati alla variabile indipendente, delle differenze costanti, senza perciò cangiare uniformemente in tutta la serie dei loro valori. Questa considerazione, che qui non viene che indicata, si presenterà di nuovo nella discussione sopra la specie delle quantità che la formazione delle differenze suppone costanti.

53. La funzione a^x, avendo delle differenze crescenti d'ordine in ordine (n.° 35), quando $a^h-1>1$, può usarsi per rappresentare una serie che seguirebbe questo metodo; e il signor Prony dà un metodo semplicissimo per determinare,

con un numero sufficiente di valori conosciuti, i coefficienti A, B, C, ec., e le quantità α, β, γ, ec. dell'espressione

$$u_x = A\alpha^x + B\beta^x + C\gamma^x + \text{ec.};$$

ma siccome questo metodo in ultima analisi equivale a trovare il termine generale delle serie ricorrenti, questione che sarà esaminata in seguito, così non ne parleremo per ora.

Faremo solamente osservare presentemente, che un numero essendo conosciuto, quando abbiamo determinato il suo logaritmo, possiamo applicare l'interpolazione alla serie dei logaritmi dei numeri dati. Lo Stirling ha preso questo metodo per la serie

$$1,\quad 1.1,\quad 1.2,\quad 1.2.3,\ \ldots\ldots 1.1.2.3\ldots n$$

le di cui differenze crescono in tutti gli ordini e che rispondono alla serie

$$l1,\quad l1+l1,\quad l1+l2,\quad l1+l2+l3,\ \text{ec.},$$

le di cui differenze prime, sono i logaritmi della serie naturale dei numeri.

54. La prima idea di estendere una tavola, inserendo nuovi termini fra quelli che essa contiene, sembra appartenere al Briggs; ma al Mouton dobbiamo le nozioni più semplici sopra questo soggetto. Il metodo che egli pubblicò, fino dal 1670, è non solamente curioso, ma potrebbe avere il vantaggio della brevità, sopra le formule riferite precedentemente, se si trattasse d'inserire un gran numero di termini consecutivi in una tavola data.

In luogo di calcolare ciascuno dei nuovi termini isolatamente, egli cerca le differenze successive che debbono regnare fra questi termini, e completa la tavola per mezzo della sola addizione, come l'abbiamo indicato n.° 24. Il principio fondamentale di questo metodo consiste a supporre che *quando una serie conduce a differenze costanti, per indici equidifferenti, i numeri intermediari avranno ancora differenze costanti nel medesimo ordine, se essi rispondano a intervalli eguali.* Ciò non è vero che per le funzioni razionali e intere, e risulta allora dall'espressione $\Delta^m . x^m$ (n.° 29), che rimane la medesima quando l'accrescimento h non cangia. Passiamo adesso all'applicazione.

Sia la serie dei numeri

$$0,\quad 15,\quad 41,\quad 87,\quad 162,\quad 275,\quad \text{ec.},$$

le di cui differenze terze sono costanti, e fra i termini consecutivi della quale ci proponiamo d'inserirne due nuovi, soggetti alla medesima legge; bisognerà per conseguenza che nelle nuove serie le terze differenze siano egualmente costanti.

Per abbreviare, indicando, con la lettere a, b, c, d, il primo termine di questa serie, la sua differenza seconda e la sua differenza terza, formeremo, con i principj del n.° 24, questa tavola.

INDICI	NUMERI	1.me DIFFER.	2.e DIF.	3.e DIF.
1	a			
2	$a+b$	b		
3	$a+2b+c$	$b+c$	c	
4	$a+3b+3c+d$	$b+2c+d$	$c+d$	d
5	$a+4b+6c+4d$	$b+3c+3d$	$c+2d$	d
6	$a+5b+10c+10d$	$b+4c+6d$	$c+3d$	d
7	$a+6b+15c+20d$	$b+5c+10d$	$c+4d$	d
8	$a+7b+21c+35d$	$b+6c+15d$	$c+5d$	d
9	$a+8b+28c+56d$	$b+7c+21d$	$c+6d$	d
10	$a+9b+36c+84d$	$b+8c+28d$	$c+7d$	d

prolongandola quanto sarà necessario, troveremo, nella prima colonna, tutti i termini di una serie qualunque, le di cui differenze terze sono costanti; ma allorquando avremo intercalato due nuovi termini fra ciascuno di quelli della serie proposta, il secondo di questa serie sarà il quarto della nuova, il terzo diventerà il settimo, ec., e in generale bisognerà lasciare nella prima colonna della tavola, fra ciascuno dei termini che prenderemo, altrettanti termini intermediari quanti ne vogliamo intercalare.

Nell'esempio attuale, i termini dati risponderanno ai seguenti:

INDICI	NUMERI	1.me DIFFER.	2.e DIF.	3.e DIF.
1	a			
4	$a+3b+3c+d$	$3b+3c+d$		
7	$a+6b+15c+20d$	$3b+12c+19d$	$9c+18d$	
10	$a+9b+36c+84d$	$3b+21c+64d$	$9c+45d$	$27d$

Le di cui differenze situate accanto debbono essere identiche con quelle che risultano dai numeri 0, 15, 41, 87, ec. Calcolando quest'ultime; si ottiene 15 per la prima differenza, 11 per la seconda, e 9 per la terza; e paragonandole con la formula che occupa il primo posto in ciascuna colonna della tavola qui sopra, cominciando dalla destra, si trova

$$27d=9,\quad 9c+18d=11,\quad 3b+3c+d=15,$$

donde si ricava $\quad d=\frac{1}{3},\quad c=\frac{5}{9},\quad b=\frac{13}{3}:$

si ha di più $a=0$, e per mezzo di questi valori formaremo successivamente tutti i termini della serie interpolata.

55. Il Monton non fu in grado di risolvere da se la questione che si era proposta; e fu uno dei suoi amici chiamato Regnaud, che costruì per induzione la tavola che riporta nella sua opera, e nella quale le differenze quinte sono supposte costanti; ma la scoperta delle formule generali d'interpolazione, fece obliare il processo proposto dal Monton.

Il Lagrange e il Prony avendolo ripreso, lo hanno ridotto in formule, cosa che si fa facilmente nel seguente modo:

Sia $n+1$ il numero dei termini dati avremo in generale,

$$u_x = u + \frac{x}{1}\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots\ldots(x-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}\Delta^n u \text{ (n.° 42).}$$

Per intercalare $m-1$ termini fra u_x e u_{x+1}, i di cui indici differiscono dall'unità, bisognerà dividere quest'intervallo in m parti eguali, vale a dire, far crescere x con differenze eguali a $\frac{1}{m}$, ovvero, ponendo $x=\frac{t}{m}$, far crescere t dell'unità; ed avremo

$$u_x = u + \frac{t}{m}\Delta u + \frac{t(t-m)}{1.2m^2}\Delta^2 u + \frac{t(t-m)(t-2m)}{1.2.3m^3}\Delta^3 u$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots[t-(n-1)m]}{1.2.3.4\ldots\ldots nm^n}\Delta^n u.$$

Prendendo allora le differenze successive di quest'espressione, rammentandosi che qualunque funzione razionale e intera di una variabile non ha differenze di un ordine superiore al suo grado (n.° 30), otterremo in generale

$$\Delta'^r u_x = \frac{\Delta^r . t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots[t-(r-1)m]}{1.2.3\ldots\ldots rm^r}\Delta^r u$$

$$+ \frac{\Delta^r . t(t-m)(t-2m)\ldots\ldots\ldots(t-mr)}{1.2.3\ldots\ldots(r+1)m^{r+1}}\Delta^{r+1} u$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\Delta^r . (t-m)(t-2m)\ldots\ldots[t-(n-1)r]}{1.2.3\ldots\ldots nm^n}\Delta^n u,$$

ove bisogna osservare che Δu, $\Delta^2 u$, ec., concludendosi dai termini dati, sono costanti, che la caratteristica Δ riferendosi alle variabili che crescono dell'unità, Δ' indica le differenze relative ad x che cresce di $\frac{1}{m}$, che dobbiamo fare $t=0$, dopo le differenziazioni, e che finalmente dobbiamo dare ad r i valori $1.2.3\ldots n$, per ottenere le differenze b, c, d, ec. (n.° 54).

Se sviluppiamo, secondo le potenze di t, i prodotti che affettano la caratteristica Δ, avremo

$$\begin{aligned}
&\Delta^r(t^r + Amt^{r-1} + Bm^2t^{r-2} \ldots\ldots + Rm^{r-1}) &&= \Delta^r.t^r,\\
&\Delta^r(t^{r+1} + A'mt^r + B'm^2t^{r-1} \ldots\ldots + S'm^r) &&= \Delta^r.t^{r+1} + A'm\Delta^r.t^r,\\
&\Delta^r(t^{r+2} + A''mt^{r+1} + B''m^2t^r \ldots\ldots + T''m^{r+1}) &&= \Delta^r.t^{r+2} + A''m\Delta^r.t^{r+1}\\
&\text{ec.};\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &&\quad + B''m^2\Delta.^rt^r,
\end{aligned}$$

e indicando con α, β, γ, ec., i valori di $\Delta^r.t^r$, $\Delta^r.t^{r+1}$, $\Delta^r.t^{r+2}$, ec., verrà finalmente

$$\Delta'^r u_x = \frac{1}{1.2\ldots.rm^r}\left\{\alpha\Delta^r u + \frac{\beta+\alpha A'm}{(r+1)m}\Delta^{r+1}u + \frac{\gamma+\beta A''m+\alpha B''m^2}{(r+1)(r+2)m^2}\Delta'^{+2}u + \text{ec.}\right\}.$$

Quando $r=n$, $\alpha = 1.2.3\ldots n$ (n.° 29), e viene $\Delta'^n u = \frac{\Delta^n u}{m^n}$, risultamento a cui era giunto ancora il Mouton.

56. La questione di *trovare l'indice al quale deve rispondere, in una serie di numeri dati, un numero compreso fra due termini di questa serie*, equivale, in ultima analisi, a prendere per indici i numeri dati e a interpolare la serie degl'indici: la ricerca del numero che risponde ad un logaritmo dato, non compreso nelle tavole, è di questo genere.

Se gl'indici sono equidifferenti, e che i valori di Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ec., formino una serie convergentissima, il problema si risolve facilmente, per mezzo dell'equazione.

$$u_x = u + \frac{x}{1}\Delta u + \frac{x(x-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.},$$

nella quale u_x è dato ed x è l'incognita. Indicando con $\Delta' u$ la differenza data fra u_x ed u, se ne deduce

$$x = \frac{\Delta' u}{\Delta u + \frac{x-1}{2}\Delta^2 u + \frac{(x-1)(x-2)}{2.3}\Delta^3 u + \text{ec.}}$$

e non tenendo conto in principio che del primo termine del denominatore, avremo per primo valore approssimato, $x = \frac{\Delta' u}{\Delta u}$. Sia α questo; lo sostituiremo nel secondo termine, si trascurerà il terzo e i seguenti, e verrà per secondo valore approssimato

$$x = \frac{\Delta' u}{\Delta u + \frac{\alpha-1}{2}\Delta^2 u}.$$

Adesso è facile di continuare questo processo tanto quanto sarà necessario, e di farne l'applicazione numerica.

Se le differenze non decrescessero abbastanza rapidamente per non considerarne che una alla volta, la determinazione di x non potrebbe effettuarsi che ri-

solvendo un'equazione del grado indicato dall'esponente dell'ordine delle differenze che si considerano come costanti. Quest'equazione sarebbe, per esempio, del terzo grado, se l'espressione di u_x, si arrestasse a $\Delta^3 u$; mentre allora si avrebbe

$$\Delta' u = \left(\Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{3}\Delta^3 u \right) x + \left(\frac{1}{2}\Delta^2 u - \frac{1}{2}\Delta^3 u \right) x^2 + \frac{1}{6} x^3 \Delta^3 u.$$

57. I diversi valori che prende una funzione di due variabili producono una riunione di serie che formano una tavola disposta come quella che viene attribuita a Pittagora, e che ordinariamente contiene i valori della funzione xy, corrispondenti a quelli delle variabili x e y, da 1 fino a 9.

Ecco ancora, per esempio, una tavola che risulta dalla funzione

$$5 + x^2 + 2xy + 3y^2,$$

Valori di x

Valori di y	0	1	2	3	4	ec.
0	5	6	9	14	21	ec.
1	8	11	16	23	32	ec.
2	17	22	29	38	49	ec.
3	32	39	48	59	72	ec.
4	53	62	73	86	101	ec.
ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.	ec.

Questa è una *tavola a doppia entrata* perchè per indicare un termine particolare, bisogna dare il numero della colonna e quello della linea o banda che lo contiene. Per indicare il modo di variare la funzione z, dipendente da due quantità x e y si usa mettere degl'indici al basso della lettera rappresentante la funzione. Così $u_{y,x}$ indicherà lo stato generale di una funzione di x e di y; $u_{0,0}$, il valore particolare che corrisponde a $x=0$, $y=0$; $u_{3,4}$, quello che corrisponde a $x=3$, $y=4$, e così degli altri. Nella tavola di sopra, abbiamo

$$u_{x,y} = 5 + x^2 + 2xy + 3y^2, \qquad u_{0,0} = 5, \quad u_{3,4} = 86,$$

e i simboli che abbiamo stabilito producono la seguente tavola.

Valori di x

Valori di y	0	1	2	3	....	x
0	$u_{0,0}$	$u_{1,0}$	$u_{2,0}$	$u_{3,0}$	....	$u_{x,0}$
1	$u_{0,1}$	$u_{1,1}$	$u_{2,1}$	$u_{3,1}$	....	$u_{x,1}$
2	$u_{0,2}$	$u_{1,2}$	$u_{2,2}$	$u_{3,2}$	....	$u_{x,2}$
3	$u_{0,3}$	$u_{1,3}$	$u_{2,3}$	$u_{3,3}$	....	$u_{x,3}$
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.
y	$u_{0,y}$	$u_{1,y}$	$u_{2,y}$	$u_{3,y}$	....	$u_{x,y}$

Considerate separatamente, ciascuna banda e ciascuna colonna di questa tavola formano delle serie, nelle quali il posto dei termini non dipende che da un solo indice, cioè, x per tutti quelli di una medesima banda, e y per tutti quelli di una medesima colonna. Le differenze di questi termini si prendono al solito; ma bisogna distinguere quelle che produce il cangiamento di un indice, da quelle che produce il cangiamento dell'altro, e perciò, si scrive a basso della caratteristica Δ quello degl'indici che varia; così

$$u_{x+1,y}-u_{x,y}=\Delta_x u_{x,y}\,,\quad \Delta_x u_{x+1,y}-\Delta_x u_{x,y}=\Delta_x^2 u_{x,y}\,,\text{ ec.};$$

$$u_{x,y+1}-u_{x,y}=\Delta_y u_{x,y}\,,\quad \Delta_y u_{x,y+1}-\Delta_y u_{x,y}=\Delta_y^2 u_{x,y},\text{ ec.};$$

Queste sono le differenze parziali di $u_{x,y}$ (*Vedi* Differenziale), per mezzo delle quali possiamo, con le formule dei numeri 26 e 27, esprimere il termine generale di una banda o di una colonna, per il primo termine e le sue differenze, ovvero la differenza di un ordine qualunque di questo termine per tutti gli altri.

58. Se nelle formule citate, si cangia n in x, e che si scriva $u_{0,0}$ invece di u otterremo

$$u_{x,0}=u_{0,0}+\frac{x}{1}\Delta_x u_{0,0}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\Delta_x^2 u_{0,0}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u_{0,0}+\text{ec, (1)},$$

$$\Delta_x^x u_{0,0}=u_{x,0}-\frac{x}{1}u_{x-1,0}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}u_{x-2,0}-\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}u_{x-3,0}+\text{ec.}$$

Per estendere queste formule a quella banda che vorremo, basterà di sosti-

tuire al secondo o, che tiene il luogo di y, il numero della banda. Si esprimerebbe, per esempio, $u_{x,3}$, per mezzo delle quantità $u_{0,3}$, $\Delta_x u_{0,3}$, ec., relative alla quarta banda; e in una banda qualunque,

$$u_{x,y}=u_{0,y}+\frac{x}{1}\Delta_x u_{0,y}+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_x^2 u_{0,y}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_x^3 u_{0,y}+\text{ec.};$$

ma considerando a parte la serie dei valori contenuti nella prima colonna, avremo ancora

$$u_{0,y}=u_{0,0}+\frac{y}{1}\Delta_y u_{0,0}+\frac{y(y-1)}{1.2}\Delta_y^2 u_{0,0}+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta_y^3 u_{0,0}+\text{ec. (II)}.$$

Se si sostituisce questo valore nella precedente, per riportarla al valore primordiale $u_{0,0}$, caderemo sopra l'espressioni

$$\Delta_x(\Delta_y u_{0,0}),\quad \Delta_x^2(\Delta_y u_{0,0})\ldots\ldots\Delta_x^m(\Delta_y^n u_{0,0}),$$

di cui l'ultima indica n differenziazioni rapporto all'indice y, seguite da m differenziazioni rapporto all'indice x, e può abbreviarsi scrivendola come segue:

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u_{0,0},$$

per mezzo di che viene

$$\left.\begin{aligned}
u_{x,y}=u_{0,0}&+\frac{x}{1}\Delta_x u_{0,0}+\frac{x(x-1)}{1.2}\Delta_x^2 u_{0,0}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}\Delta_x^3 u_{0,0}+\text{ec.}\\
&+\frac{y}{1}\Delta_y u_{0,0}+\frac{xy}{1.1}\Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,0}+\frac{x(x-1)y}{1.2.1}\Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,0}+\text{ec.}\\
&+\frac{y(y-1)}{1.2}\Delta_y^2 u_{0,0}+\frac{xy(y-1)}{1.1.2}\Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,0}+\text{ec.}\\
&+\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}\Delta_y^3 u_{0,0}+\text{ec.}\\
&+\text{ec.}
\end{aligned}\right\}\text{(III)},$$

formula che esprime il termine generale della tavola, pel primo termine $u_{0,0}$ e le sue differenze parziali, che si formano nella seguente maniera.

59. I termini della tavola, considerati in ciascuna banda in particolare, daranno, col processo del n.° 25, le nuove serie

$u_{0,0}$, $\Delta_x u_{0,0}$, $\Delta_x^2 u_{0,0}$, $\Delta_x^3 u_{0,0}$, ec., corrispondenti a $y=0$,

$u_{0,1}$, $\Delta_x u_{0,1}$, $\Delta_x^2 u_{0,1}$, $\Delta_x^3 u_{0,1}$, ec., ... $y=1$,

$u_{0,2}$, $\Delta_x u_{0,2}$, $\Delta_x^2 u_{0,2}$, $\Delta_x^3 u_{0,2}$, ec., ... $y=2$

$u_{0,3}$, $\Delta_x u_{0,3}$, $\Delta_x^2 u_{0,3}$, $\Delta_x^3 u_{0,3}$, ec., ... , $y=3$,

ec.

Se si sottrae adesso la prima dalla seconda, questa dalla terza, ec., è evidente

che i resti esprimeranno delle differenze rapporto ad y; e seguendo la notazione stabilita, avremo

$$\Delta_y u_{0,0},\ \Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,0},\ \Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,0},\ \text{ec.},\quad \text{corrispondenti a}\quad y=0,$$

$$\Delta_y u_{0,1},\ \Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,1},\ \Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,1},\ \text{ec.},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad y=1,$$

$$\Delta_y u_{0,2},\ \Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,2},\ \Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,2},\ \text{ec.},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad y=2,$$

ec.

Sottraendo ancora qui la prima linea dalla seconda, la seconda dalla terza, e così di seguito, i resti saranno delle differenze seconde rapporto ad y, cioè

$$\Delta_y^2 u_{0,0},\ \Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,0},\ \text{ec.},\quad \text{corrispondenti a}\quad y=0,$$

$$\Delta_y^2 u_{0,1},\ \Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,1},\ \text{ec.},\ \ldots\ldots\ldots\ldots\quad y=1,$$

ec.

Sottraendo ancora qui la prima linea dalla seconda, ec formeremo delle differenze terze rapporto ad y, cioè

$$\Delta_y^3 u_{0,0},\ \text{ec.},\ \ldots\ldots\ \text{corrispondenti a}\quad y=0$$

ec.

Questo modo di operare lo seguiremo tanto avanti quanto sarà necessario; riunendo i termini relativi a $u_{0,0}$, che compongono la prima linea di ciascun gruppo, avremo tutte le differenze indicate dalla formula (III).

Questo processo applicato alla tavola della pagina 386, dà

1.mo GRUPPO	2.° GRUPPO	3.° GRUPPO	4.° GRUPPO
5, 1, 2, 0			
8, 3, 2, 0	3, 2, 0		
17, 5, 2, 0	9, 2, 0	6, 0	
32, 7, 2, 0	15, 2, 0	6, 0	0
ec.	ec.	ec.	ec.

donde risulta

$$u_{0,0}=5,\ \Delta_x u_{0,0}=1,\quad \Delta_x^2 u_{0,0}=2,\quad \Delta_x^3 u_{0,0}=0$$

$$\Delta_y u_{0,0}=3,\ \Delta_{x,y}^{1+1} u_{0,0}=2,\ \Delta_{x,y}^{2+1} u_{0,0}=0,$$

$$\Delta_y^2 u_{0,0}=6,\ \Delta_{x,y}^{1+2} u_{0,0}=0,$$

$$\Delta_y^3 u_{0,0}=0,$$

e

$$u_{x,y}=5+x+3y+2\,.\,\frac{x(x-1)}{2}+2\,.\,\frac{xy}{1\,.\,1}+6\,.\,\frac{y(y-1)}{1\,.\,2}=$$

$$=5+x^2+2xy+3y^2,$$

funzione identica con quella che ha servito a formare la tavola.

60. Se si fosse cominciato dal considerare le serie contenute nelle colonne, le differenze relative ad y si sarebbero presentate le prime e si sarebbe giunti ad una formula simile alla (II), ma nella quale y avrebbe preso il posto di x e viceversa. È evidente che queste due formule debbono essere identiche, e che per conseguenza possiamo invertire l' ordine delle operazioni prendendone le differenze.

Ciò vediamo ancora dalla formazione medesima dell'espressione $\Delta^{1+1}_{x,y}u_{x,y}$, osservando che se h e k indicano gli accrescimenti di x e di y, $u_{x,y}$ essendo $f(x,y)$, viene

$$\Delta_x u_{x,y}=f(x+h,y)-f(x,y),$$

$$\Delta^{1+1}_{x,y}u_{x,y}=f(x+h,y+k)-f(x,y+k)-f(x+h,y)+f(x,y),$$

espressione nella quale non si farebbe che cambiare fra loro il secondo termine e il terzo, se s'invertisse l'ordine delle differenziazioni. Segue da ciò, come per le differenziali, (*Vedi* Calcolo differenziale), che il valore di $\Delta^{m+n}_{x,y}u_{x,y}$, non cangia punto, in qualunque ordine si effettuino le operazioni indicate da questo simbolo.

61. Se facciamo $u_{x,y}=x^p y^q$, troveremo facilmente che il primo termine di $\Delta^{m+n}_{x,y}\,.\,x^p y^q$ è

$$p(p-1)\,.\,.\,.\,.\,(p-m+1)\,.\,q(q-1)\,.\,.\,.\,.\,(q-n+1)\;x^{p-m}y^{q-n}h^m k^n$$

e che questa differenza diventa costante quando $m=p$, $n=q$.

Segue da ciò che si hanno delle differenze costanti quando $u_{x,y}$ è una funzione razionale e intera rapporto alle variabili x e y, e che per conseguenza la formula (III) del n.° 58 si termina in questo caso. È a proposito di osservare che se si effettuassero i prodotti indicati, essa prenderebbe la forma

$$\begin{aligned} u_{x,y}=u_{0,0}+\mathrm{A}\,x+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x^3+\text{ec.}\\ +\mathrm{A}'y+\mathrm{B}'xy+\mathrm{C}'x^2y+\text{ec.}\\ +\mathrm{B}''y^2+\mathrm{C}''xy^2+\text{ec.}\\ +\mathrm{C}'''y^3+\text{ec.}\\ +\text{ec.}\end{aligned}$$

che è quella di una funzione razionale e intera ordinata seguendo le potenze delle variabili x e y.

62. Con trasformazioni simili a quelle del n.° 43, le formule (I), (II) e (III) (n.° 58) diventano adattate all'interpolazione, per ottenere dei termini compresi, tanto fra quelli di una medesima banda, quanto fra quelli di una medesima colonna, o finalmente che cadano fra due bande e due colonne, vale a dire che portino nel medesimo tempo due indici frazionari.

Ciò non merita spiegazione che per la formula (III). Per darle tutta l'estensione della quale è capace, supponiamo che h e k indichino gli accrescimenti di x e di y; che il valore rappresentato da $u_{0,0}$ corrisponda a $x=a$, $y=b$; e per distinguere le nuove variabili x e y, dagl' indici, che nella formula come nella tavola cominciano per o e crescono dell'unità, denotiamo questi con m ed n; verrà

$$x=a+mh, \quad y=b+nk, \quad \text{donde} \quad m=\frac{x-a}{h} \quad n=\frac{y-b}{k}.$$

Finalmente, per abbreviare, poniamo $x-a=h'$, $y-b=k'$, e mettiamo semplicemente u in luogo di $u_{0,0}$, la formula (III) sarà trasformata in

$$u_{x,y}=u+\frac{h'}{h}\Delta_x u+\frac{h'(h'-h)}{h\,.\,2h}\Delta_x^2 u+\frac{h'(h'-h)(h'-2h)}{h\,.\,2h\,.\,3h}\Delta_x^3 u+\text{ec.}$$

$$+\frac{k'}{k}\Delta_y u+\frac{k'}{k}\cdot\frac{h'}{h}\Delta_{x,y}^{1+1}u+\frac{k'}{k}\cdot\frac{h'(h'-h)}{h\,.\,2h}\,.\Delta_{x,y}^{2+1}u+\text{ec.}$$

$$+\frac{k'(k'-k)}{k\,.\,2k}\Delta_y^2 u+\frac{k'(k'-k)}{k\,.\,2k}\frac{h'}{h}\Delta_{x,y}^{1+2}u+\text{ec.}$$

$$+\frac{k'(k'-k)(k'-2k)}{k\,.\,2k\,.\,3k}\Delta_y^3 u+\text{ec.}$$

$$+\text{ec.}$$

Tutte le volte che i numeri $\frac{h'}{h}$, $\frac{k'}{k'}$ caderanno nella serie naturale o, 1, 2, 3 .. questa formula riprodurrà i valori di $u_{x,y}$ dati per indici interi; essa converrà per conseguenza ad indici frazionari, con le medesime restrizioni però di quella del n.° 43.

Si estenderebbero le precedenti considerazioni alle funzioni che dipendono da tre o da un maggior numero di variabili, ma con una complicazione nei segni, la quale in parte si vincerebbe, col mezzo dell'analogia delle potenze con le differenze; ed è per questo che per ora non spingeremo più avanti questo soggetto.

63. Ci limiteremo a formare l'espressioni delle differenze totali di una funzione di un numero qualunque di variabili, per mezzo delle sue differenze parziali. Con le prime, si estendono quelle che risultano dal cangiamento simultaneo di tutte le variabili. Una funzione u di x, y, se non facciamo variare che x, si cangerà in

$$u+\Delta_x u;$$

facendo quindi variare y, in questo secondo valore, se ne ricaverà

$$u+\Delta_x u+\Delta_y(u+\Delta_x u)=u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u$$

Allorquando la funzione conterrà tre variabili x, y, e z, non facendo in principio variare che le due prime, essa diventerà

$$u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u,$$

espressione che la variazione di z cangerà in

$$\begin{aligned} & u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u+\Delta_z(u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_y\Delta_x u) \\ = & u+\Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_z u+\Delta_y\Delta_x u+\Delta_z\Delta_x u+\Delta_z\Delta_y u \\ & \qquad +\Delta_z\Delta_y\Delta_x u. \end{aligned}$$

Questo processo può continuarsi quanto vorremo; ma sollecitamente si apprende la legge di questi risultamenti, sopprimendo la lettera u; mentre la prima diventa allora

$$1+\Delta_x+\Delta_y+\Delta_y\Delta_x=(1+\Delta_x)(1+\Delta_y);$$

la seconda

$$\begin{aligned} & 1+\Delta_x+\Delta_y+\Delta_z+\Delta_x\Delta_y+\Delta_z\Delta_x+\Delta_z\Delta_y+\Delta_z\Delta_y\Delta_x= \\ & =(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z); \end{aligned}$$

e si conclude che esse sono respettivamente equivalenti a

$$(1+\Delta_x)(1+\Delta_y)u\,, \quad (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)u;$$

donde sottraendo lo stato primitivo di u, si deduce per le differenze totali,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \left\{ (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1 \right\} u \\ &= \Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_x\Delta_y u\,, \\ \Delta u &= \left\{ (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1 \right\} u \\ &= \Delta_x u+\Delta_y u+\Delta_z u+\Delta_x\Delta_y u+\Delta_x\Delta_z u+\Delta_z\Delta_y u+\Delta_x\Delta_y\Delta_z u. \end{aligned}$$

Per ottenere la differenza seconda, basta cangiare u in Δu, nella prima differenza. Allorquando la funzione non contiene che due variabili, viene

$$\Delta^2 u=\Delta_x\Delta u+\Delta_y\Delta u+\Delta_x\Delta_y\Delta u\,;$$

mettendo per Δu il suo valore, e sviluppando, si trova

$$\Delta_x^2 u+\Delta_y^2 u+\Delta_x^2\Delta_y^2 u+2\Delta_x\Delta_y u+2\Delta_x^2\Delta_y u+2\Delta_x\Delta_y^2 u$$

risultamento equivalente a

$$(\Delta_x+\Delta_y+\Delta_x\Delta_y)^2 u=\left\{ (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)-1 \right\}^2 u$$

Queste formule si ritrovano e si rendono generali con la maggiore facilità, per mezzo dell'analogia delle potenze con le differenze; e se ne conclude per una funzione di tre variabili,

$$\Delta^n u=\left\{ (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1 \right\}^n u.$$

64. È evidente che le medesime formule, quando $n=1$, debbono dare la prima differenza del prodotto di un numero qualunque di funzioni di una sola variabile. Se si fa per esempio, $u=xyz$ in

$$\Delta u=\left\{ (1+\Delta_x)(1+\Delta_y)(1+\Delta_z)-1 \right\} u\,,$$

65. Abbiamo supposto che le variabili indipendenti x e y non ricevessero che accrescimenti eguali; ma per dare al calcolo tutta l'estensione della quale è capace, si concepisce che queste variabili provino cangiamenti successivi qualunque e indipendenti gli uni dagli altri; e per mettere della simmetria nell'espressioni analitiche, si rappresentano gli accrescimenti delle variabili indipendenti come quelli della funzione proposta.

Allorquando essa non dipende che da una sola variabile, si stabilisce che i valori

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots u_n,$$

corrispondano alle quantità

$$x,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ldots x_n,$$

che indicano i diversi stati per i quali passa x, e in conseguenza del n.° 25, facciamo

$$\begin{aligned}
&x_1 - x = \Delta x\\
&x_2 - x_1 = \Delta x_1\\
&x_3 - x_2 = \Delta x_2\\
&\text{ec.}\\
&\Delta x_1 - \Delta x = \Delta^2 x\\
&\Delta x_2 - \Delta x_1 = \Delta^2 x_1\\
&\text{ec.}\\
&\Delta^2 x_1 - \Delta^2 x = \Delta^3 x\\
&\text{ec.}
\end{aligned}$$

il che dà

$$x_n = x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \text{ec.};$$

donde

$$u_n = f(x_n) = f\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{ec.}\right]$$

Deducendo da questa formula i valori successivi di u, otteremo Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$, ec. per mezzo della formula del n.° 27; ma il Lagrange osservò che si poteva giungervi ancora sostituendo u_n nell'espressione del n.° 26, e lasciando n indeterminata, perchè l'equazione

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.}$$

$$= f\left[x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x + \text{ec}\right],$$

deve verificarsi indipendentemente da qualunque valore particolare di quest'indice. Se dunque i due membri fossero sviluppati secondo le potenze di n, si eguaglierebbero fra loro i coefficienti di una medesima potenza, e l'equazioni che si otterrebbero con questo mezzo servirebbero a determinare le differenze della funzione u da quelle della variabile x.

Questo processo è analogo a quello che si usa nel calcolo differenziale (*Vedi*

questa parola) e si estende alle funzioni di un numero qualunque di variabili. Per $u=f(x, y, z)$, per esempio, bisognerebbe porre

$$u+\frac{n}{1}\Delta u+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u+\text{ec.}$$

$$=f\Big[x+\frac{n}{1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 x+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 x+\text{ec.},$$

$$y+\frac{n}{1}\Delta y+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y+\frac{n(n-1)(n-2}{1.2.3}\Delta^3 y+\text{ec.},$$

$$z+\frac{n}{1}\Delta z+\frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 z+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 z+\text{ec.}\Big].$$

Paragonando i termini affetti da una medesima potenza di n in quest'equazione, procureremo un sufficiente numero di nuovi termini, per determinare Δu, $\Delta^2 u$, $\Delta^3 u$ ec.

66. I calcoli che esige questo metodo lo renderanno il più delle volte assai faticoso; sarà ancora forse più comodo di dedurre le une dalle altre le differenze successive, il che, per le funzioni di una sola variabile, si effettuerà così. Avendo ottenuto $\Delta u=u_1-u$, col cangiamento di x in $x+\Delta x$, in u, formeremo $\Delta^2 u=\Delta u_1-\Delta u$, sostituendo in Δu, invece di x e di Δx, i valori $x+\Delta x$ e $\Delta x+\Delta^2 x$; formeremo quindi $\Delta^3 u=\Delta^2 u_1-\Delta^2 u$, sostituendo in $\Delta^2 u$, invece di x, Δx, $\Delta^2 x$, i valori $x+\Delta x$, $\Delta x+\Delta^2 x$, $\Delta^2 x+\Delta^3 x$. Senza andare più avanti, si vede che per passare da una differenza qualunque a quella dell'ordine superiore, bisogna considerare nel medesimo tempo come variabile x e le sue differenze, e che per conseguenza a ciascuna differenziazione, il numero delle variabili si accresce di un'unità.

67. L'espressione di u_n, ottenuta nel n° 26, e della quale abbiamo di già veduto delle importanti applicazioni, non è la sola che si possa concludere dall'equazioni (1), (2), e (3) del n.° 25. Combinandole in diverse maniere, esse conducono a risultamenti differenti, che faremo conoscere, perchè essi sono molto utili, come lo vedremo, nel seguito di questo dizionario.

Aggiungendo in primo luogo tutte l'equazioni (1), e mandando via i termini comuni ai due membri del risultamento, viene

$$u_n=u+\Delta u+\Delta u_1+\Delta u_2 \ldots\ldots+\Delta u_{n-1};$$

Il che presenta il valore di u_n, come la somma del primo valore e degli accrescimenti dei valori successivi.

68. La somma dell'equazioni

$$u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-1},$$
$$\Delta u_{n-1}=\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-2},$$
$$\Delta^2 u_{n-2}=\Delta^2 u_{n-3}+\Delta^3 u_{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\Delta^{n-1} u_1=\Delta^{n-1} u+\Delta^n u$$

dà, dopo le riduzioni

$$u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-3}\ldots\ldots+\Delta^{n-2} u_1+\Delta^{n-1} u+\Delta^n u$$

Quando vogliamo limitarci alle differenze dell' ordine m, facciamo $\Delta^{m+1}u=0$, ec. donde ne viene $\Delta^m u=\Delta^m u_1=\Delta^m u_2$, ec. e allora viene

$$u_n=u_{n-1}+\Delta u_{n-2}+\Delta^2 u_{n-3}\ \ldots\ \Delta^{m-1}u_{n-m}+\Delta^m u.$$

69. Se prendiamo la prima differenza da quest'equazione, verrà

$$\Delta u_n=\Delta u_{n-1}+\Delta^2 u_{n-2}+\Delta^3 u_{n-3}+\Delta^4 u_{n-4}+\text{ ec.}\ \ldots\ (1);$$

Sottoponendo questo risultamento a nuove differenziazioni, diminuendo ciascuna volta gl' indici di un'unità, avremo

$$\begin{aligned}
\Delta^2 u_{n-1} &= \Delta^2 u_{n-2}+\Delta^3 u_{n-3}+\Delta^4 u_{n-4}+\Delta^5 u_{n-5}+\text{ ec.},\\
\Delta^3 u_{n-2} &= \qquad\qquad \Delta^3 u_{n-3}+\Delta^4 u_{n-4}+\Delta^5 u_{n-5}+\text{ ec.},\\
\Delta^4 u_{n-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^4 u_{n-4}+\Delta^5 u_{n-5}+\text{ ec.},\\
\Delta^5 u_{n-4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^5 u_{n-5}+\text{ ec.},\\
\text{ec.};
\end{aligned}$$

e prendendo la somma di quest' equazioni, osservando che quella dei loro primi membri è esattamente il valore di $\Delta^2 u_n$, che si ricaverebbe dall' equazione (1), otterremo

$$\Delta^2 u_n=\Delta^2 u_{n-2}+2\Delta^3 u_{n-3}+3\Delta^4 u_{n-4}+4\Delta^5 u_{n-5}+\text{ ec.}\ \ldots\ (2).$$

Differenziando quest'ultima, diminuendo ciascuna volta gl' indici di un'unità, verrà.

$$\begin{aligned}
\Delta^3 u_{n-1} &= \Delta^3 u_{n-3}+2\Delta^4 u_{n-4}+3\Delta^5 u_{n-5}+4\Delta^6 u_{n-6}+\text{ ec.},\\
\Delta^4 u_{n-2} &= \qquad\qquad \Delta^4 u_{n-4}+2\Delta^5 u_{n-5}+3\Delta^6 u_{n-6}+\text{ ec.},\\
\Delta^5 u_{n-3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^5 u_{n-5}+2\Delta^6 u_{n-6}+\text{ ec.},\\
\Delta^6 u_{n-4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Delta^6 u_{n-6}+\text{ ec.},\\
\text{ec.}
\end{aligned}$$

aggiungendo ancora questi risultamenti, osservando che la somma dei loro primi membri è il valore di $\Delta^3 u_n$, che si ricaverebbe dall' equazione (1), troveremo

$$\Delta^3 u_n=\Delta^3 u_{n-3}+3\Delta^4 u_{n-4}+6\Delta^5 u_{n-5}+10\Delta^6 u_{n-6}+\text{ ec.}\ \ldots\ (3).$$

I coefficienti numerici dell'equazioni (1), (2) e (3), sono i medesimi di quelli degli sviluppi di $(1-a)^{-1}$, $(1-a)^{-2}$, $(1-a)^{-3}$, e la causa di questa identità è facile a trovarsi nell'analogia della loro formazione. Infatti si comincia dal passare dallo sviluppo di

$$(1-a)^{-1}=1+a+a^2+a^3+a^4+\text{ ec.},$$

a quello di

$$(1-a)^{-2}=(1-a)^{-1}(1-a)^{-1}=$$

$$(1+a+a^2+a^3+a^4+\text{ ec.})\,(1+a+a^2+a^3+a^4+\text{ ec.})=$$

$$\left.\begin{aligned}
&1+a+a^2+a^3+\text{ ec.}\\
&\quad +a+a^2+a^3+\text{ ec.}\\
&\qquad\quad +a^2+a^3+\text{ ec.}\\
&\qquad\qquad\quad +a^3+\text{ ec.}\\
&\qquad\qquad\qquad\quad +\text{ ec.}
\end{aligned}\right\}$$

risultamento di una forma simile alla somma dell' equazioni che hanno dato l' equazione (2); seguirà lo stesso degli altri casi

I coefficienti numerici di $\Delta^r u_n$ saranno dunque i medesimi che quelli dello sviluppo di $(1-a)^{-r}$; e metteremo, per conseguenza

$$\Delta^r u_n = \Delta^r u_{n-r} + \frac{r}{1}\Delta^{r+1}u_{n-r-1} + \frac{r(r+1)}{1\,.\,2}\Delta^{r+2}u_{n-r-2}$$

$$+ \frac{r(r+1)(r+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^{r+3}u_{n-r-3} + \text{ec.}$$

Questa formula può scriversi come segue:

$$\Delta^r u_n = \Delta^r u_{n-r}(1-\Delta u^{-1})^{-r},$$

purchè nello sviluppo del secondo membro gli esponenti della lettera u siano cangiati in indici.

70. La perfetta corrispondenza dell' espressioni

$$u_x = u + \frac{x}{1}\Delta u + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\Delta^2 u + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\Delta^3 u + \text{ec.},$$

$$u_x = u + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \text{ec. (n.° 42)},$$

quando ci arrestiamo ad un medesimo numero di termini, solidamente stabilita dalle considerazioni del n.° 47, fa vedere che una di quest' espressioni può considerarsi come una trasformazione dell' altra.

In ciascun termine abbiamo il medesimo numero di fattori variabili; ma nella seconda questi fattori sono eguali o la loro differenza è nulla, nel mentre che nella prima la loro differenza è costantemente eguale all' unità. Questo cangiamento delle potenze in prodotti di fattori ineguali, è un tratto caratteristico del calcolo che ci occupa; e per ben comprenderlo, basta di sostituire alla seconda espressione di u_x riportata di sopra la serie del Maclaurin (*Vedi* Calcolo differenziale) che dà

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{du_x}{dx} + \frac{x^2}{1\,.\,2}\frac{d^2u_x}{dx^2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{d^3u_x}{dx^3} + \text{ec.},$$

osservando di fare $x=0$ dopo le differenziazioni. Vediamo che nella prima, le differenze, che si riferiscono ancora al valore $x=0$, hanno preso il posto dei coefficienti differenziali.

La maniera di arrivare a questa prima espressione è ancora perfettamente analoga al metodo che ordinariamente si segue per ottenere la serie del Maclaurin; mentre dare successivamente alla funzione u_x i valori

$$u,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots\ldots\ u_n,$$

come l' abbiamo fatto nel n.° 47, è lo stesso di stabilire che u_x e le sue differenze successive diventino respettivamente

$$u,\ \Delta u,\ \Delta^2 u,\ \text{ec., allorquando vi facciamo } x=0.$$

Questo è perciò come se si cominciasse dal calcolare questi valori in generale, e che quindi ci si facesse l' ipotesi indicata.

Questo metodo, che non sarebbe il più semplice se si prendesse l' espressione di u_x ordinata secondo le potenze di x, lo diviene quando si fa.

$$u_x = A + Bx + Cx(x-h) + Dx(x-h)(x-2h) + \text{ec.},$$

a motivo della facilità con la quale si ottengono le differenze successive di un prodotto composto di fattori equidifferenti.

Infatti, abbiamo

$$\Delta . x(x-h)(x-2h) \ldots\ldots \left[x-(m-1)\right]h =$$

$$(x+h)x(x-h) \ldots\ldots\ldots \left[x-(m-2)\right]h$$

$$-x(x-h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \left[x-(m-1)h\right]\Big\} =$$

$$x(x-h) \ldots\ldots \left[x-(m-2)h\right]\Big\{x+h-\left[x-(m-1)h\right]\Big\} =$$

$$x(x-h) \ldots\ldots \left[x-(m-2)h\right]mh$$

risultamento il quale non comprende che $m-1$ fattori variabili moltiplicati per il loro numero primitivo m, e per la loro differenza comune h, il che è del tutto analogo alla differenziale di x^m (*Vedi* Differenziale).

Per mezzo di questo risultamento, dedurremo da

$$\begin{aligned}
u_x &= A+Bx+Cx(x-h)+Dx(x-h)(x-2h)+ \text{ec.},\\
\Delta u_x &= Bh+2Chx+3Dhx(x-h)+ \text{ec.},\\
\Delta^2 u_x &= 2Ch^2+2.3Dh^2x+ \text{ec.},\\
\Delta^3 u_x &= 2.3Dh^3+ \text{ec.},\\
&\text{ec.};
\end{aligned}$$

ponendo $x=0$, otterremo

$$A=u,\ B=\frac{\Delta u}{h},\ C=\frac{\Delta^2 u}{1.2h^2},\ D=\frac{\Delta^3 u}{1.2.3h^3},\ \text{ec.},$$

e per conseguenza

$$u_x=u+\frac{x}{1}\frac{\Delta u}{h}+\frac{x(x-h)}{1.2}.\frac{\Delta^2 u}{h^2}+\frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3}+\text{ec.},$$

risultamento che si dedurrebbe dall' espressione del n.° 43, facendoci $a=0$, o cangiando $x-a$ in x. Il processo che abbiamo esposto, è stato indicato nel *Dictionnaire de Mathématiques de l' Encyclopédie Méthodique*, T. II, pag 234, 2ª colonna.

71. Nella formula di sopra, i fattori vanno decrescendo; ma se vogliamo stabilire il contrario, bisogna cominciare dall' osservare che

$$\Delta . x(x+h)(x+2h) \ldots\ldots\ldots \left[x+(m-1)h\right] =$$

$$\left.\begin{aligned}
&(x+h)(x+2h) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x+mh)\\
-\,&x(x+h)(x+2h) \ldots\ldots \left[x+(m-1)h\right]
\end{aligned}\right\} =$$

$$(x+h)(x+2h) \ldots \left[x+(m-1)h\right]mh.$$

Ponendo quindi

$$u_x = A+Bx+Cx(x+h)+Dx(x+h)(x+2h)+ \text{ec.},$$

ne dedurremo

$$\begin{aligned}
\Delta u_x &= Bh + 2Ch(x+h) + 3Dh(x+h)(x+2h) + \text{ec.},\\
\Delta^2 u_x &= 2Ch^2 + 2.3\,Dh^2(x+2h) + \text{ec.},\\
\Delta_3 u_x &= + 2.3\,Dh^3 + \text{ec.},\\
&\text{ec.};
\end{aligned}$$

ma allora, per far sparire la variabile x da tutti i termini nei quali è rimasta, bisogna

in u_x, porre $x=0$, donde . . . . . $A=u$,

Δu_x, ... $x+h=0$, ... $u_x=u_{-1}$ e $B=\frac{\Delta u_{-1}}{h}$,

$\Delta^2 u_x$, ... $x+2h=0$, ... $u_x=u_{-2}$ e $C=\frac{\Delta^2 u_{-2}}{1.2\,h^2}$,

$\Delta^3 u_x$, ... $x+3h=0$, ... $u_x=u_{-3}$ . . . $D=\frac{\Delta^3 u_{-3}}{1.2\,3h^3}$,

ec.,

e infine si ha

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{\Delta u_{-1}}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u_{-2}}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u_{-3}}{h^3} + \text{ec.}$$

Qui le differenze non sono riferite al medesimo valore di u, come nella prima formula; ma se prendiamo le differenze retrocedendo, e che queste nuove differenze s'indichino con $'\Delta u$, avremo

$$\begin{aligned}
\Delta u_{-1} &= u - u_{-1} &&= {}'\Delta u,\\
\Delta^2 u_{-2} &= u - 2u_{-1} + u_{-2} &&= \Delta u - \Delta u_{-1} = {}'\Delta^2 u,\\
\Delta^3 u_{-3} &= u - 3u_{-1} + 3u_{-2} - u_{-3} &&= {}'\Delta^2 u - {}'\Delta^2 u_{-1} = {}'\Delta^3 u,\\
&\text{ec.};
\end{aligned}$$

e in questa maniera potremo scrivere l'espressione

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{'\Delta u}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{'\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{'\Delta^3 u}{h^3} + \text{ec.},$$

alla quale si giungerebbe direttamente, supponendo che a ciascuna differenziazione x si cangiasse in $x-h$, e sottraendo il secondo stato dal primo.

L'espressione di $'\Delta^n u$, relativa a quest' ipotesi, si ricaverebbe da quella del n.° 27, cangiandovi il segno degl'indici di u, e quando n è impari quello di ciascun termine. Quanto all'espressioni di u_x, ottenute nel numero precedente e in questo, esse possono evidentemente abbreviarsi così:

$$u_x = (1+\Delta)^{\frac{x}{h}} u, \qquad u_x = (1-{}'\Delta)^{-\frac{x}{h}} u$$

72. Sostituendo ai prodotti di fattori equidifferenti delle funzioni analoghe, si costruirebbero altre formule d'interpolazione. Se si ponesse per esempio,

$$u_x = A + B \operatorname{sen} x + C \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x-h) + D \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x-h) \operatorname{sen}(x-2h) + \text{ec.},$$

e che se ne prendesse, per esempio, le differenze successive come nel n.° 70, per mezzo delle formule del n° 36, presto si vedrebbe che la supposizione di $x=0$, che fa sparire sen x, e riduce il valore di u_x al suo primo termine, non lascerebbe sussistere che i due primi in Δu_x, i tre primi in $\Delta^2 u_x$, e così di seguito, il che darebbe ancora il mezzo di determinare i coefficienti A, B, C, D, ec.

Ma mi sembra che non sia sempre permesso, di considerare come una vera trasformazione il processo di sopra, col quale non si fa che sottoporre un numero limitato dei primi termini di una serie scelta arbitrariamente, a riprodurre un simil numero di valori della funzione u_x, corrispondenti a quelli di x presi nella serie $0, h, 2h$, ec., quando ancora i coefficienti presentassero una legge che potesse continuarsi all'infinito. Si direbbe, per esempio, che l'equazione

$$u_x = A' \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} + A'' \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{a} + A''' \operatorname{sen} \frac{3\pi x}{a} + \text{ec. (n.° 52)}$$

è lo sviluppo di $u=0$, o che la curva che essa rappresenta è una linea retta, a motivo che la funzione ha un numero infinito di valori eguali a zero, e la curva un simil numero di punti comuni con l'asse delle ascisse?

Non segue il medesimo nelle serie del Maclaurin, perchè i valori che siamo obbligati a dare alla funzione u_x, si succedono a intervalli infinitamente piccoli, o, il che equivale allo stesso, essa è il limite comune alle due serie

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{\Delta u}{h} + \frac{x(x-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x-h)(x-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \text{ec.},$$

$$u_x = u + \frac{x}{1}\frac{'\Delta u}{h} + \frac{x(x+h)}{1.2}\frac{'\Delta^2 u}{h^2} + \frac{x(x+h)(x+2h)}{1.2.3}\frac{'\Delta^3 u}{h^3} + \text{ec.},$$

perchè la supposizione di $h=0$, che cangia i prodotti variabili in potenze, cangia ancora le quantità

$$\frac{\Delta u_x}{h}, \frac{\Delta^2 u_x}{h^2}, \frac{\Delta^3 u_x}{h^3}, \text{ec.},$$

$$\text{e} \quad \frac{'\Delta u_x}{h}, \frac{'\Delta^2 u_x}{h^2}, \frac{'\Delta^3 u_x}{h^3}, \text{ec.},$$

$$\text{in} \quad \frac{du}{dx}, \frac{d^2 u}{dx^2}, \frac{d^3 u}{dx^3}, \text{ec.}$$

e che un numero limitato di primi termini della serie, rappresentando l'ordinata di una curva osculatrice della curva data, al punto ove $x=0$, non si allontana che poco dai veri valori di u_x, nel mentre che quelli di x rimangono abbastanza piccoli perchè questa serie sia convergente. Il passaggio delle differenze alle differenziali stabilisce, col ravvicinamento dei punti comuni alle due curve che si considerano, la legge di continuità nella successione di questi punti.

73. Il Teorema del Taylor comprendendo quello del Maclaurin (*Vedi* Differenziale) non è altra cosa che il limite dell'espressione

$$u_x = u + \frac{x-a}{h}\frac{\Delta u}{1} + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h} - 1\right)\frac{\Delta^2 u}{1.2} + \text{ec. (n.° 43)},$$

il quale serve a ricavare il valore generale u_x da quelli che questa funzione e

le sue differenze prendono nella supposizione di $x=a$. Se la precedente espressione si scrive come segue

$$u_x = u + \frac{(x-a)}{1}\frac{\Delta u}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 u}{h^2}$$

$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)(x-a-2h)}{1.2.3}\frac{\Delta^3 u}{h^3} + \text{ec.},$$

e che vi si faccia $h=0$, osservando che i rapporti, $\frac{\Delta u}{h}$, $\frac{\Delta^2 u}{h^2}$, $\frac{\Delta^3 u}{h^3}$ ec., hanno per limiti $\frac{du}{da}$, $\frac{d^2u}{da^2}$, $\frac{d^3u}{da^3}$, ec., otterremo

$$u_x = u + \frac{du}{da}\frac{(x-a)}{1} + \frac{d^2u}{da^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3u}{da^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Facendo quindi $x-a=h$, e cangiando a in x, avremo evidentemente

$$u_{x+h} = u_x + \frac{du_x}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u_x}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u_x}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

Ed è all'incirca così che il Taylor scoperse il teorema che porta il suo nome; e quando esso si conosce, la teoria del calcolo differenziale non offre più veruna difficoltà; quello che abbiamo veduto basta per provare come il calcolo differenziale può dedursi da quello delle differenze.

Dalla formula trovata si conclude, sopprimendo l'indice x, che non è più necessario,

$$\Delta u = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

74. Se invece della variabile x sostituiamo $\frac{du}{dx}h$ nello sviluppo di e^x (*Vedi* Funzioni esponenziali), troveremo

$$e^{\frac{du}{dx}h} - 1 = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{du^2}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{du^3}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

sviluppo che non differisce da quello di Δu del numero precedente, se non che le potenze di du tengono il posto delle differenziali successive di u; possiamo dunque porre

$$\Delta u = e^{\frac{du}{dx}h} - 1,$$

purchè si applichi alla caratteristica d gli esponenti delle potenze di du. Il Lagrange è il primo che ha fatto quest'osservazione, ed è partito da ciò per dare un seguito di formule eleganti, fondate sopra l'analogia delle potenze con le differenze.

Possiamo ancora rendere più semplice questo modo di scrivere, ponendo

$$u+\Delta u = u_1 = e^{h\frac{d}{dx}} u,$$

$$\Delta u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) u$$

mentre non ci sarà niente da cangiare nello sviluppo; ma bisogna ben rammentarsi che la lettera d esprimendo una caratteristica, e non una quantità, l'equazioni di sopra non diventano effettive che quando il loro secondo membro è sviluppato.

Si ha similmente

$$u_n = e^{nh\frac{d}{dx}} u, \quad \Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^n u.$$

La prima di queste formule è quasi evidente da se medesima, poichè u corrispondendo ad x, u_n corrisponde ad $x+nh$, e si ottiene per conseguenza del solo cangiamento di h in nh, nell'espressione di u_1.

Quella di $\Delta^n u$, stabilita soltanto per mezzo dell'analogia dal Lagrange, è una conseguenza ben semplice della formula del n.° 27. Infatti se si mette in questa, invece di u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ec., le loro espressioni formate per mezzo di quella di u_n, indicata di sopra, verrà

$$\left.\begin{aligned}\Delta_n u = e^{nh\frac{d}{dx}} u - \frac{n}{1} e^{(n-1)h\frac{d}{dx}} u + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h\frac{d}{dx}} u \\ - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} e^{(n-3)h\frac{d}{dx}} u + \text{ec.}\end{aligned}\right\},$$

equazione rigorosamente esatta, quando il suo secondo membro è sviluppato, e che non cesserà di esserlo se si scrive così

$$\Delta^n u = \left\{ e^{nh\frac{d}{dx}} - \frac{n}{1} e^{(n-1)h\frac{d}{dx}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h\frac{d}{dx}} - \text{ec.} \right\} u,$$

poichè lo sviluppo non cangerà per questo. Ma se osserviamo che lo sviluppo di e^{mz} è il medesimo di quello di $(e^z)^m$, e che si faccia in conseguenza $h\frac{d}{dx} = z$, verrà

$$\Delta^n u = \left\{ (e^z)^n - \frac{n}{1}(e^z)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}(e^z)^{n-2} - \text{ec.} \right\} u$$

$$= (e^z - 1)^n u = \left(e^{\frac{d}{dx}h} - 1\right)^n u.$$

Questa dimostrazione semplicissima e molto elegante, è stata data dal signor Brioklay, nelle *Transactions Philosophiques* dell'anno 1807.

75 Il Laplace che fu il primo a dimostrare quest'importante formula, si

valse in principio di un altro giro, egualmente molto semplice e molto elegante. Avendo osservato che in generale

$$\Delta^n u = \frac{d^n u}{dx^n} h^n + A' \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1} + A'' \frac{d^{n+2} u}{dx^{n+2}} h^{n+2} + \text{ec.},$$

A', A'', ec. indicando coefficienti i quali non dipendono che da n, e per conseguenza che debbono rimanere i medesimi, qualunque sia la funzione u, considerò io particolare il caso in cui $u = e^x$, il quale dà

$$\frac{d^m u}{dx^m} = e^x \text{ (Vedi Differenziale)}, \quad \text{e} \quad \Delta^m u = e^x (e^h - 1)^m \text{(n.° 35)},$$

qualunque sia m, e per conseguenza

$$(e^h - 1)^n = h^n + A' h^{n+1} + A'' h^{n+2} + \text{ec.};$$

donde segue che i coefficienti A', A'', ec, debbono essere i medesimi di quelli dello sviluppo di $(e^h - 1)^n$, poichè l'accrescimento h deve restare indeterminato. Di più non è difficile vedere che si passerebbe dal secondo membro dell'equazione di sopra, allo sviluppo posto per $\Delta^n u$, se si cangiassero le potenze di h in fattori della forma $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$, $\frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} h^{n+1}$, ec., il che equivarrebbe a scrivere

$$\left(e^{h \frac{d}{dx}} - 1\right)^n, \text{ invece di } \left(e^h - 1\right)^n.$$

La forma dello sviluppo di $\Delta^n u$ sarebbe provata prendendo le differenze successive dell'espressione di Δu; ma essa si trova subito per mezzo della formula del n.° 27, sostituendo per u_n, u_{n-1}, u_{n-2}, ec. gli sviluppi che non abbiamo fatto che indicare nel precedente numero, e che sono tutti simili all'espressione

$$u_n = n + \frac{du}{dx} \frac{nh}{1} + \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{n^2 h^2}{1.2} + \frac{d^3 u}{dx^3} \frac{n^3 h^3}{1.2.3} + \text{ec.};$$

si vede bene allora che il risultamento non deve contenere le differenziali di u che al primo grado; e d'altra parte si sa che il primo termine dello sviluppo cercato dev'essere della forma di $d^n u$, il che si riconoscerebbe ancora con lo sviluppo di $\left(e^h - 1\right)^n$, che è quello di

$$\left(\frac{h}{1} + \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}\right)^n = h^n \left(1 + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2.3} + \text{ec.}\right)^n.$$

76. Il Brinkley, nella memoria di già citata, ha osservato che i coefficienti delle diverse potenze di h, ricavati dallo sviluppo di sopra, derivavano ancora dalle differenze della funzione x^m. Ciò si vede facendo, nella formula del n.° 27, le sostituzioni indicate alla fine del precedente numero, o sviluppando l'espressione

$$\Delta^n u = \left\{ e^{nh \frac{d}{dx}} - \frac{n}{1} e^{(n-1)h \frac{d}{dx}} + \frac{n(n-1)}{1.2} e^{(n-2)h \frac{d}{dx}} - \text{ec.} \right\} u,$$

e ordinando il risultamento rapporto alle potenze di h; viene allora

$$\Delta^n u = \left\{ 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \text{ec.} \right\} u$$

$$+ \left\{ n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2) - \text{ec.} \right\} \frac{du}{dx}\frac{h}{1}$$

$$+ \left\{ n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^2 - \text{ec.} \right\} \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}$$

. . . . . .

$$+ \left\{ n^i - \frac{n}{1}(n-1)^i + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^i - \text{ec.} \right\} \frac{d^iu}{dx^i}\frac{h^i}{1.2.3\ldots i}$$

ove l'espressioni comprese nelle parentesi grandi sono i valori che prende la prima espressione di $\Delta^n.x^m$ del n.° 31, quando ci facciamo $x=0$, $h=1$, $m=1, =2, \ldots\ldots =i$, e sono nulle per valori interi di i minori di n.

Per indicare quest' origine il Brinkley gli rappresenta in generale con $\Delta^n.0^i$; siccome $\Delta^n.0^n = 1.2.3.4\ldots\ldots n$ (n.° 31), egli scrive

$$\Delta^n u = \frac{d^nu}{dx^n}h^n + \frac{\Delta^n.0^{n+1}}{1.2\ldots\ldots(n+1)}\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}$$

$$+ \frac{\Delta^n.0^{n+2}}{1.2\ldots\ldots(n+2)}\frac{d^{n+2}u}{dx^{n+2}}h^{n+2} \text{ ec.}$$

Possiamo ancora con un processo che stabiliremo all' articolo (Calcolo Differenziale) dedurre gli uni dagli altri i coefficienti A', A'', ec., dello sviluppo di $(e^h-1)^n$. Osservando che

$$\frac{d.l(e^h-1)^n}{dh} = \frac{ne^h}{e^h-1} = \frac{n}{1-e^{-h}} = \frac{n}{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{2.3} - \frac{h^4}{2.3.4} + \text{ec.}}$$

troveremo facilmente

$$A' = \frac{1}{2}n,$$

$$2A'' = \frac{1}{2}(n+1)A' - \frac{1}{2.3}n,$$

$$3A''' = \frac{1}{2}(n+2)A'' - \frac{1}{2.3}(n+1)A' + \frac{1}{2.3.4}n,$$

$$4A'''' = \frac{1}{2}(n+3)A''' - \frac{1}{2.3}(n+2)A'' + \frac{1}{2.3.4}(n+1)A' - \frac{1}{2.3.4.5}n,$$

ec.

77. La medesima relazione fra le potenze e le differenze si ritrova nelle funzioni di un numero qualunque di variabili; e per non dubitarne, basterà considerare il caso che dipenderebbe nel medesimo tempo da x e da y. Se conce-

piamo che queste due variabili diventino respettivamente $x+h$, e $y+k$, la funzione u si cangierà in

$$u+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3+3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3u}{dxdy^2}hk^2+\frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\}$$

$+$ ec. (*Vedi* Calcolo Differenziale)

e se da questa formula si sottrae u, il resto sarà lo sviluppo di Δu, differenza totale di u, e si formerà da quello dell' espressione

$$e^{\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k}-1$$

osservando di trasportare alla caratteristica d gli esponenti di du, vale a dire di cangiare il prodotto $\frac{du^p}{dx^p}\frac{du^q}{dy^q}$ in $\frac{d^{p+q}u}{dx^pdy^q}$, o meglio ancora ponendo l'equazione

$$\Delta u=\left(e^{h\frac{d}{dx}+k\frac{d}{dy}}-1\right)u,$$

e aggiungendo l' u alla caratteristica d, quando si svilupperà.

Si avrà quindi, per analogia,

$$\Delta^n u=\left(e^{h\frac{d}{dx}+k\frac{d}{dy}}-1\right)^n u.$$

Infatti vedremo dagli sviluppi successivi che producono le sostituzioni reiterate di $x+h$ e $y+k$, in quelli di Δu, $\Delta^2 u$, ec., che

$$\Delta^n u=\left\{\frac{d^nu}{dx^n}h^n+A'\frac{d^nu}{dx^{n-1}dy}h^{n-1}k+A''\frac{d^nu}{dx^{n-2}dy^2}h^{n-2}k^2+\text{ec.}\right\}$$

$$+\left\{B\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}h^{n+1}+B'\frac{d^{n+1}u}{dx^ndy}h^nk+B''\frac{d^{n+1}u}{dx^{n-1}dy^2}h^{n-1}k^2+\text{ec.}\right\}$$

$+$ ec.;

e se prendiamo $u=e^{x+y}$, si troverà

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}=\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{d^2u}{dxdy}=\frac{d^2u}{dy^2}=\text{ec.}=e^{x+y}$$

$$\Delta u=e^{x+h+y+k}-e^{x+y}=e^{x+y}\left(e^{h+k}-1\right),$$

$$\Delta^2 u=e^{x+y}\left(e^{h+k}-1\right)^2$$

. . . . . .

$$\Delta^n u=e^{x+y}\left(e^{h+k}-1\right)^n,$$

valori che cangeranno l' espressione generale di $\Delta^n u$ in

$$\left(e^{h+k}-1\right)^n = h^n + A' h^{n-1} k + A'' h^{n-2} k^2 + A''' h^{n-3} k^3 + \text{ec.}$$
$$+ B h^{n+1} + B' h^n k + B'' h^{n-1} k^2 + B''' h^{n-2} k^3 + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.}:$$

ora gli accrescimenti h e k dovendo restare indeterminati, ne risulta che i coefficienti numerici A', A'', ..., B, B' . . . . . ., ec., del secondo membro saranno identici con quelli dello sviluppo del primo.

Dev' essere evidente, senza che ci sia bisogno di entrare in altre particolarità, che se u dipende da x, y, z, ec., e che h, k, l, ec. siano gli accrescimenti respettivi di queste variabili.

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx} + h\frac{d}{dy} + l\frac{d}{dz} + \text{ec.}} - 1\right)^n u;$$

poichè operando come sopra, ri riporterebbe la determinazione dei coefficienti numerici a quella dello sviluppo di $\left(e^{h+k+l+\text{ec.}} - 1\right)^n$.

78. Riguardo alle differenze parziali delle funzioni di due variabili, si comincia dall' avere l' equazioni

$$\Delta_x^m u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^m u, \quad \Delta_y^n u = \left(e^{k\frac{d}{dy}} - 1\right)^n u \text{ (n.° 71).}$$

Combinando la seconda formula con la prima, per sviluppare

$$\Delta_y^n\left(\Delta_x^m u\right) = \Delta_{x,y}^{m+n} u,$$

si ottiene un risultamento della forma

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u = \frac{d^{m+n} u}{dx^m dy^n} h^m k^n + A \frac{d^{m+n+1} u}{dx^{m+1} dy^n} h^{m+1} k^n + \text{ec.}$$
$$+ A' \frac{d^{m+n+1} u}{dx^m dy^{n+1}} h^m k^{n+1} + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.},$$

ove i coefficienti A, A', ec., sono indipendenti dalle variabili x, y e dai loro accrescimenti h, k; e si cade sopra un' espressione della medesima forma quando si sviluppa il secondo membro dell' equazione

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)^m \left(e^{k\frac{d}{dx}} - 1\right)^m u:$$

non si tratta dunque più che di provare l' identità dei coefficienti, il che si fa ancora ponendo $u = e^{x+y}$, donde risulta

$$\Delta_{x,y}^{m+n} u = e^{x+y}\left(e^h - 1\right)^m \left(e^k - 1\right)^n,$$

e di dove si vede che la formazione dei coefficienti di cui si tratta, è la medesima tanto nella prima espressione quanto nella seconda.

79. Il medesimo metodo conduce alla dimostrazione della formula generale del n.° 63. Infatti le operazioni successive indicate in questo numero, dovendo condurre a un'espressione della forma

$$\Delta^n u = A\,\Delta^n_{x,y} u + A'\Delta^{(n-1)+1}_{x,y} u + A''\,\Delta^{(n-2)+2}_{x,y} u + \text{ec.}$$

$$+ B\,\Delta^{n+1}_{x} u + B'\Delta^{n+1}_{x,y} u + B''\Delta^{(n-1)+2}_{x,y} u + \text{ec.}$$

$$+ C\,\Delta^{n+2}_{x} u + C'\Delta^{(n+1)+1}_{x,y} u + C''\Delta^{n+2}_{x,y} u + \text{ec.}$$

$$+ \text{ec.},$$

che la supposizione di $u = e^{x+y}$ cangia in

$$\left(e^{h+k}-1\right)^n = A\left(e^h-1\right)^n + A'\left(e^h-1\right)^{n-1}\left(e^k-1\right)$$
$$+ A''\left(e^h-1\right)^{n-2}\left(e^k-1\right)^2 + \text{ec.}$$
$$+ B\left(e^h-1\right)^{n+1} + B'\left(e^h-1\right)^n\left(e^k-1\right)$$
$$+ B''\left(e^h-1\right)^{n-1}\left(e^k-1\right)^2 + \text{ec.}$$
$$+ \text{ec.},$$

si conosceranno i coefficienti A, A', ec., B, ec., se otteniamo per il primo membro uno sviluppo della medesima forma del secondo membro, il che è facile, osservando che

$$\left(e^{h+k}-1\right)^n = \left\{\left[1+\left(e^h-1\right)\right]\left[1+\left(e^k-1\right)-1\right]\right\}^n:$$

il coefficiente di un termine qualunque $\left(e^h-1\right)^r\left(e^k-1\right)^s$ in questo sviluppo, sarà perciò quello di $\Delta^{r+s}_{x,y} u$ in quello di $\Delta^n u$, così potremo porre

$$\Delta^n u = \left\{\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_y\right)-1\right\}^n u.$$

Si arriverà al medesimo risultamento, ricavando dall'espressione di $\Delta_x u$, e di $\Delta_y u$, quelle di

$$e^{h\frac{d}{dx}} = 1+\Delta_x, \qquad e^{k\frac{d}{dy}} = 1+\Delta_y,$$

e sostituendo quest'ultime in

$$\Delta^n u = \left(e^{h\frac{d}{dx}+k\frac{d}{dy}}-1\right)^n u \text{ (n.° 77).}$$

Non spingeremo più avanti questi calcoli, dai quali si vede evidentemente che, qualunque sia il numero delle variabili della funzione u,

$$\Delta^n u = \left\{\left(1+\Delta_x\right)\left(1+\Delta_y\right)\left(1+\Delta_z\right)\ldots\ldots-1\right\}^n u.$$

80. Fin qui abbiamo supposto che gli accrescimenti delle variabili indipendenti fossero costanti; nel caso contrario, l'applicazione del teorema del Taylor, dà un'espressione elegantissima dello sviluppo di $\Delta^n u$, quando u non contiene che la variabile x. Per giungervi, sia

$$x_1 - x = h, \quad x_2 - x = h_2, \quad x_3 - x = h_3 \ldots\ldots x_n - x = h_n;$$

otterremo

$$u_1 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_1}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_1}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_1}{1.2.3} + \text{ec.},$$

$$u_2 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_2}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_2}{1.2.3} + \text{ec.},$$

$$u_3 = u + \frac{du}{dx}\frac{h_3}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_3}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3_3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = u + \frac{du}{dx}\frac{h_n}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2_n}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h_n}{1.2.3} + \text{ec.},$$

e sostituendo questi valori nella formula

$$\Delta^n u = u_n - \frac{n}{1}u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u_{n-3} + \text{ec.},$$

avremo

$$\Delta^n u = u\left\{1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \text{ec.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1}\frac{du}{dx}\left\{h_n - \frac{n}{1}h_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h_{n-3} + \text{ec.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\left\{h^2_n - \frac{n}{1}h^2_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^2_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^2_{n-3} + \text{ec.}\right\}$$

$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\left\{h^3_n - \frac{n}{1}h^3_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}h^3_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}h^3_{n-3} + \text{ec.}\right\}$$

$$+ \text{ec.}$$

Il coefficiente di u è identicamente nullo; mentre esso è lo sviluppo di $(1-1)^n$, di più, se si cangiassero in esponenti gl'indici della lettera h; le serie che moltiplicano $\frac{du}{du}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, ec., diventerebbero respettivamente eguali agli sviluppi di $(h-1)^n$, $(h^2-1)^n$, $(h^3-1)^n$, ec., privati del loro ultimo termine, che è ∓ 1, secondo che n è impari o pari: possiamo perciò sostituire in luogo di queste serie le quantità

$$(h-1)^n \pm 1, \quad (h^2-1)^n \pm 1, \quad (h^3-1)^n \pm 1, \text{ ec.},$$

osservando, quando svilupperemo, di cangiare in indici tutti gli esponenti n, $n-1$, $n-2$, ec., e di non lasciare alla lettera h che gli esponenti 1, 2, 3, ec.

dai quali essa è affetta nelle parentesi di sopra, ed è così che il signor Prony ha presentato la formula seguente:

$$\Delta^n u = \frac{1}{1}\frac{du}{dx}\left[\left(h-1\right)^n \pm 1\right] + \frac{1}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\left[\left(h^2-1\right)^n \pm 1\right]$$
$$+ \frac{1}{1.2.3}\frac{d^3u}{dx^3}\left[\left(h^3-1\right)^n \pm 1\right] + \text{ec.}$$

81. Il valore che prende la funzione u, quando cangiamo x in $x+nh$, è per il teorema del Taylor,

$$u + \frac{du}{dx}\frac{nh}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{n^2h^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{n^3h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

e per l'espressione di u_n (n.° 26),

$$u + \frac{n}{1}\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\Delta^3 u + \text{ec.};$$

si hanno dunque così due sviluppi della medesima espressione, l'uno ordinato secondo le potenze di n, e l'altro secondo prodotti di fattori equidifferenti. Effettuando questi prodotti e paragonando i termini affetti dalla medesima potenza di n, nelle due espressioni, viene

$$\frac{du}{dx}h = \Delta u - \frac{1}{2}\Delta^2 u + \frac{1}{3}\Delta^3 u - \frac{1}{4}\Delta^4 u + \text{ec.}$$

$$\frac{d^2u}{dx^2}h^2 = \Delta^2 u - \Delta^3 u + \frac{11}{12}\Delta^4 u - \text{ec},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3}h^3 = \Delta^3 u - \frac{3}{2}\Delta^4 u + \text{ec.},$$

$$\frac{d^4u}{dx^4}h^4 = \Delta^4 u - \text{ec.},$$

ec.

L'Eulero, che trovò il primo questi valori, quasi nella medesima maniera, non nè osservò la legge; ed essa non è evidente che per la prima, dalla formazione della quale si vede chiaramente che possiamo scrivere

$$\frac{du}{dx}h = \left\{l\left(1+\Delta\right)\right\}u.$$

La medesima cosa succederebbe ancora rovesciando l'equazione

$$\Delta u = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)u$$

sopprimendovi prima la lettera u nei due membri; poichè

$$\Delta = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right) \text{ dà } e^{\frac{d}{dx}} = 1+\Delta, \text{ donde } h\frac{d}{dx} = l(1+\Delta);$$

e rimettendo la lettera u, formeremo il valore di $\frac{du}{dx}h$.

Per analogia se ne concluderà che

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \left\{ l\left(1+\Delta\right) \right\}^n u,$$

il che si verificherà facilmente, poichè si sa digià che il valore cercato dev' essere della forma

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \Delta^n u + B'\Delta^{n+1} u + B''\Delta^{n+2} u + \text{ec.}$$

Facendo $u = e^x$ in questa equazione, ne dedurremo

$$h^n = \left(e^h - 1\right)^n + B'\left(e^h - 1\right)^{n+1} + B''\left(e^h - 1\right)^{n+2} + \text{ec.};$$

e per mettere in evidenza l' identità dei due membri di questa equazione, basterà osservare che $h^n = \left\{ l\left(1+e^h - 1\right) \right\}^n$, perchè lo sviluppo di $l\left(1+e^h - 1\right)$, ordinato secondo le potenze di $e^h - 1$, essendo

$$\left(e^h - 1\right) - \frac{1}{2}\left(e^h - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(e^h - 1\right)^3 - \frac{1}{4}\left(e^h - 1\right)^4 + \text{ec.},$$

se poniamo per abbreviare, $e^h - 1 = \theta$, verrà

$$\left\{ \theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^3 - \frac{1}{4}\theta^4 + \text{ec.} \right\}^n = \theta^n + B'\theta^{n+1} + B''\theta^{n+2} + \text{ec.},$$

equazione per mezzo della quale i coefficienti B', B'', ec., saranno determinati. E siccome scrivendo nel secondo membro $\Delta^n u$, $\Delta^{n+1} u$, ec., in luogo di θ^n, θ^{n+1}, ec., avremo il valore di $\frac{d^n u}{dx^n} h^n$, ne segue che questo valore è eguale a ciò che diventa lo sviluppo di $\left\{ l\left(1+\theta\right) \right\}^n$, quando effettuiamo un simile cangiamento, vale a dire che

$$\frac{d^n u}{dx^n} h^n = \left\{ l\left(1+\Delta\right) \right\}^n u.$$

Si determinerebbero successivamente i coefficienti B', B'', ec., gli uni per mezzo degli altri, applicando all' espressione

$$\left(\theta - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{3}\theta^3 - \frac{1}{4}\theta^4 + \text{ec.}\right)^n$$

il metodo che si pratica nel calcolo differenziale (*Vedi* questa parola).

Faremo osservare che l' espressione di $\Delta'' u$, ottenuta nel n.° 55, e che suppone $h = 1$, essendo messa sotto la forma

$$\frac{\Delta'^r u}{\left(\frac{1}{m}\right)^r} = \frac{1}{1.2\ldots r}\left\{\alpha\,\Delta^r u + \frac{\frac{\varsigma}{m} + \alpha A'}{r+1}\Delta^{r+1}u\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{\gamma}{m^2} + \frac{\beta}{m}A'' + \alpha B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u + \text{ec.}\right\}$$

dà ancora

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \frac{1}{1.2\ldots r}\left\{\alpha\,\Delta^r u + \frac{\alpha A'}{r+1}\Delta^{r+1}u + \frac{\alpha B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u + \text{ec.}\right\},$$

allorquando ci facciamo $\frac{1}{m} = dx$, e che se ne prenda il limite nell' ipotesi di m infinita; e perchè $\alpha = \Delta^r . t^r = 1.2.3\ldots r$ (n.° 29.), essa si riduce a

$$\frac{d^r u}{dx^r} = \Delta^r u + \frac{A'}{r+1}\Delta^{r+1}u + \frac{B''}{(r+1)(r+2)}\Delta^{r+2}u + \text{ec.},$$

il che fa vedere l'origine dei cofficienti A', B'', ec.

82. Le precedenti formule suppongono che le differenze della variabile x siano costantemente egnali ad h; quando questa circostanza non ha luogo, è necessario ricorrere all' espressioni di u_x, ottenute nei numeri 47 e 51. Differenziando la prima, se ne ricava

$$\frac{du}{dx} = \frac{d.(x-a)}{dx}\delta u + \frac{d.(x-a)(x-a_1)}{dx}\delta^2 u + \text{ec.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d^2(x-a)(x-a_1)}{dx^2}\delta^2 u + \text{ec.},$$

ec.

Abbiamo dunque il mezzo di determinare, in tutti i casi, i coefficienti differenziali di una funzione, senza conoscere la sua espressione analitica, ma quando abbiamo solamente un dato numero dei suoi valori. Bisogna però rammentarsi le restrizioni indicate nei numeri 42 e 52., poichè esse convengono egualmente alle formule che abbiamo costruite, e la di cui applicazione non è sicura che quando esse sono convergenti: bisogna ancora osservare che errori poco considerabili, nei valori di u, diventano grandissimi relativamente alle differenze di un ordine elevato di questa funzione, rendendo spesso inesattissimi i valori dei coefficienti differenziali che se ne deducono.

83. L'espressione

$$u + \frac{du}{dx}\frac{h'}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h'^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3}\frac{h'^3}{1.2.3} + \text{ec.},$$

che il teorema del Taylor dà per lo sviluppo di ciò che diventa u, quando x riceve l'accrescimento qualunque h', può esser cangiata in una formula d' interpolazione, sostituendoci, in luogo dei coefficienti differenziali, le loro espres-

sioni trovate di sopra, in differenze. Chiamando u', il nuovo valore di u, viene subito,

$$u' = u + \frac{h'}{1.h}\left[l\left(1+\Delta\right)\right]u + \frac{h'^2}{1.2.h^2}\left[l\left(1+\Delta\right)\right]^2 u$$

$$+ \frac{h'^3}{1.2.3h^3}\left[l\left(1+\Delta\right)\right]^3 u + \text{ec. (n.° 81)},$$

formula ordinata secondo le potenze di h', ma che non è molto applicabile, quando non si ordini rapporto alla caratteristica Δ; ora, è facile vedere che essa deve prendere allora la forma

$$u' = u + \frac{h'}{h}\Delta u + \left(A\frac{h'}{h} + A'\frac{h'^2}{h^2}\right)\Delta^2 u$$

$$+ \left(B\frac{h'}{h} + B'\frac{h'^2}{h^2} + B''\frac{h'^3}{h^3}\right)\Delta^3 u + \text{ec.}$$

Se qoindi si fa $u = e^x$, donde $u' = e^{x+h'}$, ne risulta

$$e^{h'} = 1 + \frac{h'}{h}\left(e^h - 1\right) + \left(A\frac{h'}{h} + A'\frac{h'^2}{h^2}\right)\left(e^h - 1\right)^2 + \text{ec.};$$

e possiamo dare al primo membro la forma del secondo, osservando che

$$e^{h'} = \left[1 + \left(e^h - 1\right)\right]^{\frac{h'}{h}};$$

basterà dunque di sostituire, in quest' ultima espressione invece di $e^h - 1$ la caratteristica Δ, per giungere all'equazione

$$u' = \left(1+\Delta\right)^{\frac{h'}{h}} u,$$

il di cui sviluppo darà la medesima formula del n.° 43.

È adesso evidente che questa formula non può legittimamente essere impiegata a rappresentare una funzione incognita, che quando l'intervallo h, compreso tra i valori della variabile indipendente, è abbastanza piccolo, perchè l'espressioni del n.° 81 siano convergenti e diano almeno un valore approssimato dei coefficienti differenziali, il che conferma le osservazioni fatte nel n.° 72.

84. Se si sottrae u da u', la formula precedente darà

$$\Delta' u = \left\{\left(1+\Delta\right)^{\frac{h'}{h}} - 1\right\} u$$

e se ne concloderà, per l'analogia di già si spesso verificata, fra le differenze e le potenze, che

$$\Delta'^n u = \left\{\left(1+\Delta\right)^{\frac{h'}{h}} - 1\right\}^n u.$$

Quest' equazione può ancora dedursi dalla combinazione di quelle del n.° 74; poichè avendo

$$\Delta'^n u = \left(e^{h'\frac{d}{dx}} - 1\right)^n u,$$

$$e^{h\frac{d}{dx}} u = u + \Delta u,$$

donde

$$e^{\frac{d}{dx}} u = \left(1+\Delta\right)^{\frac{1}{h}} u,$$

ne risulta precisamente l'equazione di sopra, il di cui sviluppo darà le differenze della funzione u, per l'accrescimento h' di x, per mezzo di quelle che hanno luogo per l'accrescimento h.

Quest' espressione risolverebbe dunque ancora il problema che si era proposto il Mouton (n.° 55).

85. Tutte queste relazioni si estendono con facilità alle funzioni di più variabili; ed è facile vedere che la formula

$$\left\{ h\frac{d}{dx} + k\frac{d}{dy} + l\frac{d}{dz} + \text{ec.} \right\}^n u = \left\{ l\left(1+\Delta\right) \right\}^n u$$

inversa di quella del n.° 77, si verificherebbe come quella del n.° 81.

Inseguito, l' equazioni del n.° 78, rapporto alle differenze parziali, dando

$$e^{\frac{d}{dx}} u = \left(1+\Delta_x\right)^{\frac{1}{h}} u,$$

$$e^{\frac{d}{dy}} u = \left(1+\Delta_y\right)^{\frac{1}{k}} u,$$

$$e^{\frac{d}{dz}} u = \left(1+\Delta_z\right)^{\frac{1}{l}} u,$$

ec.

se si sostituiscono questi valori in

$$\Delta'^n u = \left\{ e^{h'\frac{d}{dx} + k'\frac{d}{dy} + l'\frac{d}{dz} + \text{ec.}} - 1 \right\}^n u \text{ (n.° 77)},$$

otterremo

$$\Delta'^n u = \left\{ \left(1+\Delta_x\right)^{\frac{h'}{h}} \left(1+\Delta_y\right)^{\frac{k'}{k}} \left(1+\Delta_z\right)^{\frac{l'}{l}} \text{ec.} - 1 \right\} u.$$

Ponendo $n=1$ in quest' espressione, se ne dedurrà, per l'interpolazione delle funzioni di un numero qualunque di variabili, una formula analoga a quella del n.° 62; e siccome se ne potrà ricavare ancora tutte le differenze di u relative agli accrescimenti h', k', l', ec. di x, y, z, ec., per mezzo di quelle che corrispondono agli accrescimenti h, k, l, ec., essa risolverà, in questo caso il problema analogo a quello del n.° 55.

86. Può essere utile fare osservare che se, nell'espressioni di $\Delta^n u$, formata secondo l'ipotesi del n.° 65, si scrivesse in prima linea i termini che contengono la potenza la meno elevata di ciascuna delle differenze delle variabili x, y, ec., la riunione di questi termini diventerà identica con la differenziale $d^n u$, quando vi si cangerà Δx, $\Delta^2 x$, ec., Δy, $\Delta^2 y$, ec. in dx, d^2x, ec., dy, d^2y, ec., che ciascuna di loro sarà della forma

$$M\Delta x^p \Delta^2 x^{p'} \Delta^3 x^{p''} \ldots\ldots \Delta y^q \Delta^{2q'} \Delta^3 y^{q''} \ldots\ldots \Delta z^r \Delta^2 z^{r'} \Delta^3 z^{r''}, \text{ ec.},$$

M indicando una funzione delle variabili x, y, z, ec., e gli esponenti soddisfacendo all'equazione

$$p+2p'+3p'' \ldots\ldots +q+2q'+3q'' \ldots\ldots +r+2r'+3r'' \ldots\ldots = n.$$

Questa è una conseguenza della subordinazione stabilita fra le differenziali (*Vedi* Calcolo differenziale), a motivo che esse sono i primi termini delle differenze del medesimo ordine, o ciò che è la medesima cosa, da quello che, se si rapportano le variabili x, y, z, ec. ad una medesima variabile indipendente t, il coefficiente differenziale $\frac{d^n u}{dt^n}$ sarà la funzione che moltiplica dt^n nello sviluppo di $\Delta^n u$.

1. DIFFERENZIALE CALCOLO. Quando gli accrescimenti delle variabili sono considerati come *infinitamente piccoli* il calcolo delle differenze prende il nome di *Calcolo differenziale*. Allora la natura puramente *ideale* delle quantità, sopra le quali si opera, porta non solamente modificazioni nei processi del calcolo, ma gli dà ancora una particolare significazione, che fino a quest' epoca, sembra non essere stata compresa dal maggior numero dei matematici. Tentiamo, tanto quanto i limiti di questo dizionario possano permettercelo, di appianare le difficoltà che, fin dall'invenzione del calcolo differenziale, hanno portato alcuni geometri celebri ad eludere l' idea dell' infinito, sostituendo ai processi, tanto eminentemente semplici di questo calcolo, processi indiretti e complicati.

Osserviamo prima di tutto che l'intelligenza dell' uomo si compone di facoltà differenti, che ciascuna ha le proprie leggi, e che qualunque conoscenza è il prodotto della doppia azione, dell'oggetto di questa conoscenza sopra le facoltà intellettuali, e delle facoltà sopra quest' oggetto. Ed è così, per esempio, per farci comprendere con un' immagine sensibile, che nelle sensazioni dell' organo della vista, la *visione* è il risultamento composto dell'azione di un oggetto materiale sopra l'occhio e della reazione dell' occhio sopra quest' oggetto; da quest' azione scambievole nasce la sensazione del *colore*; colore del quale non possiamo cercare l'origine nè nell'oggetto nè nell' organo affetto, ma bensì nella riunione delle loro attività.

Segue il medesimo per le facoltà dell'intelligenza; ciascuna facoltà è dotata di disposizioni primitive o di leggi particolari, che entrano come parti costitutenti nelle conoscenze alle quali ci eleviamo col suo mezzo. È dunque ancora essenziale di non confondere i prodotti di queste diverse facoltà con queste facoltà medesime. Ora, due facoltà opposte dominano tutta l' intelligenza umana, queste sono l' Intendimento e la Ragione, che si neutralizzano con la facoltà intermediaria del *giudizio*. Le funzioni dell' *intendimento* si rapportano agli oggetti sensibili, vale a dire agli oggetti reali che esistono nello spazio e nel tempo. Questa facoltà agisce introducendo un'unità intellettuale nelle intuizioni che abbiamo di questi oggetti; i suoi prodotti si chiamano *percezioni generali* o *concezioni*. Le funzioni della *ragione* non si esercitano sopra gli oggetti essi medesimi o sopra le loro intuizioni, ma bensì sopra le concezioni dell'intendimento che questa facoltà superiore riporta all'unità; i suoi prodotti si chiamano *concezioni generali*, o *idee*, prendendo la parola idea nella sua accezione filosofica. Le funzioni del *giudizio* si esercitano alternativamente sopra le concezioni dell'intendimento e sopra le idee della ragione; questa facoltà, i di cui prodotti si chiamano *giudizi*, agisce discendendo dalle concezioni generali alle concezioni particolari, o risalendo dalle seconde alle prime.

Premesso ciò, è evidente che l'idea dell' *infinito* è un prodotto della ragione, e per conseguenza un prodotto essenzialmente differente da quello dell' intendimento che dà la concezione di una quantità finita. Infatti la concezione di una quantità finita serve a legare le intuizioni che abbiamo degli oggetti riportandole all'unità, nel mentre che l'idea dell'infinito è assolutamente inapplicabile agli oggetti sensibili e non può riportarsi ad alcuna conoscenza da effettuarsi per mezzo dell' esperienza. Ma quest' idea dell' infinito, ultimo termine della ragione,

sottoposta all'influenza del giudizio, si trasforma in idea dell'*indefinito* e diventa allora applicabile alle concezioni dell'intendimento, nelle quali essa introduce l'ultima unità intellettuale.

Così la concezione di una quantità finita si riferisce sempre ad oggetti reali, da effettuarsi per mezzo dell'esperienza, e serve di legge costitutiva a relazioni possibili in questi oggetti; nel mentre che l'idea di una quantità indefinita non si riferisce che sopra funzioni egualmente dell'intelligenza, e serve di legge regolativa o di regola per la *generazione* non della quantità essa medesima, ma della sua *conoscenza*.

Le quantità finite e le quantità indefinite appartengono dunque a due classi opposte di conoscenze, e conseguentemente le leggi delle prime non possano essere le medesime leggi delle seconde. Ed è alla confusione dell'origine di queste due specie tanto differenti di quantità che siamo debitori di tutte le controversie di cui il calcolo differenziale è stato l'oggetto.

La prima legge di questo calcolo è

Due quantità che non differiscono fra loro che di una quantità indefinitamente più piccola, sono rigorosamente eguali.

Questa è la legge sopra della quale i geometri durano tanta fatica a comprendere che riposa tutta la questione. Questione per la soluzione della quale bisogna, per verità, elevarsi al di sopra della scipita metafisica del Condillac e del suo grossolano meccanismo delle sensazioni. La maggior parte dei matematici moderni riguardano ancora la *lingua dei calcoli* e altre inezie simili come il più sublime sforzo dell'intelligenza, noi non possiamo rimanere che attoniti quando pensiamo che malgrado la pubblicazione fatta nell'anno 1815, dal signor Wronski, di un'opera intitolata *Philosophie de l'infini*, e nella quale la legge del calcolo differenziale si trova dimostrata nel modo il più rigoroso, questi matematici abbiano persistito nella loro sapiente pretensione di bandire *l'infinito* dalle matematiche; ma non possiamo impedirci di deplorare la condizione della gioventù, alla quale s'impone lo studio di opere che non si fanno osservare che per l'assenza totale d'idee filosofiche.

La dimostrazione completa della gran legge delle quantità infinitesimali riposa sopra la distinzione necessaria, che esiste fra le leggi *reali* delle quantità finite e le leggi *ideali* delle quantità indefinite; distinzione della quale non abbiamo di sopra potuto riassumere che i principj, e per la quale rimanderemo i nostri lettori alla *Philosophie de l'infini*, mentre è in quest'opera solamente che essi potranno approfondirla, e conseguentemente apprezzare la dimostrazione di cui essa è la base. Qui non possiamo che indebolire questa dimostrazione riepilogandola come segue.

Le leggi delle quantità indefinite, non essendo, come l'abbiamo detto di sopra, che leggi *ideali* le quali non possono servire di regola che per la generazione della conoscenza della quantità, e non leggi reali della relazione medesima delle quantità, è evidente che due quantità, A e B, le quali non differiscono fra loro che di una quantità indefinitamente più piccola C, sono rigorosamente eguali. Poichè l'idea della quantità indefinita C non essendo che una regola per la generazione della conoscenza delle quantità dell'ordine di A e di B, e conseguentemente non potendo avere alcuna *realtà* nella sfera di grandezza ove si trovano A e B, non può, con la sua influenza puramente ideale, cangiare in niente la relazione di quest'ultime quantità considerate nella sua realtà.

2. Ci serviamo della caratteristica d per indicare le differenze infinitamente piccole o le differenziali. Così dx è la differenziale di x e $d\varphi x$ quelle di φx.

dx essendo una quantità infinitamente piccola, dx^2 è una quantità infinitamente piccola del second'ordine, o una quantità infinitamente piccola rapporto a dx;

egualmente dx^3 è una quantità infinitamente piccola del terz'ordine; il prodotto di due quantità infinitamente piccole come dx, e dy è ancora una quantità infinitamente piccola del second'ordine; il prodotto di tre quantità infinitamente piccole dx, dy, dz è egualmente una quantità infinitamente piccola del terz'ordine, ec., ec. *Vedi* Infinito.

La legge delle quantità infinitesimali abbracciando i differenti ordini di queste quantità, è evidente che gl'infinitamente piccoli di un ordine qualunque non hanno alcun valore accanto a quelli dell'ordine precedente, considerati come capaci di dar luogo ad una relazione reale, vale a dire che l'eguaglianza

$$A = B + C$$

si riduce sempre ad

$$A = B,$$

se, qualunque sia l'ordine di grandezza delle quantità A e B, C è una quantità infinitamente piccola rapporto ad A e B.

Premesso tutto ciò, sebbene il calcolo infinitesimale sia quello, che in ultima analisi, viene adoperato da tutti i geometri nelle parti più sublimi delle matematiche, attesa la sua massima semplicità; pure siccome la maggior parte dei corsi elementari di matematiche hanno trattato la teoria del calcolo sublime per mezzo dei limiti, e siccome nel presente dizionario ci siamo imposti l'obbligo di esporre i diversi metodi *elementari* usati da'geometri nella spiegazione delle diverse parti delle matematiche, così abbiamo creduto di prendere dai migliori autori del giorno il modo col quale hanno spiegato il calcolo differenziale, ed è per ciò che esporremo prima tutte le regole del medesimo col metodo dei *limiti*, quindi dimostreremo le medesime per mezzo degli infinitesimi; cosa che darà ancora luogo ai lettori di poter confrontare l'uno con l'altro metodo, e a dedurne quelle conseguenze che giudicheranno migliori.

3. L'algebra propriamente detta, considera la quantità in se medesima, e riferita ad uno stato di grandezza fisso e determinato. Le relazioni che quantità soggette a condizioni date debbono avere fra loro, formano l'oggetto delle questioni che si trattano in quel ramo d'analisi.

Nel Calcolo Differenziale al contrario, supponiamo che la quantità passi per differenti stati di grandezza, e si considerano i cangiamenti che ne risultano nelle sue funzioni.

Le quantità che possono cangiare di grandezza, o che si riguardano come aventi la facoltà di cangiare di grandezza, si chiamano quantità *variabili*; e si chiamano *costanti* quelle quantità che conservano il medesimo valore in tutto il corso del calcolo.

Le *costanti* soglionn indicarsi con le prime lettere a, b, c, ec. e non crescono nè scemano. Le *variabili* con l'ultime x, y, z, ec., e crescono o scemano continuamente. Per dare un esempio tanto delle prime, quanto delle seconde, faremo osservare che il diametro del circolo, gli assi, i parametri delle curve ec. sono quantità costanti, mentre le ascisse, le ordinate, le tangenti ec. sono quantità variabili.

Possiamo frattanto osservare, da quanto abbiamo detto sopra, che le quantità costanti e variabili sono sempre determinate dalla natura della questione.

4. Si dice che *una variabile è funzione di un'altra variabile*, quando la prima è eguale ad una data espressione analitica composta della seconda, per esempio, y è una funzione di x nelle seguenti equazioni.

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = x^3 - 3bx^2, \quad y = \frac{x^2}{a}, \quad y = b + cx^3.$$

5. Consideriamo adesso una funzione nel suo stato di accrescimento, in virtù di quello della variabile che essa contiene: qualunque funzione di una variabile x potendo essere rappresentata dall'ordinata di una curva BMM' (*Tav.* CIII, *fig.* 1), siano AP $=x$ e PM $=y$, le coordinate di un punto M di questa curva, e supponiamo che l'ascissa AP riceva un accrescimento PP' $=h$; l'ordinata PM diventerà P'M' $=y'$. Per ottenere il valore di questa nuova ordinata, si vede dunque che bisogna cangiare x in $x+h$ nell'equazione della curva; e il valore che quest' equazione determinerà allora per y sarà quello di y'.

Per esempio, se si avesse l'equazione $y=mx^2$, si otterrebbe il valore di y' cangiando x in $x+h$ e y in y', e si avrebbe

$$y'=m(x+h)^2,$$

ovvero sviluppando

$$y'=mx^2+2mxh+mh^2.$$

6. Prendiamo adesso l'equazione

$$y=x^3 \ldots\ldots (1),$$

e supponiamo che y diventi y' quando x diventa $x+h$, avremo per ciò

$$y'=(x+h)^3,$$

ed eseguendo l'operazione indicata

$$y'=x^3+3x^2h+3xh^2+h^3.$$

Se da quest' equazione si sottrae l'equazione (1), rimarrà

$$y'-y=3x^2h+3xh^2+h^3;$$

e dividendo per h

$$\frac{y'-y}{h}=3x^2+3xh+h^2 \ldots\ldots (2).$$

Vediamo cosa significa questo risultamento: $y'-y$ rappresenta l'accrescimento della funzione y in virtù dell'accrescimento h dato ad x, poichè questa differenza $y'-y$ è quella del nuovo stato di grandezza di y al suo stato primitivo.

Da un'altra parte l'accrescimento di x essendo h, segue da ciò che l'espressione $\frac{y'-y}{h}$ è il rapporto dell'accrescimento della funzione y a quello della variabile x. Considerando il secondo membro dell'equazione (2), si vede che questo rapporto diminuisce tanto più quanto h diminuisce, e che quando h diventa nullo, questo rapporto si riduce a $3x^2$.

Questo termine $3x^2$ è dunque il limite del rapporto $\frac{y'-y}{h}$; ed è verso questo punto che esso tende allorchè si fa diminuire h indefinitamente.

7. Nell'ipotesi di $h=0$ l'accrescimento di y diventando ancora nullo, $\frac{y'-y}{h}$ si riduce a $\frac{0}{0}$ e per conseguenza l'equazione (2) diventa

$$\frac{0}{0}=3x^2 \ldots\ldots (3).$$

Quest' equazione non ha niente di assurdo, poichè l' algebra c' insegna che $\frac{0}{0}$ può rappresentare qualunque sorte di quantità. D' altra parte si concepisce che poichè dividendo i due termini di una frazione per un medesimo numero, questa frazione non cangia di valore, ne risulta che la piccolezza dei termini di una frazione non influisce in nulla sul suo valore, e che per conseguenza essa può rimanere la medesima, allorquando i suoi termini sono giunti all'ultimo grado di piccolezza, vale a dire sono divenuti nulli.

La frazione $\frac{0}{0}$, che si trova nell'equazione (3), è un simbolo che tiene il posto del rapporto dell'accrescimento della funzione a quello della variabile: siccome questo simbolo non lascia alcuna traccia di questa variabile rappresentiamolo con $\frac{dy}{dx}$; allora $\frac{dy}{dx}$ ci rammenterà che la funzione era y e che la variabile era x. Ma dy e dx conserveranno sempre il carattere di quantità nulle, ed avremo

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$\frac{dy}{dx}$ o piuttosto il suo valore $3x^2$ è il coefficiente differenziale della funzione y.

Osserviamo che $\frac{dy}{dx}$ essendo il segno che rappresenta il limite $3x^2$, come lo prova l'equazione (3), dx dev'essere sempre situato sotto dy. Però, per facilitare le operazioni dell'algebra, possiamo momentaneamente fare sparire il denominatore dall' equazione (4), e si ha $dy = 3x^2dx$. Quest' espressione $3x^2dx$ si chiama la *differenziale* della funzione y.

8. Cerchiamo ancora la differenziale della funzione $a+3x^2$. A quest'effetto, bisogna dunque nell'equazione $y=a+3x^2$, fare $x=x+h$; e cangiando y in y', quest' equazione diventerà

$$y' = a+3x^2+6xh+3h^2$$

dunque $\frac{y'-y}{h} = 6x+3h$; eguagliando $h=0$, viene $\frac{dy}{dx} = 6x$: dunque la differenziale cercata è $dy = 6xdx$.

9. Per terzo esempio, cerchiamo la differenziale di $y = ax^3-b^3$: facciamo $x=x+h$, e sostituendo, abbiamo

$$y' = ax^3+3ax^2h+3axh^2+ah^3-b^3;$$

dunque

$$\frac{y'-y}{h} = 3ax^2+3axh+ah^2;$$

passando al limite, si ha

$$\frac{dy}{dx} = 3ax^2.$$

Tale è il coefficiente differenziale della funzione proposta; la differenziale sarà $dy = 3ax^2dx$.

10. Proponiamoci di trovare ancora la differenziale di $y=\frac{1-x^3}{1-x}$: effettuando la divisione, si trova $y=1+x+x^2$; mettendo $x+h$ in luogo di x, e y' per quello di y, si ottiene

$$y'=1+x+h+x^2+2hx+h^2,$$

e ordinando rapporto ad h

$$y'=1+x+x^2+(2x+1)h+h^2;$$

dunque

$$\frac{y'-y}{h}=2x+1+h$$

passando al limite, si ha $\frac{dy}{dx}=2x+1$; dunque la differenziale di $\frac{1-x^3}{1-x}$ è $(2x+1)dx$.

11. Prendiamo ancora per esempio

$$y=(x^2-2a^2)(x^2-3a^2)$$

sviluppando, si ha

$$y=x^4-5a^2x^2+6a^4$$

sostituendo $x+h$ per x e y' a y, e ordinando quindi rapporto a h, viene

$$y'=x^4-5a^2x^2+6a^4+(4x^3-10a^2x)h$$
$$+(6x^2-5a^2)h^2+4xh^3+h^4;$$

dunque

$$\frac{y'-y}{h}=4x^3-10a^2x+(6x^2-5a^2)h+4xh^2+h^3;$$

passando al limite, si ha

$$\frac{dy}{dx}=4x^3-10a^2x;$$

e moltiplicando per dx, si trova che la differenziale è

$$dy=(4x^3-10a^2x)dx.$$

12. L'espressione dx è essa medesima la differenziale di x; poichè sia $y=x$, si ha $y'=x+h$, dunque $y'-y=h$, e per conseguenza $\frac{y'-y}{h}=1$. Siccome la quantità h non entra nel secondo membro di quest'equazione, si vede che per passare al limite, basta cangiare $\frac{y'-y}{h}$ in $\frac{dy}{dx}$; il che dà $\frac{dy}{dx}=1$; dunque nella nostra ipotesi, $dy=dx$.

13. Si troverà egualmente che la differenziale di ax è adx ; ma se si avesse $y=ax+b$, si otterrebbe ancora adx per la differenziale. Donde segue che una costante b che non è affetta da x, non dà alcun termine alla differenziazione, o, in altri termini, non ha differenziale.

Possiamo d'altronde considerare che se si ha $y=b$, questo è il caso in cui a

è nullo nell'equazione $y=ax+b$, ed ove, per conseguenza, $\frac{dy}{dx}=a$ riducendosi a $\frac{dy}{dx}=0$, non ha nè limite nè differenziale.

14. Bisogna osservare che alcune volte l'accrescimento della variabile è negativo; in questo caso, bisogna, sostituire $x-h$ a x, e operare come precedentemente.

Così, per trovare la differenziale di ax^3 quando l'accrescimento è negativo, sostituiremo $x-h$ invece di x, e si avrà

$$y'=ax^3-3ax^2h+3axh^2-ah^3;$$

dunque

$$\frac{y'-y}{h}=-3ax^2+3axh-ah^2:$$

passando al limite, si avrà $\frac{dy}{dx}=-3ax^2$, e per conseguenza $dy=-3ax^2dx$.

Si vede che ciò equivale a supporre dx negativo nella differenziale di y, calcolata nell'ipotesi di un accrescimento positivo.

15. Avanti di proseguire, facciamo un'osservazione essenziale, cioè, in un'equazione il di cui secondo membro è una funzione di x, che per questa ragione rappresenteremo generalmente con $y=fx$, se si cangia x in $x+h$, e che dopo avere ordinato rapporto alle potenze di h si trovi il seguente sviluppo

$$y'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.},$$

si deve sempre avere $y=A$. Infatti, se facciamo $h=0$, il secondo membro si riduce ad A; riguardo al primo membro, siccome non abbiamo accentato y che per indicare che y provava un dato cangiamento quando x diventava $x+h$, bisognerà quando h sarà nullo, sopprimere l'accento di y, e l'equazione (2) si ridurrà allora a

$$y=A$$

16. Quest'osservazione ci dà i mezzi per rendere più generale il processo della differenziazione. Infatti, se nell'equazione $y=fx$, nella quale si è creduto conoscere l'espressione rappresentata da fx, si è messo $x+h$ in luogo di x, e che dopo avere ordinato rapporto alle potenze di h, si sia potuto ottenere il seguente sviluppo

$$y'=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.},$$

o piuttosto, per il numero precedente,

$$y'=y+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.},$$

si avrà

$$y'-y=Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.}:$$

dunque

$$\frac{y'-y}{h}=B+Ch+Dh^2+\text{ec.};$$

e passando al limite, $\frac{dy}{dx}=B$. Il che insegna che il coefficiente differenziale è

eguale al coefficiente del termine che contiene la prima potenza di h nello sviluppo di $f(x+h)$ ordinato rapporto alle potenze crescenti di h.

17. Se invece di una funzione y, che cangia di stato in virtù dell'accrescimento dato alla variabile x che essa contiene, si hanno due funzioni y, e z di questa medesima variabile x, e che si sappiano trovare in particolare le differenziali di ciascuna di queste funzioni, sarà facile, per mezzo della seguente dimostrazione, di concluderne la differenziale del prodotto zy di queste funzioni. Infatti se si sostituisce $x+h$ in luogo di x in y e in z, otterremo due sviluppi che, essendo ordinati rapporto alle potenze di h, potranno essere rappresentati come segue:

$$y' = y + Ah + Bh^2 + \text{ec} \ldots . (5),$$
$$z' = z + A'h + B'h^2 + \text{ec.} \ldots . (6);$$

passando al limite, si troverà

$$\frac{dy}{dx} = A, \quad \frac{dz}{dx} = A' \ldots . (7);$$

moltiplicando l'equazioni (5) e (6) l'una per l'altra, otterremo

$$\begin{aligned} z'y' = zy + A\,zh + Bzh^2 + \text{ec.} \\ + A'yh + AA'h^2 + \text{ec.} \\ + B'yh^2 + \text{ec.}; \end{aligned}$$

dunque

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + \text{ec.};$$

passando al limite, e indicando con un punto l'espressione che deve essere differenziata, otterremo

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y;$$

mettendo invece di A e A' i loro valori dati dall'equazioni (7), verrà

$$\frac{d.zy}{dx} = \frac{zdy}{dx} + \frac{ydz}{dx},$$

e sopprimendo il divisore comune dx,

$$d.zy = zdy + ydz.$$

Così, per trovare la differenziale di un prodotto di due variabili, bisogna moltiplicare ciascuna variabile per la differenziale dell' altra, e aggiungere i prodotti.

18. Per mezzo di questa regola, troveremo facilmente la differenziale di un prodotto di tre variabili.

Sia, per esempio yzu, facciamo $yz = t$, avremo dunque

$$d.yzu = d.tu.$$

Ora da quello che precede,

$$d.tu = tdu + udt \ldots . (8);$$

e poichè $t = yz$, si ha $dt = ydz + zdy$; mettendo dunque questi valori di t e di dt nell'equazione (8), essa si cangerà in

$$d.yzu = yzdu + uydz + uzdy.$$

Da ciò si vede che la medesima regola sussiste ancora per un prodotto di tre variabili, vale a dire che *bisogna scrivere il prodotto* yzu, *e sostituire successivamente a ciascuna variabile la sua differenziale, e aggiungere questi prodotti.*

La medesima regola ha luogo per un maggior numero di variabili.

19. La differenziale di una frazione $\frac{z}{y}$ è $\frac{ydz-zdy}{y^2}$; poichè supponiamo $\frac{z}{y}=t$, abbiamo $z=yt$; dunque (n.° 17) $dz=ydt+tdy$; donde ricaveremo $ydt=dz-tdy$; mettendo nel secondo membro il valore di t, viene $ydt=dz-\frac{z}{y}dy$; riducendo al medesimo denominatore, e dividendo quindi per y, si ha

$$dt=\frac{ydz-zdy}{y^2}$$

ovvero

$$d.\frac{z}{y}=\frac{ydz-zdy}{y^2}.$$

Dunque *la differenziale di una frazione è eguale al denominatore moltiplicato per la differenziale del numeratore, meno il numeratore moltiplicato per la differenziale del denominatore, divisa questa differenza per il quadrato del denominatore.*

20. Se nell'equazione $d.yzu=yzdu+yudz+zudy$ (n.° 18), si dividono tutti i termini per yzu otterremo

$$\frac{d.yzu}{yzu}=\frac{du}{u}+\frac{dz}{z}+\frac{dy}{y}.$$

In generale, dividendo la differenziale di un prodotto di un numero qualunque di variabili per questo prodotto, troveremo

$$\frac{d.xyztu,\text{ec.}}{xyztu,\text{ec.}}=\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}+\frac{dt}{t}+\frac{du}{u}+\text{ec}\ldots\ldots(9).$$

Se x, y, z, t, u, ec., sono eguali ad x e in numero m, avremo nel secondo membro di quest'equazione un numero m di termini eguali a $\frac{dx}{x}$; questo secondo membro si cangerà dunque in $\frac{mdx}{dx}$, e l'equazione (9) diventerà

$$\frac{d.x^m}{x^m}=m\frac{dx}{x},$$

e moltiplicando per x^m avremo

$$d.x^m=mx^{m-1}dx.$$

21. Donde possiamo concludere questa regola: *quando una variabile è ele-*

vata ad una potenza m, *per avere la differenziale, bisogna* 1.° *cangiare l'esponente in coefficiente*; 2.° *dare alla variabile un esponente minore di un' unità*; 3.° *moltiplicare quindi questo prodotto per* dx.

22. Se l'esponente fosse frazionario o negativo, la medesima regola avrebbe luogo.

Per dimostrare questo primo caso, sia $y = x^{\frac{p}{q}}$, elevando i due membri alla potenza q, avremo $y^q = x^p$; dunque (n.° 21),

$$qy^{q-1}dy = px^{p-1}dx;$$

donde si ricava

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^{p-1}}{y^{q-1}}dx;$$

e siccome x^{p-1} può mettersi sotto la forma $\frac{x^p}{x}$ e che egualmente $y^{q-1} = \frac{y^q}{y}$, sostituendo questi valori, abbiamo

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^p y}{y^q x}dx;$$

e a motivo di $x^p = y^q$ l'equazione precedente si riduce a

$$dy = \frac{py}{qx}dx;$$

mettendo finalmente per y il suo valore, si ottiene

$$dy = \frac{p}{q}\frac{x^{\frac{p}{q}}}{x}dx;$$

e facendo passare il divisore x nel numeratore, si ha

$$dy = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}dx$$

che è la medesima cosa della differenziale di $y = x^{\frac{p}{q}}$ che si sarebbe ottenuta fado uso della regola del n.° 21.

Per dimostrare il caso in cui l'esponente è negativo, sia $y = x^{-p}$, il che equivale a $y = \frac{1}{x^p}$; differenziando con la regola delle frazioni n.° 19, avremo

$$dy = \frac{x^p d.1 - 1.dx^p}{x^p \times x^p};$$

e siccome l'unità non ha differenziale, essendo una costante (n.° 13), quest'espressione si riduce a

$$dy = -\frac{d.x^p}{x^{2p}};$$

effettuando la differenziazione indicata (n.° 21), avremo

$$dy = -\frac{px^{p-1}dx}{x^{2p}},$$

e sottraendo l'esponente $2p$ dall'esponente $p-1$, viene finalmente

$$dy = -px^{-p-1}dx,$$

come si sarebbe trovato facendo uso della regola del n.° 21. Concludiamo dunque che questa regola ha luogo qualunque sia l'esponente di x, vale a dire per un esponente intero, negativo o frazionario.

23. Possiamo giungere immediatamente alla differenziale di x^m per mezzo del binomio, nella seguente maniera: facendo $x' = x+h$, in $y = x^m$, si ottiene

$$y' = (x+h)^m,$$

e sviluppando per mezzo della formula del binomio, si trova

$$y' = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \text{ec.}$$

sottraendo da quest'equazione la precedente, e dividendo per h, rimane

$$\frac{y'-y}{h} = \frac{m}{1}x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^2 + \text{ec.}$$

Facendo $h=0$ per passare al limite, si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1},$$

dunque

$$dy = mx^{m-1}dx,$$

e rimettendo il valore di y si ha

$$d.x^m = mx^{m-1}dx.$$

24. Se ai radicali si sostituiscano esponenti frazionari, la regola del n.° 21 potrà dunque servire a differenziare queste specie di quantità. Per esempio, per trovare la differenziale di $\sqrt{z}$ si scriverà $z^{\frac{1}{2}}$, di cui la differenziale sarà

$$\frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}dz = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

il che insegna che, *per avere la differenziale della radice quadrata di una quantità variabile, bisogna dividere la differenziale di questa variabile per il doppio del radicale.*

25. Per differenziare una quantità che contenga più termini, il processo sarebbe molto lungo se bisognasse sempre tenere il metodo che abbiamo seguito,

cercando prima il valore di y' per dedurne quindi quello di $\frac{y'-y}{h}$, e passare al limite facendo $h=0$. Felicemente però quando si sa differenziare in particolare ciascun termine, possiamo seguire una strada più semplice, in virtù di un teorema che si riduce a questa proposizione; *La differenziale di una somma di funzioni è eguale alla somma delle differenziali di queste funzioni.*

Per dimostrarlo, siano f, F, φ, ec., i segni che indicano queste diverse funzioni delle quali y si compone, e supponiamo che si abbia

$$y=fx+Fx+\varphi x+\text{ec.},$$

di cui bisogni cercare la differenziale.

Se si mette $x+h$ in luogo di x in queste funzioni, siccome, per ipotesi, si sa svilupparle ciascuna in particolare secondo le potenze di h, potremo rappresentare il risultamento con

$$\begin{aligned} y' = {} & fx+Ah+A'h^2+\text{ec.} \\ & +Fx+Bh+B'h^2+\text{ec.} \\ & +\varphi x+Ch+C'h^2+\text{ec.} \\ & +\text{ec.}; \end{aligned}$$

riunendo i termini moltiplicati dalla medesima potenza di h, e sottraendo y, troveremo

$$y'-y=(A+B+C+\text{ec.})h+(A'+B'+C'+\text{ec.})h^2+\text{ec.};$$

passando al limite

$$\frac{dy}{dx}=A+B+C+\text{ec.}$$

e

$$dy=Adx+Bdx+Cdx+\text{ec.}$$

A, B, C, ec., essendo termini che sono moltiplicati dalla prima potenza di h negli sviluppi di $f(x+h)$, di $F(x+h)$, e di $\varphi(x+h)$, ec., ne risulta che $Adx+Bdx+Cdx+$ ec., rappresentano la somma delle differenziali delle funzioni proposte.

26. Per dare un'applicazione di questo teorema supponiamo che si voglia trovare la differenziale di

$$y=ax^3+b^2x^2+e^4\sqrt{x};$$

si sa dal (n.° 13), che la differenziale di ax^3 è $ad.x^3$; ed eseguendo per mezzo dell'articolo 21, la differenziazione indicata, viene $a.3x^2dx$, e mettendo al di fuori il coefficiente numerico, si ottiene $3ax^2dx$. Facendo il medesimo riguardo alla costante b^2, si troverà che la differenziale di b^2x^2 è $2b^2xdx$; da un'altra parte il (n.° 24) insegna che $e^4\sqrt{x}$ ha per differenziale, $e^4\frac{dx}{2\sqrt{x}}$.

Aggiungendo adunque questi risultamenti, troveremo

$$dy=3ax^2dx+2b^2xdx+\frac{e^4dx}{2\sqrt{x}}.$$

27. In generale, quando in un' espressione che si vuole differenziare, una costante entra come fattore di una funzione di x, bisogna differenziare come se questa costante non esistesse, e moltiplicare quindi per questa costante.

28. Se al contrario, una costante non è affetta da una funzione di x, essa non dà come l'abbiamo veduto (n.° 13), alcun termine alla differenziale.

29. Alcune volte la funzione y e la variabile x non sono date da una medesima equazione. Per esempio, se si avessero le due equazioni delle seguenti forme

$$y = fu, \quad e \quad u = \varphi x,$$

il primo mezzo che si presenterebbe per ottenere il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ sarebbe di eliminare u fra queste equazioni, per potervi quindi applicare il processo della differenziazione; ma senza ricorrere a quest'operazione preliminare possiamo ottenere immediatamente il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$: e questo è l'oggetto della seguente dimostrazione.

Supponiamo dunque che nell'equazione $u = \varphi x$, si metta $x+h$ in luogo di x e che allora u diventi $u' = u+k$, vale a dire si componga della funzione primitiva e di un dato accrescimento (n.° 15) che rappresenteremo con k; ammettiamo ancora che sostituendo quindi $u+k$ invece di u nell'equazione $y = fu$, la funzione y diventi y'; se sviluppando queste funzioni di u e di x rapporto alle potenze dei loro accrescimenti, la sostituzione di $x+h$ in luogo di x nella funzione di u, ci dia

$$u' = u + qh + q'h^2 + q''h^3 + \text{ec.}$$

e che la sostituzione di $u+k$ in luogo di u nella funzione y, ci dia

$$y' = y + pk + p'k^2 + p''k^3 + \text{ec.},$$

otterremo

$$\left.\begin{aligned} \frac{u'-u}{h} &= q + q'h + q''h^2 + \text{ec.} \\ \frac{y'-y}{k} &= p + p'k + p''k^2 + \text{ec.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (10).$$

Moltiplicando quest'equazioni termine a termine, avremo

$$\frac{y'-y}{k} \cdot \frac{u'-u}{h} = (p + p'k + p''k^2 + \text{ec.})(q + q'h + q''h^2 + \text{ec.}).$$

Il primo membro di quest'equazione puo ridursi; mentre l'accrescimento di u essendo rappresentato da k, è dunque eguale a $u'-u$; per conseguenza invece di $\frac{y'-y}{k} \cdot \frac{u'-u}{h}$, possiamo scrivere $\frac{y'-y}{h}$; e mettendo $x'-x$ invece di h l'equazione precedente diventa

$$\frac{y'-y}{x'-x} = (q + q'h + q''h^2 + \text{ec.})(p + p'k + p''k^2 + \text{ec.}) \ldots\ldots (11).$$

Allorquando h è nullo, k si annulla egualmente (poichè u non ha preso l'accrescimento k che quando x è diventato $x+h$); per conseguenza nel caso di $h=0$, che è quello del limite, l'equazione (11) si cangia in

$$\frac{dy}{dx}=pq \ldots\ldots\ldots (12).$$

Per determinare p e q, bisogna supporre h e k nulli nell'equazioni (10), e quest'equazioni danno

$$\frac{dy}{du}=p, \quad \frac{du}{dx}=q.$$

Sostituendo questi valori di p e di q nell'equazione (12), otterremo

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \ldots\ldots (13).$$

Questo risultamento c'insegna che se si hanno due equazioni $y=fu$, e $u=\varphi x$, e che se ne deduca i valori dei coefficienti differenziali $\frac{dy}{du}$ e $\frac{du}{dx}$, basterà di moltiplicare questi valori fra loro per aver quello di $\frac{dy}{dx}$.

30. Se si hanno, per esempio, l'equazioni $y=3u^2$ e $u=x^3+ax^2$; si troverà

$$\frac{dy}{du}=6u, \quad \frac{du}{dx}=3x^2+2ax;$$

dunque moltiplicando quest'equazioni termine a termine, otterremo

$$\frac{dy}{dx}=6u(3x^2+2ax)=6(x^3+ax^2)(3x^2+2ax).$$

31. La formula (13) è di un uso grande per differenziare delle quantità complicate; eccone alcune applicazioni.

1.° Cerchiamo la differenziale di

$$y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

ciò equivale a trovare il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$. A quest'effetto, facciamo $1+x^2=u$, allora

$$y=\frac{1}{\sqrt{u}}=u^{-\frac{1}{2}},$$

e l'equazioni $y=fu$ e $u=\varphi x$, (n.° 29), sono qui rappresentate da $y=u^{-\frac{1}{2}}$, e da $u=1+x^2$.

Differenziando quest'equazioni (n.° 21), e dividendo la prima per du, e la seconda per dx, si trova

$$\frac{dy}{du}=-\frac{1}{2}u^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}, \quad \frac{du}{dx}=2x;$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali fra loro, si ha

$$\frac{dy}{dx} = -x\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{(1+x^2)^3}};$$

dunque

$$dy = \frac{-xdx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} \quad \ldots\ldots (14).$$

Sia ancora

$$y = (a+bx^m)^n;$$

per trovare la differenziale, facciamo $a+bx^m = u$; avremo l'equazioni $y = u^n$, $u = a+bx^m$; dunque

$$\frac{dy}{du} = nu^{n-1} = n\left(a+bx^m\right)^{n-1}, \quad \frac{du}{dx} = bmx^{m-1};$$

moltiplicando fra loro questi coefficienti differenziali, otterremo

$$\frac{dy}{dx} = bmnx^{m-1}\left(a+bx^m\right)^{n-1};$$

dunque

$$dy = bmnx^{m-1}\left(a+bx^m\right)^{n-1}dx.$$

32. Per terzo esempio, sia

$$y = \left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^4:$$

supponiamo

$$b-\frac{c}{x^2} = u;$$

dunque

$$y = \left(a+\sqrt{u}\right)^4 \quad \ldots\ldots (15);$$

differenziando l'equazione precedente, abbiamo

$$du = \frac{2cxdx}{x^4};$$

dunque

$$\frac{du}{dx} = \frac{2c}{x^3}$$

L'equazione (15) dà

$$dy = 4\left(a+\sqrt{u}\right)^3 d\left(a+\sqrt{u}\right) = 4\left(a+\sqrt{u}\right)^3\frac{du}{2\sqrt{u}};$$

e mettendo per u il suo valore, viene

$$\frac{dy}{du} = \frac{2\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}};$$

moltiplicando questi coefficienti differenziali fra loro, si ha

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{4c}{x^3}\left(a+\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}\right)^3}{\sqrt{b-\frac{c}{x^2}}}.$$

33. Sia y una funzione di x; se essa è differenziata troveremo un risultamento della forma pdx (p essendo una quantità che può contenere x); se p contiene x, potremo ancora differenziare p, e ottenere un risultamento rappresentato da qdx; operando egualmente rapporto a q, il risultamento rdx sarà ancora della medesima forma, e così di seguito. pdx, qdx, rdx, ec., sono le differenziali successive di y. Per esempio se si ha $y=ax^3$, si troverà $dy=3ax^2dx$; dunque $p=3ax^2$. Differenziando di nuovo, si ha $dp=6axdx$; dunque $q=6ax$. Differenziando ancora, $dq=6adx$; dunque $r=6a$. Quì la differenziazione non può aver luogo, poichè $6a$ è una costante.

L' equazioni

$$dy=pdx \text{ danno, dividendo per } dx,\ \frac{dy}{dx}=p,$$

$$dp=qdx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dp}{dx}=q;$$

$$dq=rdx \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dq}{dx}=r,$$

ec. ec.

q essendo ottenuto con due differenziazioni successive, e dividendo ciascuna volta per dx, rappresenteremo quest'operazione con $\frac{d^2y}{dx^2}$, ed avremo $\frac{d^2y}{dx^2}=q$; egualmente differenziando di nuovo e dividendo per dx, avremo $\frac{d^3y}{dx^3}=r$; e così di seguito.

dy è la differenziale prima di y;
d^2y ne è la differenziale seconda;
d^3y ne è la differenziale terza;
ec.

34. Sia y una funzione di x; ordiniamola rapporto ad x, e sopponiamo

$$y=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+\text{ec.}, \ldots\ldots (16),$$

avremo differenziando e dividendo per dx,

$$\frac{dy}{dx}=B+2Cx+3Dx^2+4Ex^3+\text{ec.},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\ldots 2C+2.3Dx+3.4Ex^2+\text{ec.},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\ldots\ldots+2.3D+2.3.4Ex+\text{ec.},$$

ec.

Rappresentiamo con (y) ciò che diventa y quando $x=0$

con $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ciò che diventa $\frac{dy}{dx}$ quando $x=0$,

con $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ ciò che diventa $\frac{d^2y}{dx^2}$ quando $x=0$,

così di seguito; l'equazioni precedenti daranno

$$(y)=A,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=B,\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=2C,\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=2.3\,D;$$

donde dedurremo

$$A=(y),\ B=\left(\frac{dy}{dx}\right),\ C=\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ D=\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right);$$

sostituendo questi valori nell'equazione (16), essa diventerà

$$y=(y)+\left(\frac{dy}{dx}\right)x+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)x^2+\frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)x^3+\text{ec.}\ldots(17);$$

tale è la formula del Maclaurin.

35. Per prima applicazione prendiamo $y=\frac{1}{a+x}$ troveremo differenziando per mezzo del (n.° 19)

$$dy=\frac{(a+x)d.1-1.d(a+x)}{(a+x)^2}=-\frac{dx}{(a+x)^2},$$

donde concluderemo

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(a+x)^2};$$

differenziando di nuovo, troveremo successivamente

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(a+x)}{(a+x)^4}=\frac{2}{(a+x)^3},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2.3(a+x)^2}{(a+x)^6}=-\frac{2.3}{(a+x)^4},$$

ec.

Facendo dunque $x=0$ nei valori di y, di $\frac{dy}{dx}$, di $\frac{d^2y}{dx^2}$, di $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. troveremo

$$(y)=\frac{1}{a},\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{1}{a^2},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{2}{a^3},\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=-\frac{2.3}{a^4},\ \text{ec.};$$

sostituendo questi valori e quello di y nella formula (17), otterremo

$$\frac{1}{a+x}=\frac{1}{a}-\frac{x}{a^2}+\frac{x^2}{a^3}-\frac{x^3}{a^4}+\text{ec.}$$

36. Per seconda applicazione, prendiamo $y=\sqrt{a^2+bx}$; abbiamo dunque

$$y=\left(a^2+bx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(a^2+bx\right)^{-\frac{1}{2}}b=\frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a^2+bx}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(a^2+bx\right)^{-\frac{3}{2}}b^2=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2}{\sqrt{(a^2+bx)^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\left(a^2+bx\right)^{-\frac{5}{2}}b^3=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{\sqrt{(a^2+bx)^5}}$$

ec.

Se facciamo $x=0$, questi valori diventeranno

$$(y)=(a^2)^{\frac{1}{2}}=a,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=-\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}b^2}{a^3},$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}b^3}{a^5},\ \text{ec.},$$

sostituendo nella formula (17) questi valori di (y), di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, di $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)$, ec, si troverà

$$\sqrt{a^2+bx}=a+\frac{bx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}+\frac{b^3x^3}{16a^5}-\text{ec.}\ldots\ldots(18).$$

37. Per terzo esempio, prendiamo $y=(a+x)^m$; troveremo differenziando

$$\frac{dy}{dx}=m(a+x)^{m-1},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=m(m-1)(a+x)^{m-2},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3},$$

ec.

Facendo $x=0$, il valore di y si riduce ad a^m; dunque $(y)=a^m$, e i coefficienti differenziali di sopra diventano

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=ma^{m-1},\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=m(m-1)a^{m-2},\ \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=m(m-1)(m-2)a^{m-3},$$

ec., ec.

Sostituendo questi valori di (y), di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, di $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$, ec., nell'equazione

(17), si trova

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}a^{m-3}x^3 + \text{ec.}$$

Possiamo in questo punto dare una dimostrazione assai elegante del binomio del Newton.

Procedendo col metodo dei coefficienti indeterminati, sia

$$(1+z)^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ec.}$$

Facendo $z=0$, quest'equazione si riduce a

$$1 = A;$$

e per conseguenza possiamo scrivere

$$(1+z)^m = 1 + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ec.} \quad \ldots\ldots (A).$$

Differenziando i due membri di quest'equazione, si ha

$$m(1+z)^{m-1}dz = Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz + \text{ec.}$$

Sopprimendo il fattore comune dz, rimane

$$m(1+z)^{m-1} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{ec.}$$

Quest'equazione avendo luogo, qualunque sia z, si faccia $z=0$, ed essa si riduce a

$$m = B$$

Differenziando di nuovo, e dividendo per dz, avremo

$$m(m-1)(1+z)^{m-2} = 2C + 2.3Dz + 3.4Ez^2 + \text{ec.}$$

Facendo ancora $z=0$, otterremo

$$m(m-1) = 2C,$$

e per conseguenza

$$C = \frac{m(m-1)}{2};$$

si determineranno egualmente tutti gli altri coefficienti, e mettendo i loro valori nell'equazione (A), questa diventerà

$$(1+z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{1.2}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}z^3 + \text{ec.}$$

Facendo $z = \frac{x}{a}$, si avrà

$$\left(1+\frac{x}{a}\right)^m = 1 + m\frac{x}{a} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^2}{a^2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{x^3}{a^3} + \text{ec.}$$

Riducendo il primo membro al medesimo denominatore, lo convertiremo in

$$\left(\frac{a+x}{a}\right)^m \text{ o piuttosto in } \frac{(a+x)^m}{a^m}.$$

Sostituendo questo valore nella precedente equazione, e mandando via il denominatore dal primo membro, otterremo

$$(a+x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}x^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1..2.3}a^{m-3}x^3 + \text{ec.},$$

che è precisamente la formula del Newton.

38. Le quantità trascendenti sono quelle che affettano esponenti variabili, logaritmi, seni, coseni, ec.

39. Cominciamo dal differenziare a^x. Sia dunque $y = a^x$, si cangi x in $x+h$ e y in y'; quest'equazione diventerà $y' = a^{x+h}$ o piuttosto

$$y' = a^x a^h \quad . \; . \; . \; . \; (19).$$

Bisogna dunque sviluppare quest'espressione rapporto alle potenze di h e trovare quindi i termini moltiplicati dalla prima; ora, perchè a^h possa svilupparsi per mezzo della formula del binomio, si farà $a = 1+b$, e per conseguenza a^h diventerà

$$(1+b)^h = 1 + h\,\frac{b}{1} + h(h-1)\,\frac{b^2}{1.2} + h(h-1)(h-2)\,\frac{b^3}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{h(h-1)(h-2)(h-3)}{1.2.3.4}\,\frac{b^4}{} + \text{ec} \; . \; . \; . \; (20).$$

Possiamo trovare i termini moltiplicati dalla prima potenza di h, senza formare tutti i prodotti indicati dal secondo membro dell'equazione (20). Per giungere a questo cominceremo dall'osservare che i termini, che contengono la prima potenza di h nel secondo e nel terzo termine dell'equazione (20), sono $\frac{b}{1}h$, e $-\frac{b^2}{2}h$. Riguardo agli altri, osserveremo che se in un prodotto come $h(h-1)(h-2)(h-3 \; . \; . \; .$, la parte $(h-1)(h-2)(h-3) \; . \; . \; .$ è composta di n fattori, il suo sviluppo, per la teoria dell'equazioni, sarà della forma $h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \; . \; . \; . + Mh + N$, vale a dire che si avrà

$$h(h-1)(h-2)(h-3) \; . \; . \; . \; . = h(h^n + Ah^{n-1} + Bh^{n-2} \; . \; . \; . \; . + Mh + N) \; . \; . \; . \; (21),$$

ovvero eseguendo l'operazione indicata nel secondo membro,

$$h(h-1)(h-2)(h-3) \; . \; . \; . = h^{n+1} + Ah^n + Bh^{n-1} \; . \; . \; . + Mh^2 + Nh,$$

dal che si vede che il termine che contiene la prima potenza di h nel prodotto $h(h-1)(h-2)(h-3) \; . \; . \; . \; .$, sarà Nh. Esaminiamo adesso come si compone il coefficiente N. Ora l'algebra insegna ancora che in un prodotto della forma $(h-1)(h-2)(h-3) \; . \; . \; .$, il cui sviluppo è $h^n + h^{n-1} \; . \; . \; . \; . + Mh + N$, l'ultimo termine N di questo sviluppo si compone del prodotto delle seconde parti $-1, -2, -3$, ec., dei binomi $h-1$, $h-2$, $h-3$, ec., vale a dire che in generale si ha

$$N = -1 \times -2 \times -3 \times -4, \text{ ec.}$$

Così considerando il quarto termine dell'equazione (20), $\frac{b^3}{2.3}h(h-1)(h-2)$

si vede che lo sviluppo della parte $(h-1)(h-2)$ che esso contiene sarà della forma h^2+Ah+N, e avrà il prodotto -1×-2 per il valore di N, per conseguenza la parte affetta della prima potenza di h che darà questo termine, sarà

$$\frac{b^3}{2.3}\times(-1\times-2)h=\frac{b^3}{3}h;$$

considerando quindi il quinto termine dell'equazione (20), si vedrà egualmente che il termine affetto dalla prima potenza di h che esso contiene, dev'essere

$$\frac{b^4}{2.3.4}\times(-1\times-2\times-3)h=-\frac{b^4}{4}h;$$

e così di seguito, dimodochè avremo

$$(1+b)^h=1+\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.}\right)h+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.}$$

e sostituendo invece di $1+b$ il suo valore a, avremo

$$a^h=1+\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.}\right)h+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.}$$

Rappresentiamo $\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.}\right)$, con A, otterremo

$$a^h=1+Ah+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.};$$

con questo valore, l'equazione $y'=a^x a^h$, diventerà

$$y'=a^x+Aa^xh+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.}$$

Se si sottrae l'equazione primitiva $y=a^x$, resterà $y'-y=Aa^xh+$ *termini in* h^2, *in* h^3, ec.; passando al limite, si troverà

$$\frac{dy}{dx}=Aa^x \;.\;.\;.\;.\;.\; (22),$$

e mettendo il valore di y, otterremo

$$\frac{d.a^x}{dx}=Aa^x \;.\;.\;.\;.\;.\; (23).$$

40. La costante A dipende da a; mentre se nell'equazione

$$A=\left(\frac{b}{1}-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}, \text{ ec.}\right),$$

si mette per b il suo valore $a-1$, si troverà

$$A=\frac{(a-1)}{1}-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{ec.} \;.\;.\;.\;.\; (24).$$

41. Per determinare il valore della costante A, cerchiamo, per mezzo del teo-

rema del Maclaurin e con l'aiuto dell'equazioni (22) e (23), lo sviluppo di a^x; abbiamo perciò

$$y = a^x,$$

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x,$$

$$\frac{d^2x}{dx^2} = \frac{Ad \cdot a^x}{dx} = A\,\frac{Aa^x dx}{dx} = A^2a^x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} \ldots\ldots = A^3a^x,$$

ec. ec.

Facciamo (n.° 34), $x = 0$, troveremo

$$(y) = a^0 = 1,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = A,$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = A^2,$$

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = A^3, \text{ ec.}$$

Sostituendo questi valori nell'equazione (17), si ha

$$a^x = 1 + \frac{Ax}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots (25);$$

facciamo $x = \frac{1}{A}$, quest'equazione diventerà

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ec.};$$

si chiami e il secondo membro di quest'equazione, essa si cangia in $a^{\frac{1}{A}} = e$; donde si ricava $a = e^A$; prendendo i logaritmi, si ha

$$\log a = \log e^A = A \log e;$$

dunque

$$A = \frac{\log a}{\log e} \ldots\ldots\ldots (26).$$

Il numero e, il di cui valore è dato dall'equazione

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \text{ec.}$$

è la base che il Nepero scelse per calcolare le sue tavole logaritmiche.

Siccome la serie $1+1+\frac{1}{1.2}$ è abbastanza convergente, possiamo limitarci a prendere i dodici primi termini di questa serie, e allora si trova che e vale circa 2,7182818. Se rappresentiamo per La il logaritmo di a nel sistema Neperiano, avremo

$$a=(2,7182818)^{La},$$

o più semplicemente $a=e^{La}$; dunque $\log a=\log e^{La}$, e $\log a=La\log e$; donde ricaveremo

$$\frac{\log a}{\log e}=La \ldots\ldots\ldots (27)$$

il che riduce l'equazione (26) ad $A=La$, e per conseguenza l'equazione (23) dà

$$da^x=a^x dx\,.\,La \ldots\ldots (28).$$

42. Allorquando ella base qualunque a si sostituisce la base del sistema Nepeziano, l'equazione precedente diventa

$$de^x=e^x dx\,.\,Le;$$

e siccome cangiando a in e nell'equazione (27), ne risulta che Le è eguale all'unità, l'equazione precedente si riduce a

$$de^x=e^x dx.$$

L'equazione (25) ci dà il mezzo per trovare lo sviluppo di e^x. Infatti quando $a=e$, l'equazione (26) si riduce a

$$A=1;$$

sostituendo questo valore di A nell'equazione (25), e cangiando a in e, si ottiene

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots (29).$$

Per trovare la differenziale di a^x viene generalmente adoprato il seguente metodo, che gode la proprietà di esser più pronto di quello esposto, e che abbiamo lasciato sussistere solamente perchè sia più in armonia con la teoria generale dimostrata.

Si abbia da differenziare $y=a^x$, si cangi x in $x+h$ e y in y'; quest'equazione diventerà

$$y'=a^{x+h},$$

e piuttosto

$$y'=a^x a^h$$

Se da quest'equazione si sottrae l'equazione primitive $y=a^x$, si avrà

$$y'-y=a^x a^h-a^x.$$

Mettendo a^x in fattore comune, nel secondo membro di quest'equazione, si troverà

$$y'-y=a^x(a^h-1) \ldots\ldots (a).$$

Facendo $a=1+b$ perchè a^h possa svilupparsi per mezzo della formula del binomio, abbiamo

$$a^h=(1+b)^h=1+h\frac{b}{1}+h(h-1)\frac{b^2}{1.2}+h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3}$$

$$+h(h-1)(h-2)(h-3)\frac{b^4}{2.3.4}+\text{ec.}$$

Moltiplicando i due membri di quest'equazione per a^x, dopo che avremo fatto passare l'unità nel primo otterremo

$$a^x(a^h-1)=a^x\left(h\frac{b}{1}+h(h-1)\frac{b^2}{1.2}+h(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3}+\text{ec.}\right).$$

In virtù dell'equazione (a), possiamo sostituire al primo membro di questa $y'-y$, e dividendo per h avremo finalmente

$$\frac{y'-y}{h}=a^x\left(\frac{b}{1}+(h-1)\frac{b^2}{1.2}+(h-1)(h-2)\frac{b^3}{2.3}+\text{ec.}\right).$$

Passando al limite si farà $h=0$, e quest'equazione diventerà

$$\frac{dy}{dx}=a^x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.}\right),$$

ovvero rimettendo il valore di y,

$$\frac{da^x}{dx}=a^x\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.}\right).$$

Rappresentiamo con A la serie che è fra le parentesi, cioè poniamo

$$A=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{ec.},$$

e l'equazione precedente diventerà

$$\frac{da^x}{dx}=Aa^x$$

43. Sia x il logaritmo di y nel sistema di cui la base è a, si ha $y=a^x$; e l'equazione (22) ci dà $dy=Aa^xdx$; donde si ricava

$$dx=\frac{dy}{Aa^x}=\frac{dy}{\frac{\log a}{\log e}a^x}=\frac{dy}{a^x}\frac{\log e}{\log a};$$

e siccome $a^x=y$, e che $x=\log y$, l'equazione precedente diventa

$$d.\log y=\frac{dy}{y}\frac{\log e}{\log a}\ldots\ldots (30).$$

Nel caso in cui si prendano i logaritmi nel sistema neperiano, la base a diventa il numero e (n.° 41), per conseguenza si ha $\frac{\log e}{\log a} = \frac{\log e}{\log e} = 1$; dunque allora

$$d.\log y = \frac{dy}{y}.$$

Passiamo ora a cercare le differenziali delle funzioni circolari.

44. *L'arco è maggiore del seno e minore della tangente.*

Per dimostrarlo, sia AB (*Tav.* CIII, *fig.* 2) un arco che ha BE per seno e DA per tangente; e si prenda l'arco AB′, eguale all'arco AB. Considerando la corda BB′ come una linea retta, se ne deduce la conseguenza che essa è minore dell'arco BAB′. Dunque la retta BE, metà della corda BB′, è minore dell'arco BA, metà dell'arco BAB′; donde risulta che il seno è minore dell'arco.

Per dimostrare che la tangente è maggiore dell'arco, abbiamo

area del triangolo DD′C > *area del settore* BAB′C;

o mettendo l'espressioni geometriche di queste aree,

$$DD' \times \frac{1}{2} AC > \text{arc}\, BAB' \times \frac{1}{2} AC$$

sopprimendo $\frac{1}{2}$ AC da una parte e dall'altra, rimane

$$DD' > \text{arc}\, BAB',$$

e, prendendo la metà, si ha

$$DA > \text{arc}\, BA$$

45. Risulta da ciò che preceda che il limite del rapporto del seno all'arco è l'unità; mentre quando l'arco h rappresentato da AB diventa nullo, il seno si confonde con la tangente, e a più forte ragione il seno si confonde con l'arco che è compreso fra la tangente e il seno; per conseguenza si ha, nel caso del limite,

$$\frac{\text{sen}\, h}{\text{arc}\, h}, \text{ o piuttosto } \frac{\text{sen}\, h}{h} = 1.$$

46. Per trovare la differenziale del seno il di cui arco è x, supponiamo dunque che quest'arco riceva un accrescimento h; sappiamo dalla Trigonometria che

$$\text{sen}\,(x+h) = \text{sen}\, x \cos h + \text{sen}\, h \cos x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

sottraendo da questa funzione il suo stato primitivo, e dividendo per l'accrescimento h della variabile, avremo

$$\frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \frac{\text{sen}\, x \cos h + \text{sen}\, h \cos x - \text{sen}\, x}{h}$$

Riunendo fra parentesi i termini che sono moltiplicati da sen x nel secondo membro, si troverà

$$\frac{\text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = \frac{\text{sen}\, x(\cos h - 1)}{h} + \frac{\text{sen}\, h \cos x}{h} \quad . \quad . \quad . \quad (32).$$

Quando h diventa zero, $\cos h - 1$ diventa ancora nullo, e $\frac{\cos h - 1}{h}$ si riduce a $\frac{0}{0}$. Conviene perciò di mettere questo termine sotto un'altra forma: per eseguir ciò osservo che l'equazione $\cos^2 h + \text{sen}^2 h = 1$ dà $\cos^2 h - 1 = -\text{sen}^2 h$, o $(\cos h + 1)(\cos h - 1) = -\text{sen}^2 h$; donde si deduce

$$\cos h - 1 = -\frac{\text{sen}^2 h}{\cos h + 1};$$

sostituendo questo valore nell'equazione (32), quest'equazione diventa

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{h} = -\text{sen}\, x \frac{\text{sen}\, h}{\cos h + 1} \frac{\text{sen}\, h}{h} + \cos x \frac{\text{sen}\, h}{h} \ldots (33).$$

Nel caso di $h = 0$, l'arco e il seno si confondono; vale a dire che si ha $\frac{\text{sen}\, h}{h} = 1$ da un'altra parte $\cos h = 1$, dunque $\frac{\text{sen}\, h}{\cos h + 1} = \frac{0}{2} = 0$: e l'equazione (33) si riduce a $\frac{d.\text{sen}\, x}{dx} = \cos x$; donde si deduce $d.\text{sen}\, x = dx \cos x$.

47. In questa dimostrazione il raggio delle tavole è stato preso per unità; ma se si volesse la differenziale di un seno il di cui raggio fosse a, in luogo d'impiegare l'equazione (31), ci si servirebbe della seguente:

$$\text{sen}(x+h) = \frac{\text{sen}\, x \cos h + \text{sen}\, h \cos x}{a} \ldots . (34).$$

Nel risultamento precedente, bisognerebbe dunque restituire la costante a, il che darebbe $d.\text{sen}\, x = \frac{dx \cos x}{a}$ per la differenziale del seno di un arco il di cui raggio è a.

48. Possiamo giungere alla differenziale di $\text{sen}\, x$ per mezzo di considerazioni geometriche; mentre sia AB, (*Tav.* CIII, *fig.* 3) l'arco x; BM l'arco h; la perpendicolare BP sarà dunque $\text{sen}\, x$, e la perpendicolare MQ sarà $\text{sen}\,(x+h)$; premesso ciò, più l'arco BM $= h$ diminuisce, più l'angolo MBC tende a diventare retto; per conseguenza, nel caso del limite possiamo considerare l'angolo MBC come retto; allora il triangolo MBD diventa simile al triangolo BCP, poichè in questa circostanza questi triangoli hanno i loro lati perpendicolari; donde segua che si ha la proporzione

$$\text{BC} : \text{CP} :: \text{BM} : \text{MD}$$

ovvero

$$r : \cos x :: \text{BM} : \text{sen}\,(x+h) - \text{sen}\, x$$

dunque

$$\frac{\text{sen}(x+h) - \text{sen}\, x}{\text{BM}} = \frac{\cos x}{r}.$$

Passando al limite e osservando che, in questo caso, la corda BM può essere sostituita dall'arco BM $= h$, l'equazione precedente diventerà

$$\frac{d.\text{sen}\,x}{dx} = \frac{\cos x}{r},$$

prendendo il raggio eguale all'unità,

$$d.\text{sen}\,x = dx\cos x.$$

49. Per trovare la differenziale di $\cos x$, l'equazione $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, o piuttosto $(\text{sen}\,x)^2 + (\cos x)^2 = 1$ essendo differenziata (n.° 21), dà

$$2\,\text{sen}\,x d.\text{sen}\,x + 2\cos x d.\cos x = 0;$$

donde si deduce

$$d.\cos x = -\frac{\text{sen}\,x d.\text{sen}\,x}{\cos x};$$

mettendo per $d.\text{sen}\,x$ il suo valore $dx\cos x$ (n.° 46), e riducendo si ha

$$d.\cos x = -dx\,\text{sen}\,x.$$

50. Si ottiene la differenziale di $\text{tang}\,x$ considerando che $\text{tang}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}$; differenziando quest'equazione col metodo del (n.° 19), si trova

$$d.\text{tang}\,x = \frac{\cos x d.\text{sen}\,x - \text{sen}\,x d.\cos x}{\cos^2 x};$$

mettendo il valore di $d.\text{sen}\,x$ e di $d.\cos x$ avremo

$$d.\text{tang}\,x = \left(\frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x}\right)dx;$$

dunque, poichè $\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$

$$d.\text{tang}\,x = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

51. Si sa dalla Trigonometria che il raggio è una media proporzionale fra la tangente e la cotangente, e fra il coseno e la secante, il che dà

$$\cot x = \frac{1}{\text{tang}\,x}, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}.$$

Differenziando la prima di quest'equazioni (n.° 19), si trova

$$d.\cot x = -\frac{d\,\text{tang}\,x}{\text{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\cos^2 x\,\text{tang}^2 x} = -\frac{dx}{\text{sen}^2 x};$$

poichè dall'equazione $\frac{\text{sen}}{\cos} = \text{tang}$, si ricava $\cos.\text{tang} = \text{sen}$.

52. L'equazione $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ essendo differenziata, dà

$$d.\sec x = -\frac{d.\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}\,x dx}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\,\frac{1}{\cos x}dx = \text{tang}\,x\sec x dx.$$

53. Si determinerebbe egualmente la differenziale della cosecante; poichè $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$; differenziando, si ha

$$d.\operatorname{cosec} x = -\frac{\cos x dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\frac{1}{\operatorname{sen} x}dx$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{tang} x}\operatorname{cosec} x dx = -\cot x \operatorname{cosec} x dx.$$

54. Riguardo al seno verso, differenziando l'equazione $\operatorname{sen vers} x + \cos x = 1$, si trova $d.\operatorname{sen vers} x = d.(1-\cos x)$, ed effettuando la differenziazione,

$$d.\operatorname{sen vers} x = \operatorname{sen} x dx.$$

55. I principii precedenti basterebbero per poter differenziare qualunque espressione affetta da quantità trascendenti.

Sia $y = a^{b^x}$; facciamo $b^x = u$, avremo $y = a^u$; differenziando per mezzo del n.° 41 (equazione 28), troveremo

$$\frac{dy}{du} a^u \mathrm{L}a = a^{b^x} a \mathrm{L},$$

$$\frac{du}{dx} = b^x \mathrm{L}b;$$

dunque (n.° 29)

$$\frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \quad \text{ossia} \quad \frac{dy}{dx} = a^{b^x} b^x \mathrm{L}a \mathrm{L}b.$$

56. Sia ancora $y = z^v$; prendiamo i logaritmi, si ha $\log y = v \log z$; dunque $d.\log y = v d.\log z + \log z dv$; mettendo per le differenziali logaritmiche i loro valori (n.° 43), troveremo

$$\frac{dy}{y} = v\frac{dz}{z} + \log z dv,$$

e per conseguenza

$$dy = y\left(v\frac{dz}{z} + \log z dv\right),$$

e piuttosto

$$dy = z^v\left(\frac{v dz}{z} + \log z dv\right).$$

Per mezzo di questa differenziale, troveremo facilmente quella di $y = z^{t^u}$; poichè sia $t^u = v$, l'equazione si riduce a $y = z^v$; ora l'equazioni $y = z^v$, e $v = t^u$, che sono della medesima forma dell'equazione della quale abbiamo trovata la differenziale, daranno

$$dy = z^v\left(v\frac{dz}{z} + \log z dv\right),$$

$$dv = t^u\left(u\frac{dt}{t} + \log t du\right).$$

Sostituendo nel valore di dy dato dalla penultima equazione quello di dv e di v, avremo

$$dy = z^{t^u}\left[t^u \frac{dz}{z} + \log z t^u\left(u \frac{dt}{t} + \log t du\right)\right]$$

$$= z^{t^u} t^u\left(\frac{dz}{z} + u \log z \frac{dt}{t} + \log z \log t du\right).$$

57. Avanti di progredire di più, osserveremo che nel calcolo differenziale un' espressione come $\frac{dy}{dx}$, significa che una funzione y di una o più variabili è stata differenziata rapporto alla variabile x e divisa per dx; per esempio, se si avesse $y = ax^2u^3z^4$, l'espressione $\frac{dy}{dx}$ si determinerebbe considerando u e z come costanti, e differenziando rapporto ad x e dividendo quindi per dx; così si avrebbe $\frac{dy}{dx} = 2axu^3z^4$. Si troverebbe egualmente $\frac{dy}{dz} = 4ax^2z^3u^3$ e $\frac{dy}{du} = 3ax^2 z^4u^2$. Se si avesse $y = x^2 + z^2$, $\frac{dy}{dx}$ sarebbe $2x$.

58. *Se in una funzione* y *di* x, *la variabile* x *si cangia in* x+h, *si ha il medesimo coefficiente differenziale quando* x *è variabile* e h *costante*, *che quando* h *e variabile e* x *costante.*

Per dimostrarlo, se nell' equazione $y = fx$, si mette $x + h = x'$ in luogo di x, avremo $y' = fx'$; la differenziale di fx' sarà eguale ad un'altra funzione di x' rappresentata da $\varphi x'$ e moltiplicata per dx', per conseguenza $dy' = \varphi x' dx'$, o mettendo per x' il suo valore $x + h$, avremo

$$dy' = \varphi(x+h)\, d(x+h).$$

Ora, il solo cangiamento che apporti in questa differenziale l'ipotesi di x variabile, e h costante, non è che nel fattore $d(x+h)$, che si riduce a dx quando x è variabile, e h costante; si ha dunque allora

$$dy' = \varphi(x+h) dx,$$

donde si ricava

$$\frac{dy'}{dx} = \varphi(x+h) \quad . \; . \; . \; . \; (35).$$

Se al contrario, si fa x costante e h variabile, il fattore $d(x+h)$ si riduce a dh, e si ha

$$dy' = \varphi(x+h) dh,$$

e per conseguenza

$$\frac{dy'}{dh} = \varphi(x+h) \quad . \; . \; . \; . \; (36);$$

eguagliando questi due valori di $\varphi(x+h)$, viene

$$\frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dh}.$$

Per esempio, se si avesse $y=ax^3$, metteodo $x+h$ invece di x, si troverebbe

$$\frac{dy'}{dx}=3a(x+h)^2=\frac{dy'}{dh}.$$

e per conseguenza

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dh}.$$

59. L'equazioni (35) e (36) essendo differenziate rapporto ad $x+h$, danno ancora i risultamenti eguali

$$\frac{d^2y'}{dx}=\varphi'(x+h)\,d(x+h),$$

$$\frac{d^2y'}{dh}=\varphi'(x+h)\,d(x+h).$$

Faccismo h costante nella prima equazione, e x costante nella secooda, avremo

$$\frac{d^2y'}{dx}=\varphi'(x+h)dx,\quad \frac{d^2y'}{dh}=\varphi'(x+h)dh,$$

donde dedurremo

$$\frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{d^2y'}{dh^2}.$$

Concluderemo col medesimo ragionamento che $\frac{d^3y'}{dx^3}=\frac{d^3y'}{dh^3}$, e che egualmente $\frac{d^4y'}{dx^4}=\frac{d^4y'}{dh^4}$, e così in seguito.

60. Premesso ciò, sia y' una funzione di $x+h$; questa funzione essendo aviloppata rapporto alle potenze di h, supponiamo che si abbia

$$y'=y+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ ec. . . . (37)},$$

A, B, C, ec., essendo funzioni incognite di x che si vuole determinare. A quest'effetto, differenziando rapporto ad h, e dividendo per dh, avremo

$$\frac{dy'}{dh}=A+2Bh+3Ch^2+\text{ ec.};$$

differenziando quindi rapporto ad x e dividendo per dx, avremo

$$\frac{dy'}{dx}=\frac{dy}{dx}+\frac{dA}{dx}h+\frac{dB}{dx}h^2+\text{ ec.}$$

I primi membri di quest'equazioni essendo eguali, in virtù del (o.° 58), i secondi membri saranno identici: eguagliando duoque fra loro i coefficienti delle medesime potenze di h, si troverà

$$A=\frac{dy}{dx},\quad B=\frac{dA}{2dx},\quad C=\frac{dB}{3dx},\quad D=\frac{dC}{4dx},\text{ ec.}$$

sostituendo il valore di A, dato dalla prima di quest'equazioni, nella seconda, si avrà $B=\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}$; sostituendo questo valore in quello di C, si avrà . . . .

$C=\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}$; e così di seguito.

Per mezzo di questi valori di A, di B, di C, ec., l'equazione (37) diventerà

$$y'=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

e mettendo per y' il suo valore,

$$f(x+h)=y+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ .\ .\ .\ (38)$$

e questa è la formula del Taylor. Applichiamola allo sviluppo in serie di alcune funzioni.

61. Sia $y'=\sqrt{x+h}$; si ha dunque $y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$.
Dunque

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{x^5}},$$

sostituendo questi valori nella formula del Taylor, si ha

$$\sqrt{x+h}=\sqrt{x}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{x}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{16}\frac{h^3}{\sqrt{x^5}}-\text{ec.}$$

62. Sia $y'=\text{sen}(x+h)$, donde segue che $y=\text{sen}\,x$; formeremo così i coefficienti differenziali successivi,

$$\frac{dy}{dx}=\cos x,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\text{sen}\,x,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\cos x,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\text{sen}\,x,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=\cos x,\ \text{ec.};$$

sostituendo questi valori nella formula del Taylor, si ha

$$\text{sen}(x+h)=\text{sen}\,x+\cos x\frac{h}{1}-\text{sen}\,x\frac{h^2}{1.2}-\cos x\frac{h^3}{2.3}$$
$$+\text{sen}\,x\frac{h^4}{2.3.4}+\cos x\frac{h^5}{2.3.4.5}-\text{ec.};$$

facendo $x=0$; allora $\operatorname{sen} x=0$ e $\cos x=1$, e questo sviluppo si riduce a

$$\operatorname{sen} h = h - \frac{h^3}{2.3} + \frac{h^5}{2.3.4.5} - \text{ec.}$$

Se si prendesse $y' = \cos(x+h)$, si troverebbe operando come nel precedente esempio, che

$$\cos h = 1 - \frac{h^2}{1.2} + \frac{h^4}{2.3.4} - \text{ec.}$$

63. Sviluppiamo ancora $\log(x+h)$; abbiamo

$$y' = \log(x+h), \quad \text{dunque} \quad y = \log x;$$

$$dy = d.\log x = \frac{dx}{x}, \quad \text{dunque} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Otterremo quindi con successive differenziazioni;

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}, \quad \text{ec.};$$

sostituendo questi valori nella formula del Taylor, si ha

$$\log(x+h) = \log x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^3}, \text{ ec.}$$

64. Se questa formula fosse stata trovata con un metodo diverso da quello della differenziale di un logaritmo, si potrebbe dedurne questa differenziale in un modo differente da quello con cui l'abbiamo fatta (n.° 43). Infatti essa dà

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x} - \frac{h}{2x^2} + \text{ec.}$$

passando al limite si ha

$$\frac{d.\log x}{dx} = \frac{1}{x},$$

ossia

$$d\ \log x = \frac{dx}{x}.$$

Ecco uno dei processi che s'impiegano per trovare il logaritmo di $x+h$. Si cercherà prima lo sviluppo di $\log(1+x)$ cioè si eguaglierà $l\,(1+x)$ a una serie di termini ordinati secondo le potenze di x, osservando preliminarmente che, in queste serie, non può esservi un termine indipendente da x. Infatti se si avesse

$$\log(1+x) = A + Bx + Cx^2 + \text{ec.},$$

quest'equazione dovendo aver luogo, qualunque sia x, ne risulterebbe che facendo $x=0$, si troverebbe $A = \log 1 = 0$; così scriveremo

$$\log(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{ec.} \ldots (a);$$

cangiando x in z, avremo similmente

$$\log(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{ec.};$$

z essendo arbitraria, potremo supporre che vi sia fra x e z la relazione

$$(1+x)^2 \quad \text{ovvero} \quad 1+2x+x^2=1+z\,;$$

ricavando da quest'equazione il valore di z, e sostituendolo nell'equazione (a), troveremo

$$\log(1+x)^2=A(2x+x^2)+B(2x+x^2)^2+C(2x+x^2)^3+\text{ec.}\,;$$

ovvero, sviluppando e ordinando rapporto ad x,

$$\log(1+x)^2=2Ax+\left.\begin{array}{l}A\\+4B\end{array}\right|\begin{array}{l}x^2+4B\\+8C\end{array}\left|\begin{array}{l}x^3+\;\;B\\+12C\\+16D\end{array}\right|\begin{array}{l}x^4+\text{ec.}\\\\\\\end{array}\Bigg\}\;\ldots\;(b)$$

Da un'altra parte, la proprietà dei logaritmi essendo espressa dall'equazione $\log a^n=n\log a$, abbiamo

$$\log(1+x)^2=2\log(1+x),$$

ovvero, mettendo per $1+x$ il suo sviluppo (a),

$$\log(1+x)^2=2(Ax+Bx^2+Cx^3+\text{ec.})\,;$$

sostituendo questo valore di $\log(1+x)^2$ nel primo membro dell'equazione (b), dedurremo un'equazione che avrà luogo, qualunque sia x; per conseguenza, eguagliando fra loro i termini affetti dalle medesime potenze di x otterremo

$$2A=2A,\;\; A+4B=2B,\;\; 4B+8C=2C,\;\; \text{ec.}\,;$$

donde ricaveremo

$$B=-\frac{A}{2},\;\; C=-\frac{2B}{3}=\frac{A}{3},\;\; \text{ec.},$$

sostituendo questi valori, troveremo

$$\log(1+x)=A\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}\right)+C.$$

La costante è nulla, poichè $x=0$ dà $C=\log 1=0$. Facciamo $x=\frac{h}{x}$ avremo $1+x=\frac{h+x}{x}$; sostituendo, e cangiando in differenza il logaritmo del quoziente, viene

$$\log(x+h)-\log x=A\left(\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\frac{h^4}{4x^4}+\text{ec.}\right);$$

quest'equazione dà, quando si passa al limite,

$$\frac{d\log x}{dx}=\frac{A}{x},$$

e per conseguenza

$$d.\log x=\frac{dx}{x}A$$

equazione della medesima forma dell'equazione (30), pagina 436.

Conoscendo la differenziale di un logaritmo sarà facile di trovare quella di a^x; poichè facendo $y=a^x$, e prendendo i logaritmi nel sistema neperiano, si ha

$$Ly = La^x \quad \text{ossia} \quad Ly = xLa,$$

e differenziando,

$$\frac{dy}{y} = dxLa$$

donde si ricava

$$dy = ydxLa,$$

o, mettendo il valore di y,

$$da^x = a^x dxLa,$$

equazione che è la medesima della ventottesima (n.° 41).

65. Possiamo dedurre il teorema del Maclaurin da quello del Taylor, nel seguente modo: si ha pel teorema del Taylor,

$$f(x+h) = fx + \frac{d.fx}{dx}h + \frac{d^2.fx}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{d^3.fx}{dx^3}\frac{h^3}{2.3} + \text{ec.}$$

Si chiami (fx) ciò che diventa fx quando ci facciamo $x=0$, $\left(\frac{d.fx}{dx}\right)$ ciò che diventa $\frac{d.fx}{dx}$ quando ci facciamo $x=0$, e così di seguito per gli altri coefficienti differenziali; la formula del Taylor, quando si farà $x=0$, diventerà perciò

$$fh = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right)h + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right)\frac{h^2}{1.2} + \left(\frac{d^3.fx}{dx^3}\right)\frac{h^3}{1.2.3} + \text{ec.}$$

In quest'equazione, h entra in fh nella medesima maniera che x entrava in funzione fx, dimodochè se cangiamo h in x, fh diventerà fx; e siccome non resta veruna traccia di x, perchè abbiamo fatto $x=0$, questo cangiamento è permesso, attesochè importa poco di sostituire una lettera o un'altra ad h: facendo dunque questo cangiamento, si trova

$$fx = (fx) + \left(\frac{d.fx}{dx}\right)x + \left(\frac{d^2.fx}{dx^2}\right)\frac{x^2}{1.2} + \left(\frac{d^3.fx}{dx^3}\right)\frac{x^3}{1.2.3} + \text{ec.} \quad . \; . \; . \; (39),$$

che è il teorema del Maclaurin.

Passiamo ora alla differenziazione dell'equazioni a due variabili

66. Sia

$$F(x,y) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (40),$$

un'equazione fra due variabili. Risolvendo quest'equazione rapporto ad y, troveremo $y=\varphi x$; supponiamo che si sostituisca questo valore nell'equazione (40), questa diventerà $F(x,\varphi x)=0$, o per maggior semplicità

$$fx = 0,$$

equazione identica, e nella quale tutti i termini debbono distruggersi, qualunque valore che si dia ad x. Per esempio se quest'equazione non si eleva che al terzo grado, potremo rappresentarla con

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

e mettendo un valore qualunque per x, essa sarà sempre soddisfatta; dunque, mettendo $x+h$ invece di x, avremo ancora

$$A(x+h)^3+B(x+h)^2+C(x+h)+D=0,$$

vale a dire che se abbiamo $fx=0$, qualunque sia x, avremo ancora $f(x+h)=0$; sottraendo da quest' equazione quella di $fx=0$, rimarrà

$$f(x+h)-fx=0;$$

dunque ancora

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=0.$$

Ora

$$f(x+h)=fx+Ah+Bh^2+\text{ ec.},$$

donde si deduce

$$\frac{f(x+h)-fx}{h}=A+Bh+\text{ ec.};$$

il primo membro di quest' equazione essendo nullo, si ha dunque

$$A+Bh+\text{ec.}=0;$$

e passando al limite,

$$\frac{d.fx}{dx}=A=0,$$

e per conseguenza

$$d.fx=Adx=0,$$

e rimettendo y

$$d.F(x,y)=Adx=0.$$

Ciò prova che considerando y come una funzione di x, se differenziamo l'equazione $F(x,y)=0$, potremo eguagliare il risultamento a zero; il che servirà a determinare il valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, come lo vedremo nel seguente esempio.

Sia perciò

$$F(x,y)=x^2+3ay-y^2=0 \quad \ldots\ldots (41);$$

differenziando con i consueti processi, e osservando che per la precedente dimostrazione dobbiamo eguagliare questo risultamento a zero, si ha

$$2xdx+3ady-2ydy=0 \quad \ldots\ldots (42);$$

da quest' equazione si deduce

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{2y-3a} \quad \ldots\ldots (43).$$

67. Se paragoniamo il processo che ci ha fatto ottenere questo valore con quello che abbiamo impiegato fino al presente, vedremo che operando con questo primo metodo, sarebbe stato necessario prima di mettere l'equazione (41) sotto la forma $y=fx$, e per conseguenza risolverla rapporto ad y, per dedurre quindi per mezzo della differenziazione il valore di $\frac{dy}{dx}$. Seguendo questo metodo, co-

mineeremo dal trovàre

$$y=\frac{3a}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2},$$

e quindi, con la differenziazione

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2}}.$$

Questo valore di $\frac{dy}{dx}$ si presenta sotto una forma differente da quella che abbiamo ottenuta con l'equazione (43); ma mettendo nell'equazione (43) il valore di y, quest'equazione diventerà

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{2x}{2\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2}}=\pm\frac{x}{\sqrt{\frac{9}{4}a^2+x^2}},$$

cioè eguale all'ultimo valore trovato. L'equazione (42) è la differenziale prima dell'equazione (41).

Per ottenere l'equazione che dà il coefficiente differenziale del second'ordine, cioè $\frac{d^2y}{dx^2}$, dividendo l'equazione (42) per dx, e facendo $\frac{dy}{dx}=p$, quest'equazione diventerà

$$2x+3ap-2yp=0;$$

considerando y e p come funzioni di x, avremo differenziando,

$$2dx+3adp-2ydp-2pdy=0;$$

dividendo per dx e mettendo p invece di $\frac{dy}{dx}$, verrà

$$2+3a\frac{dp}{dx}-2y\frac{dp}{dx}-2p^2=0,$$

donde rieaveremo

$$\frac{dp}{dx}=\frac{2p^2-2}{3a-2y}\ldots\ldots(44).$$

Ora, poichè $p=\frac{dy}{dx}$, avremo $\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$; mettendo questi valori nell'equazione (44), e facendo sparire i denominatori otterremo

$$d^2y(3a-2y)=2dy^2-2dx^2\ldots\ldots(45);$$

tale sarà la differenziale seconda dell'equazione (41).

Per avere la differenziale terza, faremo $\frac{dp}{dx}=q$, e l'equazione (44) diven-

terà, dopo aver fatto sparire il denominatore,

$$3aq-2yq=2p^2-2;$$

si differenzierà considerando y, p, q come funzioni di x, e si troverà la differenziale terza, e così di seguito.

68. Invece d'impiegare le lettere p, q, r, ec., per effettuare l'operazioni, si giungerebbe al medesimo risultamento differenziando l'equazione (42) e mettendo dy per la differenziale di y, d^2y per quella di dy, d^3y per quella di d^2y, ec.; e considerando dx come costante, si troverebbe in questo modo

$$2dx^2+3ad^2y-2dy^2-2y\,d^2y=0,$$

equazione che è la medesima dell'equazione (45).

69. Diamo ora l'espressione generale della differenziale di una funzione $f(x,y)$ di due variabili. Per eseguir ciò rappresentiamo $f(x,y)$ con u; avremo, differenziando questa funzione rapporto ad x, il termine $\frac{du}{dx}dx$, e differenziandola rapporto ad y avremo questo secondo termine $\frac{du}{dy}dy$; dimodochè $d.f(x.y)$ ovvero

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy;$$

ma se y si considera come una funzione di x, avremo differenziandola

$$dy=\frac{dy}{dx}dx;$$

sostituendo questo valore, troveremo

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx.$$

70. Se ci rammentiamo il teorema dimostrato (n.° 29), vedremo che u considerandosi come una funzione di y, e y come una funzione di x, il prodotto $\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}dx$ non è altra cosa che la differenziale di u presa rapporto ad x contenuta in y.

71. La differenziale totale di una funzione di x, e di y essendo data dall'equazione

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy,$$

si sono chiamate l'espressioni $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$ le differenziali parziali di u.

Egualmente, se u è una funzione di tre variabili, x, y, z, indipendenti, avremo

$$du=\frac{du}{dx}dx+\frac{du}{dy}dy+\frac{du}{dz}dz,$$

e i termini $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, $\frac{du}{dz}dz$, saranno le differenziali parziali di u.

72. Prima però di occuparci dell'espressione generale della differenziale di tre variabili, considerandone due come indipendenti, applichiamo il teorema del Taylor allo sviluppo delle funzioni di due variabili che ricevono accrescimenti, e cominciamo dal prendere un esempio. Sia $u=x^m y^n$; le quantità x ed y non soggette ad alcuna relazione fra loro, la seconda può rimanere la medesima, quantunque la prima abbia cangiato, e viceversa. Resulta da ciò che il valore della funzione proposta può variare in più maniere, 1.° in conseguenza di un cangiamento arrivato ad x solo o ad y solo; 2.° per il concorso di queste due circostanze.

Non considerando in principio che il cangiamento segua che nella variabile x, se si sostituisce $x+h$ in luogo di questa variabile, nella funzione proposta, si troverà

$$(x+h)^m y^n = x^m y^n + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^n h^2$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} x^{m-3} y^n h^3 + \text{ec.}$$

Se facciamo variare y solo, scrivendo $y+k$ in luogo di y, avremo

$$x^m (y+k)^n = x^m y^n + \frac{n}{1} x^m y^{n-1} k + \frac{n(n-1)}{1.2} x^m y^{n-2} k^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^m y^{n-3} k^3 + \text{ec.}$$

Finalmente se si suppone che i due cangiamenti precedenti abbiano luogo nel medesimo tempo, la funzione proposta diventerà $(x+h)^m(y+k)^n$; e se ne otterrebbe lo sviluppo moltiplicando quello di $(x+h)^m$ per quello di $(y+k)^n$. Ma si può ottenere il medesimo risultamento in un modo più semplice, sostituendo $y+k$ per y nello sviluppo di $(x+h)^m y^n$ trovato di sopra, ovvero $x+h$ per x in quello di $x^m(y+k)^n$.

Effettuando la prima operazione verrà

$$(x+h)^m(y+k)^n = \left\{ \begin{array}{ll} x^m y^n & + \frac{m}{1} x^{m-1} y^n h \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} y^n h^2 + \text{ec.} \\ + n x^m y^{n-1} k & + \frac{m}{1}\frac{n}{1} x^{m-1} y^{n-1} hk \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{n}{1} x^{m-2} y^{n-1} h^2 k + \text{ec.} \\ + \frac{n(n-1)}{1.2} x^m y^{n-2} k^2 & + \frac{m}{1}\frac{n(n-1)}{1.2} x^{m-1} y^{n-2} hk^2 \\ & + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{n(n-1)}{1.2} x^{m-2} y^{n-2} h^2 k^2 + \text{ec.} \end{array} \right.$$

$$+ \text{ec.}$$

Questo sviluppo ci presenta la funzione primitiva $x^m y^n$, più un seguito di funzioni di x e di y che moltiplicano le differenti potenze degli accrescimenti h e k, come pure i prodotti di queste potenze. Si troverebbero sviluppi analoghi per qualunque altra funzione, e qualunque sia il numero delle variabili che entrano nella sua composizione. Faremo vedere in generale che questi sviluppi danno luogo a nuove funzioni, che si possono derivare dalla proposta con successive differenziazioni, come quelle che si ottengono nel caso di una sola variabile.

73. Rappresentiamo con $f(x,y)$ una funzione qualunque di x e di y; cominciamo dal supporre che la variabile x cangi sola e diventi $x+h$: bisognerà considerare y come una costante e trattare la funzione proposta come una funzione di x; si avrà perciò pel teorema del n.° 60, facendo per abbreviare $f(x,y)=u$,

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ (46).$$

Se si volesse trovar ciò che diventa la funzione proposta quando y solo prende un accrescimento, si considererebbe x come costante, e $f(x,y)$ ovvero u come una funzione di y; con ciò si avrebbe

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots\ (47).$$

Supponiamo ora che le quantità x ed y cangino nel medesimo tempo; e diventino $x+h$, e $y+k$; siccome non abbiamo dato alcuna forma particolare alla funzione $f(x,y)$, non è possibile farci nel medesimo tempo le due indicate sostituzioni; ma è facile di conoscere che giungeremo al medesimo risultamento cangiando prima x in $x+h$, e mettendo quindi $y+k$ per y, nello sviluppo che avremo ottenuto dalla prima operazione.

Si ha di già, u rappresentando $f(x,y)$

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Per sviluppare i coefficienti dei differenti termini di questa serie, avendo riguardo al cangiamento che ha subito y, si osserverà in primo luogo che in ciascuno di loro, x deve considerarsi come una quantità costante, e che per conseguenza si deve trattargli come funzioni della sola variabile y. Premesso ciò, $f(x,y)$, ovvero u, diventerà

$$u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

Se in questo sviluppo si scrive $\frac{du}{dx}$ in luogo di u, avremo per risultamento

ciò che diventa la funzione $\frac{du}{dx}$, quando y si cangia in $y+k$; vale a dire,

$$\frac{du}{dx}+\frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

ma è facile vedere che l'espressione $\frac{d.\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy}$ indica due differenziazioni fatte successivamente sopra la funzione proposta, la prima considerando che possa variare solamente x, e la seconda considerando che possa variare y sola; la metteremo perciò sotto una forma più semplice scrivendola come segue: $\frac{d^2u}{dydx}$.

Rappresenteremo egualmente $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dy^2}$ con $\frac{d^3u}{dy^2dx}$: in generale, bisognerà intendere per $\frac{d^{n+m}u}{dy^n dx^m}$, il coefficiente differenziale dell'ordine n relativo alla funzione $\frac{d^m u}{dx^m}$, non supponendoci che y variabile; nel mentre che questa funzione è essa medesima il coefficiente differenziale dell'ordine m della funzione proposta, non supponendo che x variabile.

Premesso ciò, la sostituzione di $y+k$ in luogo di y cangerà

$$\frac{du}{dx} \text{ in } \frac{du}{dx}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dy^3dx}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}+\frac{d^4u}{dy^2dx^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dy^3dx^2}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

$$\frac{d^3u}{dx^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^4u}{dydx^3}\frac{k}{1}+\frac{d^5u}{dy^2dx^3}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dy^3dx^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

ec.

Sostituendo questi valori nello sviluppo di $f(x+h,h)$, e ordinando in modo che tutti i termini nei quali gli esponenti di h e di k fanno una medesima somma, siano situati in una medesima colonna, verrà

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=u&+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\ &+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dydx}\frac{k.h}{1.1}+\frac{d^3u}{dy^2dx}\frac{k^2}{1.2}\frac{h}{1}+\text{ec.}\\ &+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dydx^2}\frac{k}{1}\frac{h^2}{1.2}+\text{ec.}\\ &+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\ &+\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots(48).$$

94. Abbiamo ottenuto lo sviluppo precedente mettendo prima $x+h$ in luogo di

x, e quindi $y+k$ in luogo di y; ma si sarebbe potuto procedere in ordine inverso, e cominciare dalla sostituzione relativa ad y: allora $f(x,y)$ sarebbe diventata

$$f(x,y+k)=u+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

La sostituzione di $x+h$ in luogo di x, in questa serie, avrebbe cangiato

$$u \text{ in } u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

e quindi

$$\frac{du}{dy} \text{ in } \frac{du}{dy}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^4u}{dx^3dy}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} \text{ in } \frac{d^2u}{dy^2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}+\frac{d^4u}{dx^2dy^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^5u}{dx^3dy^2}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

$$\frac{d^3u}{dy^3} \text{ in } \frac{d^3u}{dy^3}+\frac{d^4u}{dxdy^3}\frac{h}{1}+\frac{d^5u}{dx^2dy^3}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^6u}{dx^3dy^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}$$

ec.

Si avrebbe per conseguenza

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)=u&+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\ &+\frac{du}{dy}\frac{k}{1}+\frac{d^2u}{dxdy}\frac{h}{1}\frac{k}{1}+\frac{d^3u}{dx^2dy}\frac{h^2}{1.2}\frac{k}{1}+\text{ec.}\\ &+\frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dxdy^2}\frac{h}{1}\frac{k^2}{1.2}+\text{ec.}\\ &+\frac{d^3u}{dy^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.}\\ &+\text{ec.}\end{aligned}\right\}\ldots(19)$$

È evidente che questo secondo sviluppo dev' essere identico col primo; mentre è indifferente di cangiare prima x in $x+h$, e quindi y in $y+k$, o di fare le medesime sostituzioni in un ordine inverso, poichè in un modo o nell'altro si ottiene egualmente $f(x+h,y+k)$.

Se si paragonano in questi sviluppi i termini che sono affetti dalle medesime potenze di h e di k: troveremo questo seguito di equazioni.

$$\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d^2u}{dxdy},$$

$$\frac{d^3u}{dydx^2}=\frac{d^3u}{dx^2dy},$$

$$\frac{d^3u}{dy^2dx}=\frac{d^3u}{dxdy^2},$$

. . . . . .

$$\frac{d^{m+n}u}{dy^ndx^m}=\frac{d^{m+n}u}{dx^mdy^n},$$

ec. ec.

La prima e' insegna che il coefficiente differenziale del second'ordine di una funzione di due variabili, preso differenziando rapporto ad una di loro, e quindi rapporto all'altra, rimane il medesimo, qualunque sia l'ordine che abbiamo seguito nella differenziazione. Sia per esempio, $u = x^m y^n$; se si differenzia prima considerando x sola come variabile, si ha $\frac{du}{dx} = mx^{m-1}y^n$; differenziando quindi questo risultamento non facendo variare che y, si ottiene $\frac{d^2u}{dydx} = mnx^{m-1}y^{n-1}$: operando in un ordine inverso, si trova $\frac{du}{dy} = nx^m y^{n-1}$ e $\frac{d^2u}{dxdy} = mnx^{m-1}y^{n-1}$, e si vede che il risultamento è il medesimo nei due casi.

75. Le altre equazioni riportate di sopra non sono che conseguenze della prima: infatti dalla notazione adottata, $\frac{d^3u}{dydx^2}$ equivale a $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dydx}$, e a motivo che possiamo invertire l'ordine di queste differenziazioni consecutive, equivale ancora a $\frac{d^2\left(\frac{du}{dx}\right)}{dxdy} = \frac{d^3u}{dxdydx}$. Si ha ancora $\frac{d^3u}{dx^2dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dx}$, e cangiando l'ordine delle due prime differenziazioni indicate, viene $\frac{d\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)}{dx} = \frac{d^3u}{dxdydx}$, risultamento conforme al precedente.

Similmente si troverà

$$\frac{d^3u}{dy^2dx} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)}{dy} = \frac{d^3u}{dydxdy},$$

$$\frac{d^3u}{dxdy^2} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dxdy} = \frac{d^2\left(\frac{du}{dy}\right)}{dydx} = \frac{d^3u}{dydxdy}.$$

In generale, possiamo cangiare come vorremo l'ordine delle differenziazioni indicate; purchè esse rimangano le medesime e nel medesimo numero, il risultamento non cangerà.

Per provarlo, si abbia $\frac{d^{m+n}u}{dx^m dx^n}$; con facilità vedremo, dalle fatte convenzioni nei numeri 60, e 73, che possiamo decomporre quest'espressione come segue:

$$\frac{d^{m-1}\left\{\frac{d^2\left(\frac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dxdy}\right\}}{dx^{m-1}}$$

ma invertendo l'ordine delle sue differenziazioni isolate, il che è permesso, si ha

$$\frac{d^{m-1}\left\{\dfrac{d^2\left(\dfrac{d^{n-1}u}{dy^{n-1}}\right)}{dydx}\right\}}{dx^{m-1}};$$

e riunendo sotto un medesimo segno tutte l'indicate operazioni, viene in luogo della formula proposta l'espressione equivalente

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^{m-1}dydxdy^{n-1}}.$$

Se si decomponesse ancora quest'ultima, si potrebbero fare nuove permutazioni nella disposizione delle dy e dx; dobbiamo perciò considerare la proposizione di sopra come dimostrata.

76. Sottraendo $f(x,y)$, ovvero u, da $f(x+h, y+k)$, si trova

$$\left.\begin{aligned} f(x+h,y+k)-f(x,y) = \frac{du}{dx}\frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2} + \text{ec.} \\ + \frac{du}{dy}\frac{k}{1} + \frac{d^2u}{dydx}\frac{k}{1}.\frac{h}{1} + \text{ec.} \\ + \frac{d^2u}{dy^2}\frac{k^2}{1.2} + \text{ec.} \\ + \text{ec.} \end{aligned}\right\}.$$

Se si estende alle funzioni di tre variabili la definizione che abbiamo data della differenziale delle funzioni di una sola, vedremo che quella di $f(x,y)$, ossia di u, è compresa nei due termini che formano la prima colonna dello sviluppo precedente; e cangiando h in dx, e k in dy, avremo

$$df(x,y) = du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy.$$

Segue da ciò che la differenziale di una funzione di due variabili contiene due parti, cioè: $\frac{du}{dx}dx$, o la differenziale presa considerando x come sola variabile, e $\frac{du}{dy}dy$, o la differenziale presa considerando y come sola variabile.

Possiamo dunque applicare alle funzioni di due variabili le regole date per la differenziazione di una sola, e perciò *differenzieremo la funzione proposta prima rapporto ad una delle variabili, e quindi rapporto all'altra: la somma dei due risultamenti sarà la differenziale cercata.*

Si vede sul momento, con questa regola che

$$\left.\begin{aligned} d.(x+y) &= dx+dy \\ d.xy &= ydx+xdy \\ d.\frac{x}{y} &= \frac{ydx-xdy}{y^2} \end{aligned}\right\}.$$

Non crediamo necessario di dare molti esempi relativi alla differenziazione delle funzioni di due variabili, poichè essa rientra in quella delle funzioni che ne contengono una sola; ci limiteremo dunque ai seguenti:

$$1.^{\circ}\ u = x^m y^n;\ \text{si ha}\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx}\,dx = mx^{m-1}y^n dx \\[2ex] \dfrac{du}{dy}\,dy = nx^m y^{n-1}\,dy \end{array}\right\};$$

dunque

$$du = mx^{m-1}y^n dx + nx^m y^{n-1} dy = x^{m-1}y^{n-1}\,(mydx + nxdy).$$

$$2.^{\circ}\ u = \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}};\ \text{si ha}\ \frac{du}{dx}\,dx = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{du}{dy}\,dy = \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

dunque

$$du = -\frac{ayxdx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ady}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{ay^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

ovvero riducendo

$$du = -\frac{ayxdx + ax^2dy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3.° $u = l.\text{tang}\,\frac{x}{y}$: per differenziare quest' espressione, nella quale la quantità $\frac{x}{y}$ è inviluppata successivamente sotto due funzioni trascendenti, si farà $\frac{x}{y} = z$, e si cercherà, per mezzo dei numeri 43 e 50, la differenziale di $l\,\text{tang}\,z$. Verrà per risultamento

$$du = \frac{d.\text{tang}\,z}{\text{tang}\,z} = \frac{dz}{\text{tang}\,z\cos^2 z} = \frac{dz}{\text{sen}\,z\,\cos z}.$$

mettendo in luogo di z e di dz i loro valori, si troverà

$$du = \frac{\dfrac{ydx - xdy}{y^2}}{\text{sen}\,\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}} = \frac{ydx - xdy}{y^2\,\text{sen}\,\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}}.$$

77. Conviene osservare che una funzione di una sola variabile non ha in ciascun ordine che un coefficiente differenziale, nel mentre che una funzione di due variabili ha due coefficienti differenziali per il prim'ordine, tre per il secondo, quattro per il terzo, ec.

Ecco come possiamo trovare questi diversi coefficienti, partendo dai due primi.

Si ha in primo luogo

$$du = \frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dy}\,dy\,;$$

prendendo quindi la differenziale delle funzioni $\frac{du}{dx}$ e $\frac{du}{dy}$, che debbono essere trattate come funzioni di due variabili, viene

$$d\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx + \frac{d^2u}{dydx}\,dy,$$

$$d\left(\frac{du}{dy}\right) = \frac{d^2u}{dxdy}\,dx + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy\,;$$

e siccome la differenziale seconda non è altra cosa che la differenziale della differenziale prima, avremo

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2 + 2\,\frac{d^2u}{dxdy}\,dxdy + \frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2,$$

considerando dx e dy come costanti, e osservando che i coefficienti differenziali i di cui denominatori non presentano che le differenti disposizioni di un medesimo prodotto in dx e in dy, sono identici.

Se si differenziano i coefficienti che si trovano nel precedente risultamento, verrà

$$d\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right) = \frac{d^3u}{dx^3}\,dx + \frac{d^3u}{dydx^2}\,dy,$$

$$d\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right) = \frac{d^3u}{dx^2dy}\,dx + \frac{d^3u}{dydxdy}\,dy,$$

$$d\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = \frac{d^3u}{dxdy^2}\,dx + \frac{d^3u}{dy^3}\,dy,$$

e per conseguenza

$$d^3u = \frac{d^3u}{dx^3}\,dx^3 + \frac{3d^3u}{dx^2dy}\,dx^2dy$$

$$+ \frac{3d^3u}{dxdy^2}\,dxdy^2 + \frac{d^3u}{dy^3}\,dy^3.$$

Si continuerà facilmente questa formazione, ed osserveremo certamente l'analogia che regna nei risultamenti ai quali siamo giunti, e gli sviluppi delle potenze del binomio. Per assicurarci che quest'analogia ha luogo a qualunque ordine che si spinga la differenziazione, basta cercare la legge che regna fra due consecutive differenziali.

Supponiamo perciò che si abbia

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + A \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy$$

$$+ B \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2$$

$$+ C \frac{d^n u}{dx^{n-3} dy^3} dx^{n-3} dy^3 + \text{ec.}$$

A, B, C, ec. essendo coefficienti numerici indipendenti da x e da y; se si differenzia ciascuno dei termini del secondo membro di quest'equazione rapporto ad x e rapporto ad y successivamente, che quindi si riunisca i risultamenti simili, si troverà

$$\left.\begin{aligned} d^{n+1} u = \frac{d^{n+1} u}{dx^{n+1}} dx^{n+1} &+ (A+1) \frac{d^{n+1} u}{dx^n dy} dx^n dy \\ &+ (B+A) \frac{d^{n+1} u}{dx^{n-1} dy^2} dx^{n-1} dy^2 \\ &+ (C+B) \frac{d^{n+1} n}{dx^{n-2} dy^3} dx^{n-2} dy^3 \\ &+ \text{ec.} \end{aligned}\right\}.$$

Sia ora

$$(x+y)^n = x^n + A' x^{n-1} y + B' x^{n-2} y^2 + C' x^{n-3} y^3 + \text{ec.};$$

si avrà

$$\left.\begin{aligned} (x+y)^{n+1} = (x+y)^n (x+y) = x^{n+1} + (A'+1) x^n y + (B'+A') x^{n-1} y^2 \\ + (C'+B') x^{n-2} y^3 \\ + \text{ec.} \end{aligned}\right\};$$

donde si vede che nel passaggio da n a $n+1$, i coefficienti dello sviluppo di $(x+y)^n$ provano i medesimi cambiamenti che quelli di $d^n u$; e siccome i primi sono respettivamente eguali ai secondi, allorquando $n=1$, quest'eguaglianza deve ancora aver luogo per qualunque altro valore intero di n: possiamo dunque scrivere in generale

$$d^n u = \frac{d^n u}{dx^n} dx^n + \frac{n}{1} \frac{d^n u}{dx^{n-1} dy} dx^{n-1} dy$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^n u}{dx^{n-2} dy^2} dx^{n-2} dy^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{d^n u}{dx^{n-3} dy^3} dx^{n-3} dy^3 \ldots . (50).$$

Segue da ciò che si formerà la differenziale $d^n u$ sviluppando il binomio $(dx+dy)^n$, e moltiplicando i differenti termini del risultamento per i coefficienti differenziali analoghi, dimodochè quello che è affetto da $dx^{n-m} dy^m$ abbia per moltiplicatore

$$\frac{d^n u}{dx^{n-m} dy^m}$$

78. Lo sviluppo di $f(x+h, y+k)$ può ancora dedursi da quello delle differenti potenze del binomio; poichè riducendo al medesimo denominatore i termini nei quali gli esponenti di h e di k fanno una medesima somma, esso prenderà la seguente forma

$$u$$

$$+\frac{1}{1}\left\{\frac{du}{dx}h+\frac{du}{dy}k\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2}\left\{\frac{d^2u}{dx^2}h^2+2\frac{d^2u}{dxdy}hk+\frac{d^2u}{dy^2}k^2\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\left\{\frac{d^3u}{dx^3}h^3+3\frac{d^3u}{dx^2dy}h^2k+3\frac{d^3u}{dx\,dy^2}hk^2+\frac{d^3u}{dy^3}k^3\right\}$$

$$+\frac{1}{1.2.3.4}\left\{\frac{d^4u}{dx^4}h^4+4\frac{d^4u}{dx^3dy}h^3k+6\frac{d^4u}{dx^2dy^2}h^2k^2+\frac{d^4u}{dxdy^3}hk^3+\frac{d^4u}{dy^4}k^4\right\}$$

$$+\text{ec.};$$

e allora si vede certamente che esso si deduce dalla serie

$$u+\frac{1}{1}(h+k)+\frac{1}{1.2}(h+k)^2+\frac{1}{1.2.3}(h+k)^3+\frac{1}{1.2.3.4}(h+k)^4+\text{ec.},$$

come le differenziali du, d^2u, d^3u, ec. si deducono dalle potenze $(dx+dy)$, $(dx+dy)^2$, $(dx+dy)^3$, ec.

Non ci limiteremo all'induzione che possiamo ricavare dal paragone dei primi termini della precedente formola, o sarà facile provare che l'analogia che abbiamo fatto osservare ha luogo in tutta l'estensione di queste formule.

Consideriamo il termine generale di $f(x+h, y+k)$; è evidente che esso deve derivare da quello di $f(x+h,y)$ sostituendoci $y+k$ in luogo di y; ma a motivo di

$$f(x+h,y)=u+\frac{du}{dx}\frac{h}{1}+\frac{d^2u}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3u}{dx^3}\frac{h^3}{1.2.3}+\text{ec.},$$

quest'ultimo sarà $\frac{d^mu}{dx^m}\frac{h^m}{1.2...m}$; facendo nella funzione $\frac{d^m u}{dx^m}$, il cambiamento indicato rapporto ad y, avremo per risultamento una serie di termini

$$\frac{d^mu}{dx^m}+\frac{d^{m+1}u}{dx^m\,dy}\frac{k}{1}+\frac{d^{m+2}u}{dx^m\,dy^2}\frac{k^2}{1.2}+\frac{d^{m+3}u}{dx^m dy^3}\frac{k^3}{1.2.3}+\ldots$$

$$+\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\frac{k^n}{1.2\ldots n}.$$

e per conseguenza il termine generale domandato sarà espresso da

$$\frac{d^{m+n}u}{dx^m dy^n}\times\frac{h^mk^n}{1.2\ldots m.1.2\ldots n}.$$

Ma il prodotto h^mk^n è omogeneo ad h^{m+n} e k^{m+n}, che avranno l'uno e l'altro per coefficente numerico $\frac{1}{1.2\ldots(m+n)}$; moltiplicando dunque per $1.2\ldots$

$(m+n)$, i due termini della frazione $\frac{1}{1.2...m.1.2...n}$ si troverà

$$\frac{1}{1.2...(m+n)} \times \frac{1.2.....(m+n)}{1.2...m.1.2...n},$$

e prendendo $\frac{1}{1.2...(m+n)}$ per fattore comune di tutti i termini omogenei a $h^m k^n$, resterà per il coefficiente proprio di questo termine $\frac{1.2....(m+n)}{1.2...m.1.2....n}$; vale a dire il medesimo che quello di cui sarebbe affetto nello sviluppo di $(h+k)^{m+n}$.

79. Se si cangia h in dx e k in dy nello sviluppo di $f(x+h, y+k)$ che abbiamo considerato, ritroveremo allora, facendo astrazione dal denominatore, le differenziali di tutti gli ordini della funzione u, cioè la differenziale prima nei termini in cui gli accrescimenti non giungono che al primo grado, la differenziale seconda, in quelli che vanno al secondo, la differenziale terza, in quelli in cui non si elevano che al terzo, ec: avremo dunque così

$$f(x+dx, y+dy) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \frac{d^4u}{1.2.3.4} + \text{ec.}... (51),$$

La serie precedente conviene dunque egualmente alle funzioni di una e di due variabili, purchè si prendano le differenziali in un modo conveniente in ciascuno di questi casi.

80. Non ci occuperemo delle funzioni di tre o di un maggior numero di variabili, poichè con la massima facilità si possono render generali i processi dei numeri precedenti relativamente alle funzioni di due variabili, e per conseguenza dedurre da questi i loro sviluppi.

81. Passiamo ora ad una funzione di tre variabili x, y, z, onde completare la teoria della differenziazione dell'equazioni trattata al n.° 66, fra le quali se ne scelgano due per variabili indipendenti. Un esempio di questo caso si presenta quando nell'equazione $f(x, y, z,) = o$ di una superficie curva, si determina la variabile z dando valori arbitrari alle due altre variabili, che mediante ciò diventano variabili indipendenti. In questa circostanza z dipendendo da x e da y, è una funzione implicita di queste variabili; bisogna aver riguardo a ciò nella differenziazione. Così rappresentando per u questa funzione di tre variabili x, y, z, se vogliamo averne la differenziale rapporto ad x, questa differenziale non si comporrà solamente di $\frac{du}{dx}\,dx$, ma bisognerà aggiungervi il termine $\frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\,dx$, per indicare che si considera z come dipendente da x. La differenziale totale rapporto ad x sarà perciò espressa da

$$\frac{du}{dx}\,dx + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}\,dx \;....\; (52).$$

La differenziale totale rapporto ad y avrà egualmente per espressione

$$\frac{du}{dy}\,dy + \frac{du}{dz} \cdot \frac{dz}{dy}\,dy \;....\; (53).$$

Se si aggiunge la differenziale presa rapporto alla variabile indipendente x, alla differenziale presa rapporto all'altra variabile indipendente y, si troverà per la differenziale totale

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\left(\frac{dz}{dx}\,dx+\frac{dz}{dy}\,dy\right)\ldots\ldots(54),$$

e siccome la quantità racchiusa fra le parentesi non è altra cosa che la differenziale completa di z, l'espressione che abbiamo trovata si ridurrà a

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\,dz.$$

Se questa differenziale totale fosse eguale a zero, seguirebbe lo stesso dell'espressione (54), che a motivo dell'indipendenza delle variabili x e y, si decomporrebbe in queste due altre equazioni

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}\,dx=0,$$

$$\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy}\,dy=0.$$

82. Se, come al (n.° 71), u è una funzione di tre variabili indipendenti x, y, z, ne troveremo la seconda differenziale riunendo le differenziali di

$$\frac{du}{dx}\,dx+\frac{du}{dy}\,dy+\frac{du}{dz}\,dz\ldots\ldots(55)$$

prese rapporto a ciascuna delle variabili; ma per eseguir ciò bisognerà osservare, che dx non avendo la differenziale seconda, a motivo dell'indipendenza di x seguirà il medesimo per dy e per dz, riguardo ad y e z. Così differenziando, tratteremo i fattori dx, dy e dz dell'equazione (55) come costanti, e avremo, differenziando,

rapporto a x $\quad\dfrac{d^2u}{dx^2}\,dx^2+\dfrac{d^2u}{dydx}\,dydx+\dfrac{d^2u}{dzdx}\,dzdx,$

rapporto a y $\quad\dfrac{d^2u}{dxdy}\,dxdy+\dfrac{d^2u}{dy^2}\,dy^2+\dfrac{d^2u}{dzdy}\,dzdy,$

rapporto a z $\quad\dfrac{d^2u}{dxdz}\,dxdz+\dfrac{d^2u}{dydz}\,dydz+\dfrac{d^2u}{dz^2}\,dz^2;$

aggiungendo questi risultamenti, avremo per la differenziale totale dell'espressione (55),

$$\left.\begin{aligned}d^2u=&\frac{d^2u}{dx^2}\,dx^2+\frac{d^2u}{dy^2}\,dy^2+\frac{d^2u}{dz^2}\,dz^2\\&+\frac{2d^2u}{dxdy}\,dxdy+\frac{2d^2u}{dxdz}\,dxdz+\frac{2d^2u}{dydz}\,dydz\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(56).$$

Se u non fosse funzione che di due variabili x e y, questo risultamento si ridurrebbe a

$$d^2u = \frac{d^2u}{dx^2}dx^2 + \frac{d^2u}{dy^2}dy^2 + \frac{2d^2u}{dxdy}dxdy \ldots\ldots (57),$$

Continuando a differenziare nella medesima maniera l'equazioni (56) e (57), si troverebbero le differenziali terze, quarte, ec., ... di u; e in queste differenziali successive, si osserverebbe facilmente l'analogia che hanno con le potenze di un binomio, di un trinomio, ec., secondo che la funzione si componesse di due, di tre o di un maggior numero di variabili.

Nell' ipotesi in cui, fra le tre variabili x, y, z che contiene u, non vi siano che le due prime indipendenti, bisogna considerare z come una funzione di x e di y, della quale faremo conto nella differenziale.

Per conseguenza, sostituendo $\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$, invece di dz la formula (55) potrà scriversi così:

$$d(u) = \left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dx}\right)dx$$
$$+ \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\frac{dz}{dy}\right)dy;$$

e u, contenendo z implicitamente, sarà riportato ad una funzione di due variabili. La differenziale seconda di u si determinerà perciò per mezzo della formula (57), purchè si tratti z, come una funzione di x e di y; e la questione si ridurrà a ottenere i valori che prenderanno allora $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^2u}{dy^2}$, $\frac{d^2u}{dxdy}$, e alle sostituzioni nella formula (57). A quest'effetto, l'equazioni (52) e (53) numero 81 pagina 460, daranno subito per i coefficienti differenziali del prim'ordine di u, rapporto a x, a y e alla variabile z considerata come funzione di due altre,

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(u)}{dx} &= \frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} \\ \frac{d(u)}{dy} &= \frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{dz}{dy} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (58);$$

differenziando la prima di quest' equazioni rapporto ad x solo, col metodo del n.° 17, avremo questo coefficiente differenziale

$$1.^a \textit{ parte di } \frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dzdx}\frac{dz}{dx} + \frac{d^2u}{dz^2}\frac{dz^2}{dx^2} \ldots (59);$$

differenziando quindi la prima dell'equazioni (58) rapporto a z funzione di x, avremo quest'altro coefficiente differenziale

$$2.^a \textit{ parte di } \frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dxdz}\cdot\frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz}\cdot\frac{d^2z}{dx^2} \ldots (60);$$

a questo risultamento non aggiungeremo il termine $\frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dxdz}$ che dovrebbe esservi secondo la regola del (n.° 17), perchè mettendo questo termine sotto la forma

$$\frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dzdx} = \frac{du}{dz} \frac{d\left(\frac{dz}{dz}\right)}{dx} = \frac{dudz}{dzdx} = \frac{du}{dz} \cdot \frac{d\,costante}{dx}$$

vediamo che esso sparisce, per la ragione che una costante non ha differenziale. Aggiungendo dunque i risultamenti (59) e (60) avremo per il coefficiente differenziale rapporto ad x,

$$\frac{d^2(u)}{dx^2} = \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2d^2u}{dxdz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$+ \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \cdot \frac{dz^2}{dx^2} \ldots (61);$$

operando egualmente per y, troveremo

$$\frac{d^2(u)}{dy^2} = \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{2d^2u}{dydz} \frac{dz}{dy}$$

$$+ \frac{du}{dz} \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz^2}{dy^2} \ldots . (62).$$

Non si tratta più che di trovare $\frac{d^2(u)}{dxdy}$. Ci possiamo giungere in due differenti modi; o differenziando la prima delle equazioni (58), rapporto a y e a z trattata come funzione di y, o differenziando la seconda dell'equazioni rapporto a x e a z trattata come funzione di x. Operando nella prima ipotesi, otterremo, differenziando la prima dell'equazioni (58) rapporto a y

$$1.^a \textit{ parte di } \frac{d^2(u)}{dxdy} = \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dzdy} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dxdy},$$

e differenziandola rapporto a z, funzione di y,

$$2.^a \textit{ parte di } \frac{d^2(u)}{dxdy} = \frac{d^2u}{dxdz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dz}{dx};$$

aggiungendo queste parti troveremo

$$\frac{d^2(u)}{dxdy} = \frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dzdy} \cdot \frac{dz}{dx} + \frac{du}{dz} \cdot \frac{d^2z}{dxdy}$$

$$+ \frac{d^2u}{dxdz} \frac{dz}{dy} + \frac{d^2u}{dz^2} \frac{dz}{dy} \frac{dz}{dx} \ldots . (63).$$

Per ottenere la differenziale di u, nell'ipotesi in cui le due prime variabili x, y, z siano solamente indipendenti, bisognerà come lo prescrive l'equazio-

quazione (57), moltiplicare l'equazione (61) per dx^2, l'equazione (62) per dy^2 e l'equazione (63) per $2dxdy$, e formare la somma di questi prodotti; ma facendo questa somma, avremo cura di eseguire alcune riduzioni, osservando che

$$\frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy = dz;$$

e che quest'equazione essendo differenziata, dà

$$\frac{d^2z}{dx^2}dx^2 + 2\frac{d^2z}{dxdy}dxdy + \frac{d^2z}{dy^2}dy^2 = d^2z.$$

83. Facciamo ora un' osservazione utile sul coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$: abbiamo veduto (n.° 57) che un' espressione di questo genere indicava che la funzione y era stata differenziata rapporto alla variabile x, e divisa quindi per dx; segue da ciò che se abbiamo l'equazione $\frac{dy}{dx} = A$, e che se ne deduca

$$1 = \frac{A}{\frac{dy}{dx}},$$

non possiamo, senza dimostrazione, concluderne che

$$1 = A\frac{dx}{dy};$$

poichè, in questa nuova equazione, la differenziazione non è più fatta rapporto ad x, ma rapporto ad y; e non sappiamo se in questa nuova ipotesi di differenziazione, il risultamento è il medesimo.

Per levare questa difficoltà, abbiamo dimostrato (n.° 29) che

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Se in quest'equazione si fa $v = x$, essa diventa

$$1 = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx},$$

donde si ricava

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

il che fa vedere che il cangiamento d'ipotesi di differenziazione si accorda con l'algebra.

Ecco in qual maniera si potrebbe dimostrare direttamente che nella nuova accezione che dà il segno della differenziazione all'equazione $\frac{dy}{dx} = A$, siamo in diritto di dedurne.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{A}.$$

Sia

$$\frac{y'-y}{x'-x}=A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.};$$

dunque

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A+Bh+Ch^2+Dh^3+\text{ec.}}$$

effettuando la divisione o sviluppando questa funzione con l'aiuto del teorema del Maclaurin, si ottiene

$$\frac{x'-x}{y'-y}=\frac{1}{A}-\frac{B}{A}h+\text{ec.}$$

passando al limite, si ha

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{A}.$$

Il che prova che considerando x come una funzione di y il coefficiente differenziale si trova dividendo l'unità per il coefficiente differenziale A, che si otterrebbe considerando y come una funzione di x.

Il calcolo differenziale è eminentemente utile in tutti i rami delle scienze matematiche, e tanto per darne un piccolo saggio, applichiamolo alla ricerca degli asintoti delle curve.

84. Dai trattati d'applicazione d'algebra alla geometria, si sa che gli asintoti sono linee che si avvicinano continuamente ad una curva senza giungervi mai. Sia dunque $y=fx$ l'equazione di questa curva, perchè sia in grado di avere asintoti, bisogna che dopo avere ordinato lo sviluppo di fx secondo le potenze discendenti di x, si cada sopra esponenti negativi. Allora lo sviluppo di y, nel quale gli esponenti α, β, γ, ec., anderanno diminuendo e finiranno per diventare negativi, sarà di questa forma

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}\ldots\ldots+Lx^{\varepsilon}+\frac{M}{x^{\lambda}}+\frac{N}{x^{\mu}}+\text{ec.}\ldots(64).$$

Ora con facilità si dimostra che se gli esponenti α, β, γ, ec., restano quantità finite, l'equazione

$$y=Ax^{\alpha}+Bx^{\beta}+Cx^{\gamma}\ldots\ldots+Lx^{\varepsilon}\ldots\ldots(65),$$

sarà quella di un asintoto alla curva costruito per mezzo dell'equazione (64). A quest'effetto, siano PM e PN, (*Tav.* CI, *fig.* 1) l'ordinate corrispondenti ad una medesima ascissa determinata dall'equazioni (64) e (65), la differenza di queste ordinate, positiva o negativa, secondo quella che supererà l'altra, sarà espressa da

$$MN=\frac{M}{x^{\lambda}}+\frac{N}{x^{\mu}}+\text{ec.};$$

quantità che diminuirà a misura che x aumenterà, e che, per la ragione che più il denominatore di una frazione si accresce, più essa diminuisce, si avvicinerà indefinitamente a zero, senza mai giungervi; donde segue che l'equazione (65) sarà quella di un asintoto alla curva corrispondente all'equazione (64).

85. Cerchiamo, per esempio, in qual caso le curve del second' ordine possano avere asintoti. L'equazioo generale di queste curve è $y^2 = mx + nx^2$, risolvendola si trova

$$y = \pm \sqrt{mx + nx^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (66).$$

Cominciamo dal prendere il segoo superiore e sviluppiamo qoest' equazione secondo le potenze discendenti di x. Per ottenere ciò, divideremo l'equazione $y^2 = mx + nx^2$ per x^2, il che la ridurrà a

$$\frac{y^2}{x^2} = m \frac{1}{x} + n;$$

estraendo la radice quadrata e facendo $\frac{y}{x} = u$ e $\frac{1}{x} = z$, la metteremo sotto questa forma

$$u = \pm \sqrt{n + mz};$$

paragoonando qoesto radicale a quello dell'eqoazione (18) pagina 430, avremo

$$mz = bx, \quad a^2 = n, \quad \text{ovvero} \quad a = \sqrt{n};$$

sostituendo questi valori nell'equazione (18), otterremo

$$u = \sqrt{n} + \frac{mz}{2n^{\frac{1}{2}}} - \frac{m^2z^2}{8n^{\frac{3}{2}}} + \frac{m^3z^3}{16n^{\frac{5}{2}}} - \text{ec.}$$

rimettendo i valori di u e di z, e ricavando quello di y, si trova

$$y = x\sqrt{n} + \frac{m}{2\sqrt{n}} - \frac{m^2}{8xn^{\frac{3}{2}}} + \frac{m^3}{16x^2n^{\frac{5}{2}}} - \text{ec.}$$

In questo sviluppo, si vede che x passa al denominatore cominciando dal secondo termine, il che è un indizio che la curva può avere asintoti. Esaminiamo dunque in qual caso essa ne ammette. Perciò, osserveremo che quando n è negativa, questo sviluppo contiene quantità immaginarie, e per conseguenza diventa impossibile; ma si sa che quando n è negativa, la curva appartiene ad un'ellisse; donque l'ellisse non ha asintoti; segue il medesimo quando si ha $n = 0$; mentre in questo caso il primo termine dello sviluppo sparisce, e tutti gli altri diventeranno infiniti.

Questo caso essendo quello della parabola, concluderemo ancora che la parabola non ha asintoti. Finalmente, ci rimane da considerare il caso di n positivo, che è quello dell'iperbola; allora lo sviluppo essendo possibile, prenderemo i termini che non contengono x al denominatore, ed avremo

$$y = x\sqrt{n} + \frac{m}{2\sqrt{n}} \; . \; . \; . \; . \; . \; (67).$$

Quest'equazione potrà considerarsi come quelle di un asintoto all'iperbola, alla quale si riferisce allora l'equazione $y^2 = mx + nx^2$. Per dare a quest'equazione una forma più conveniente a questo caso, facciamo $y = 0$, troveremo

$mx+nx^2=0$; il che darà $x=0$, e $x=-\frac{m}{n}$ per le ascisse dei punti A e B, (*Tav.* CI, *fig.* 2), ove la curva incontra l'asse delle x la retta AB è una costante che s'indica con $2a$ nell'equazione dell'iperbola riportata al vertice B. Facciamo dunque $\frac{m}{n}=2a$, cioè $m=2na$, l'equazione $y^2=mx+nx^2$ si cangerà in $y^2=n(2ax+x^2)$; e sotto questa forma si conosce nella costante n quella che per analogia con l'equazione dell'ellisse, abbiamo convenuto di rappresentare con $\frac{b^2}{a^2}$. Ponendo dunque l'equazioni

$$\frac{m}{n}=2a \quad \text{e} \quad n=\frac{b^2}{a^2},$$

se si moltiplica termine a termine la prima per la radice quadrata della seconda, cioè per $\sqrt{n}=\frac{b}{a}$, si troverà

$$\frac{m}{\sqrt{n}}=2b.$$

Questo valore e quello di $\sqrt{n}$ essendo sostituiti nell'equazione (67) la cangeranno in

$$y=\frac{b}{a}\,x+b;$$

e si vede che quest'equazione sarà quella di una retta OK, che taglierà l'asse dell'y in un punto C, e che per fissarne la posizione, basterà di condurre pel centro O dell'iperbola e per l'origine A le rette $OA=a$, e $AC=b$.

Riguardo al secondo valore del radicale dell'equazione (66), è evidente che esso determina l'asintoto OK'.

Applichiamo ora i principii del calcolo differenziale alle funzioni, che per un valore della variabile, diventano $\frac{0}{0}$.

86. Quando una frazione come $\frac{Fx}{\varphi x}$ diventa $\frac{0}{0}$ sostituendoci un valore di x che si rappresenterà con a, questo è un indizio che i due termini di questa frazione hanno $x-a$, o, in generale $(x-a)^m$ per fattore comune; se si potesse toglierlo, si avrebbe il vero valore della frazione.

Sopponiamo dunque che $x-a$ sia m volte fattore in Fx, e n volte fattore in φx (salvo, quando il caso lo esiga, a supporre che m ed n siano eguali all'unità o a zero), potremo scrivere

$$Fx=P(x-a)^m, \quad \varphi x=Q(x-a)^n;$$

dunque

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{P}{Q}(x-a)^{m-n} \quad \ldots\ldots (68).$$

Per mezzo della differenziazione troveremo

$$\frac{d.Fx}{dx} = \frac{dP}{dx}(x-a)^m + mP(x-a)^{m-1},$$

Osserviamo che questo valore di $\frac{d.Fx}{dx}$ si compone di due termini, di cui l'uno contiene una potenza di $x-a$, minore di un'unità di quella che entra nella funzione. Per la medesima ragione, prendendo il coefficiente differenziale di $\frac{d.Fx}{dx}$, si troverà un termine affetto da $(x-a)^m$, un altro da $(x-a)^{m-1}$, e un terzo da $(x-a)^{m-2}$; quest'ultimo termine sarà $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$. Continuando così, vedremo che ciascuna nuova differenziazione riproduce termini affetti dalle medesime potenze di $(x-a)$, di quelli che erano contenuti nella funzione differenziata, più un termine nel quale la potenza di $x-a$ è diminuita di un'unità; così, prendendo i coefficienti differenziali successivi, il termine che contiene la meno alta potenza di $x-a$, sarà

alla prima differenziazione . . . $mP(x-a)^{m-1}$,

alla seconda . . . . . $m(m-1)P(x-a)^{m-2}$

alla terza . . . . . $m(m-1)(m-2)P(x-a)^{m-3}$

. . . . . .

all'n^{sima} . . . . . $m(m-1)$ . . . . . $P(x-a)^{m-n}$.

Dimodochè il coefficiente differenziale dell'ordine r di Fx sarà di questa forma

$$\frac{d^rFx}{dx^r} = X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + X''(x-a)^{m-2} + X'''(x-a)^{m-3}$$

$$\ldots\ldots + m(m-1)(m-2)\ldots P(x-a)^{m-r}.$$

Quello che si dice della Fx potendo applicarsi a φx, troveremo per la differenziale dell'ordine r della frazione proposta, un risultamento di questa forma,

$$\frac{\frac{d.^rFx}{dx^r}}{\frac{d.^r\varphi x}{dx^r}} = \frac{X(x-a)^m + X'(x-a)^{m-1} + \ldots + m(m-1)\ldots P(x-a)^{m-r}}{Z(x-a)^n + Z'(x-a)^{n-1} + \ldots + n(n-1)\ldots Q(x-a)^{n-r}} \ldots (69).$$

87. Premesso ciò, consideriamo tre casi

1° $m=n$; 2° $m>n$; 3.° $m<n$.

Se $m=n$, e che il numero r delle differenziazioni effettuate sia eguale ad m, i binomi $(x-a)^{m-r}$ e $(x-a)^{n-r}$ si riducono ciascuno a $(x-a)^0$, cioè all'unità, riguardo agli altri binomi $(x-a)^m$, $(x-a)^{m-1}$, ec., $(x-a)^n$, $(x-a)^{n-1}$, ec., essi sono nulli nell'ipotesi di $x=a$: così tutti i termini, fuori l'ultimo del numeratore e l'ultimo del denominatore, spariscono, e l'equazione (69) diventa

$$\frac{\frac{d^m.Fx}{dx^m}}{\frac{d^m.\varphi x}{dx^m}} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots P}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots P} = \frac{P}{Q} = \frac{Fx}{\varphi x}.$$

Nel secondo caso, che è quello in cui abbiamo $m>n$, se il numero r delle differenziazioni effettuate è eguale ad n, il binomio $(x-a)^{n-r}$ si riduce all'unità, perchè il suo esponente $n-r$ è nullo. Gli esponenti $n-1$, $n-2$, ec., $m-1$, $m-2$, ec., degli altri binomi, essendo maggiori di $n-r$ sono positivi; per conseguenza, questi binomi si riducono ciascuno a zero quando si fa $x=a$; tutti i termini spariscono perciò in quest'ipotesi, fuori di quello in cui entra $(x-a)^{n-r}$, e l'equazione (69) si riduce a

$$\frac{\frac{d^n.Fx}{dx^n}}{\frac{d^n.\varphi x}{dx^n}}=\frac{0.}{n(n-1)\ldots\ldots Q(x-a)^{n-r}}=\frac{.\ 0}{n(n-1)\ldots\ldots Q}=0.$$

Questo valore è perciò un indizio che si ha $m>n$, caso in cui l'equazione (68) si riduce a zero. Finalmente se si ha $m<n$, il numero r delle differenziazioni eseguite, essendo preso eguale ad m, tutti i termini spariscono, fuori del termine $m(m-1)\ldots P(x-a)^0$, e rimane

$$\frac{\frac{d^m.Fx}{dx^m}}{\frac{d^m.\varphi x}{dx^m}}=\frac{m(m-1)\ldots\ldots P}{0}=\infty:$$

questo valore annunzia dunque che n supera m, caso in cui il secondo membro dell'equazione (68) è infinito.

88. Da ciò che precede, risulta questa regola; *Quando vogliamo determinare il vero valore di una frazione* $\frac{Fx}{\varphi x}$, *che diventa* $\frac{0}{0}$ *per un valore dato alla variabile, si differenzierà separatamente i due termini di questa frazione, e quindi si esaminerà se i risultamenti* $\frac{d.Fx}{dx}$ *e* $\frac{d.\varphi x}{dx}$ *si riducono ancora a zero, per il valore ipotetico della variabile, se ciò segue, si prenderanno i coefficienti differenziali dell'espressioni* $\frac{d.Fx}{dx}$ *e* $\frac{d.\varphi x}{dx}$ *e si vedrà se, nella medesima ipotesi della variabile questi coefficienti differenziali si riducono ciascuno a zero, continuando così questa verificazione, se si trova, dopo un dato numero di differenziazioni, che i due termini della funzione non si annullano col valore dato alla variabile, quest'ultima frazione sarà il vero valore di* $\frac{Fx}{\varphi x}$; *ma se il numeratore solamente diventa zero pel valore di* x, *l'espressione* $\frac{Fx}{\varphi x}$ *sarà nulla; finalmente se il denominatore solo si annulla pel valore di* x, *l'espressione* $\frac{Fx}{\varphi x}$ *sarà infinita.*

89 Prendiamo per esempio la frazione

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{x^3-b^3}{4(x-b)};$$

questa frazione diventando $\frac{0}{0}$ quando $x=b$, se vogliamo averne il vero valore differenzieremo i suoi due termini, ed otterremo $\frac{3x^2}{4}$; e siccome i due termini di questa frazione non diventano nulli nell'ipotesi di $x=b$, il vero valore della frazione proposta, quando $x=b$, è perciò $\frac{3b^2}{4}$.

90. Prendiamo ancora per esempio la frazione

$$\frac{x^3-3x+2}{x^4-6x^2+8x-3};$$

questa frazione riducesi a $\frac{0}{0}$ quando $x=1$, differenzieremo i suoi due termini per ottenerne il vero valore, e troveremo

$$\frac{3x^2-3}{4x^3-12x+8};$$

i due termini di questa frazione essendo ancora nulli nell'ipotesi di $x=1$, differenzieremo ancora, ed otterremo

$$\frac{6x}{12x^2-12}.$$

Il denominatore solo si riduce a zero quando si fa $x=1$; dunque la frazione proposta, nell'ipotesi di $x=1$, è infinita.

91. Se si applicasse la medesima regola alla frazione

$$\frac{a^x-b^x}{x},$$

che diventa zero, nell'ipotesi di $x=0$, si troverebbe, differenziando i due termini di questa frazione,

$$\frac{a^x \log a - b^x \log b}{1},$$

espressione il di cui denominatore non diventa nullo quando $x=0$, e che per conseguenza, dà $\log a - \log b$ pel valore che prende la frazione proposta quando $x=0$.

È abbastanza evidente che il fattore comune ai due termini della frazione proposta è $x-0$, cioè x; ma come riconoscere questo fattore in a^x-b^x? per giungervi osserveremo che, pel (o.° 41),

$$a^x = 1 + A\frac{x}{1} + \frac{A^2x^2}{1.2} + \text{ec.},$$

$$b^x = 1 + B\frac{x}{1} + \frac{B^2x^2}{1.2} + \text{ec.};$$

dunque, prendendo la differenza,

$$a^x - b^x = (A-B)x + \frac{(A^2-B^2)}{1 \cdot 2} x^2 + \text{ec.},$$

espressione per mezzo della quale si vede che x è fattore comune di $a^x - b^x$.

92. Non bisogna però credere che la regola che abbiamo stabilita serva per tutti i casi; la dimostrazione precedente è fondata sopra gli esponenti m ed n considerati come numeri interi; ma se essi fossero frazionari, non si potrebbe ottenere, con successive differenziazioni, un termine, in cui $x-a$ si trovasse elevato alla potenza zero; per conseguenza, non si potrebbe, col processo che abbiamo adoprato, spogliare la frazione dal fattore comune.

Si abbia dunque per maggior regolarità, l'espressione

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{P(x-a)^{\alpha} + Q(x-a)^{\beta} + R(x-a)^{\gamma} + \text{ec.} \ldots}{P'(x-a)^{\alpha'} + Q'(x-a)^{\beta'} + R'(x-a)^{\gamma'} + \text{ec.} \ldots}$$

nella quale α, β, γ, ec., sono positivi e crescenti, come pure α', β', γ', ec. ec.

Quest'espressione riducendosi a $\frac{0}{0}$ quando $x=a$, potremo, in luogo di cangiare x in a, cangiare x in $a+h$, riserbandoci a fare $h=0$, dopo aver ridotto; allora l'ipotesi sarà la medesima che se si fosse fatto subito $x=a$, ed avremo

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha} + Qh^{\beta} + Rh^{\gamma} + \text{ec.}}{P'h^{\alpha'} + Q'h^{\beta'} + R'h^{\gamma'} + \text{ec.}} \quad \ldots (70).$$

Considerando α ed α', che sono i più piccoli esponenti in ciascuna di queste serie, possono succedere tre casi:

$$1^\circ\ \alpha > \alpha'; \quad 2^\circ\ \alpha = \alpha'; \quad 3^\circ\ \alpha < \alpha'.$$

Nel primo caso, dividendo per $h^{\alpha'}$ i due termini della frazione (70), si ha

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{Ph^{\alpha-\alpha'} + Qh^{\beta-\alpha'} + Rh^{\gamma-\alpha'} + \text{ec.} \ldots}{P' + Q'h^{\beta'-\alpha'} + R'h^{\gamma'-\alpha'} + \text{ec.} \ldots} \quad \ldots (71);$$

per ipotesi α supera α', per conseguenza il numero $\alpha-\alpha'$ sarà positivo; a più forte ragione $\beta-\alpha'$, $\gamma-\alpha'$, ec. lo sono ancora, poichè α, β, γ, ec. vanno aumentando; $\beta'-\alpha'$, $\beta'-\alpha'$, ec., saranno ancora quantità positive, per la ragione che l'espressioni α', β', γ' ec., andando crescendo, α' è minore di β', di γ', ec. Premesso ciò, se facciamo $h=0$, tutti i termini del secondo membro dell'equazione (71) si distruggono, eccettuato P'; dunque quest'equazione si riduce allora a

$$\frac{Fx}{\varphi x} = \frac{0}{P'} = 0.$$

Nel secondo caso, in cui $\alpha=\alpha'$, il termine $Ph^{\alpha-\alpha'}$ si riduce a $Ph^0 = P$;

dunque dall'ispezione dell'equazione (71), si vede che quando $x=a$, $\frac{Fx}{\varphi x}$ si riduce a $\frac{P}{P'}$.

Finalmente, nel terzo caso, in cui abbiamo $\alpha<\alpha'$, dividendo per h^{α} si scriverà così l'equazione (70):

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{P+Qh^{\beta-\alpha}+Rh^{\gamma-\alpha}+\text{ec.}}{P'h^{\alpha'-\alpha}+Q'h^{\beta'-\alpha}+R'h^{\gamma'-\alpha}+\text{ec.}}\ldots(72),$$

e si vede che l'ipotesi di $h=0$ riduce quest'equazione a

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{P}{0}=\infty.$$

93. Prendiamo per esempio la frazione

$$\frac{(x^2-3ax+2a^2)^{\frac{2}{3}}}{(x^3-a^3)^{\frac{1}{2}}}$$

la quale, quando $x=a$, si riduce a $\frac{0}{0}$. Se in questa frazione si mette $a+h$ in luogo di x essa diventa

$$\frac{(h^2-ah)^{\frac{2}{3}}}{(3a^2h+3ah^2+h^3)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{2}{3}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}\,h^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(h-a)^{\frac{2}{3}}\,h^{\frac{1}{6}}}{(3a^2+3ah+h^2)^{\frac{1}{2}}};$$

facendo $h=0$, si ottiene

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{0}{(3a^2)^{\frac{1}{2}}}=0.$$

94. Se un valore di x rendesse infiniti i due termini della frazione $\frac{Fx}{\varphi x}$, si dividerebbero questi due termini per $Fx\times\varphi x$. e si avrebbe

$$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{\frac{1}{\varphi x}}{\frac{1}{Fx}}=\frac{0}{0}.$$

95. Finalmente, se si avesse un prodotto MN, nel quale l'ipotesi di $x=0$ rendesse uno dei fattori nullo e l'altro infinito; sia M il fattore che diventa nullo pel valore di x che rende N infinito; questo prodotto si scriverebbe così

$$MN=\frac{M}{\frac{1}{N}};$$

e siccome allora $\frac{1}{N}$ sarebbe 0, l'espressione $\frac{M}{\frac{1}{N}}$ si ridurrebbe a $\frac{0}{0}$

96. Parleremo ora del cambiamento della variabile indipendente.

Allorquando una formula che contiene coefficienti differenziali è data, non possiamo eliminarli che con l'aiuto dell'equazione della curva alla quale vogliamo applicare questa formula; ed è così che, quando si ha la formula

$$\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}{\frac{d^2y}{dx^2}}\cdot\frac{dy}{dx}$$

e che si domanda ciò che essa diventa quando la curva è una parabola, si ricaverà dall'equazione $y=px^2$ della parabola, i valori di $\frac{dy}{dx}$ e di $\frac{d^2y}{dx^2}$, che sostituiremo in questa formula, e allora i coefficienti differenziali spariranno. Se $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ si considerano come incognite, sono in generale necessarie due equazioni per eliminarli da una formula, e queste due equazioni le avremo differenziando due volte di seguito l'equazione della curva.

97. Quando per mezzo di operazioni algebriche, le dx hanno cessato di essere sotto le dy, come nella seguente formula,

$$\frac{y(dx^2+dy^2)}{dx^2+dy^2-yd^2y}\quad\ldots\ldots(73),$$

la sostituzione si opera considerando dx, dy e d^2y come incognite; e poichè per eliminare bisogna in generale un simil numero di equazioni, non pare in principio che l'eliminazione possa affettuarsi, perchè la differenziazione dell'equazione della curva non può procurarci che due equazioni fra dx, dy e d^2y; ma bisogna osservare che quando per mezzo di queste due equazioni avremo eliminato dy e d^2y, si troverà nella formula un fattore comune dx^2 il quale sparirà.

Per esempio, se la curva è sempre una parabola rappresentata da $y=px^2$, differenziando due volte di seguito quest'equazione, otterremo

$$dy=2pxdx,\quad d^2y=2pdx^2;$$

questi valori essendo sostituiti nella formula (73), otterremo, dopo aver soppresso il fattore comune dx^2,

$$\frac{y(1+4p^2x^2)}{1+4p^2x^2-2py}.$$

98. La ragione per la quale dx^2 diventa fattore comune è facile a comprendersi; poichè quando in una formula che primieramente conteneva $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{dy}{dx}$ si è fatto sparire il denominatore di $\frac{d^2y}{dx^2}$, tutti i termini fuori di quelli in

$\frac{d^2y}{dx^2}$ e in $\frac{dy}{dx}$, hanno dovuto acquistare il fattore comune dx^2; allora i termini che erano affetti da $\frac{d^2y}{dx^2}$ non contengono più dx, nel mentre che i termini che erano affetti da $\frac{dy}{dx}$ contengono dx al primo grado, poichè il prodotto di $\frac{dy}{dx}$ per dx^2 si riduce a $dydx$. Allorchè in seguito si differenzia l'equazione della curva, e che si ottengono risultamenti della forma $dy = Mdx$, $d^2y = Ndx^2$, questi valori essendo sostituiti nei termini in d^2y e in $dydx$, gli cangeranno, come gli altri termini, in prodotti di dx^2.

99. Quello che si dice di una formula che contiene le differenziali dei due primi ordini potendo applicarsi a quelle, nelle quali queste differenziali si elevano ad ordini superiori, segue da ciò che differenziando tante volte quante sarà necessario l'equazione della curva, potremo sempre mandar via dalla formula proposta le differenziali che vi sono contenute.

100. Non seguirebbe il medesimo se, oltre le differenziali che abbiamo considerato, la formula contenesse termini in d^2x, in d^3x, ec.; poichè supponiamo che entrassero in questa formula le seguenti differenziali dx, dy, d^2x, d^2y, e che differenziando due volte di seguito l'equazione rappresentata da $y = fx$, se ne dedueessero queste equazioni:

$$F(x, y, dy, dx) = 0, \qquad F(x, y, dx, dy, d^2x, d^2y) = 0,$$

non si potrebbero, con queste due equazioni, eliminare che due delle tre differenziali dy, d^2x, d^2y, e si vede che sarebbe impossibile di fare sparire tutte le differenziali dalla formula; vi è perciò in questo caso, una condizione tacita espressa dalla differenziale d^2x; questa è che la variabile x è essa medesima considerata come una funzione di una terza variabile, che non comparisce nella formula, e che si chiama la *variabile indipendente*. Ciò diventerà manifesto, se facciamo attenzione che l'equazione $y = fx$ potrebbe derivare dal sistema di due equazioni

$$x = Ft, \quad y = \varphi t,$$

fra le quali si sarebbe eliminato t; ed è mediante ciò che l'equazione

$$y = \frac{a(x-c)^2}{b^2}$$

equivale al sistema delle due equazioni

$$x = bt + c, \qquad y = at^2,$$

e si concepisce che x ed y debbono variare in virtù dell'accrescimento che t può ricevere. Ma quest'ipotesi, che x ed y variano per l'accrescimento dato a t, suppone che vi siano delle relazioni fra x e t, e fra y e t; una di queste relazioni è arbitraria, poichè l'equazione, che in generale rappresentiamo per $y = fx$, essendo per esempio, $y = \frac{a(x-c)^2}{b^2}$, se si stabilisce fra x e t la relazione arbitraria $x = \frac{t^3}{c^4}$, questo valore essendo messo nell'equazione $y = a\frac{(x-c)^2}{b^2}$,

la cangerà in $y=\frac{a(t^3-c^3)}{b^2c^4}$, equazione, che essendo combinata con $x=\frac{t^3}{c^2}$, deve riprodurre per mezzo dell' eliminazione, $y=\frac{a(x-c)^2}{b^2}$, sola condizione alla quale dobbiamo avere riguardo nella scelta della variabile t.

101. Possiamo dunque determinare arbitrariamente la variabile indipendente t. Per esempio si prenderà la corda, l'arco, l'ascissa o l'ordinata per variabile indipendente; se t rappresenta l'arco della curva, bisogna che si abbia $dt=\sqrt{dx^2+dy^2}$; se t rappresenta la corda, e che l'origine sia al vertice della curva, avremo $t=\sqrt{x^2+y^2}$; finalmente t potrebbe essere l'ascissa o l'ordinata, e si avrebbe allora $t=x$, o $t=y$.

102. La scelta di una di queste ipotesi o di qualunque altra diventa indispensabile, perchè la formula che contiene differenziali possa esserne liberata; se sempre non adopriamo questo sistema, ciò dipende perchè tacitamente supponiamo che la variabile indipendente sia stata determinata. Per esempio, nel caso il più ordinario in cui una formula non contenga che le differenziali dx, dy, d^2y, d^3y, ec., l'ipotesi è che la variabile indipendente t sia stata presa per l'ascissa, poichè allora ne resulta

$$t=x,\quad \frac{dx}{dt}=1,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^3x}{dt^3}=0,\ \text{ec.};$$

e si vede che la formula non deve contenere differenziali seconde, terze, ec., di x.

103. Per stabilire la formula in tutta la sua generalità, bisogna, da quello che precede, che x ed y siano funzioni di una terza variabile indipendente t; e che si abbia n.° 29.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\,\frac{dx}{dt};$$

si ricava da quest' equazione

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ \ldots\ (74);$$

prendendo la differenziale seconda di y, e operando sul secondo membro come si fa per le frazioni, n.° 19, si troverà

$$\frac{d^2y}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\,\frac{d^2y}{dt}-\frac{dy}{dt}\,\frac{d^2x}{dt}}{\frac{dx^2}{dt^2}}.$$

In quest' espressione, dt ha due usi: uno è d'indicare qual è la variabile indipendente t, e l'altro d'entrarvi come segno d'algebra. Possiamo non considerare dt che sotto il secondo rapporto, se non perdiamo di vista che t è la varia-

Digitized by Google

bile indipendente; allora sopprimendo dt^2 come fattore comune, l'espressione precedente si renderà più semplice scrivendo

$$\frac{d^2y}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^2};$$

e dividendo per dx, essa diventerà

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}$$

104. Operando egualmente sopra l'equazione (74), vediamo che prendendo t per variabile indipendente, il secondo membro dell'equazione diventa identico al primo; per conseguenza, quando si prende t per variabile indipendente, non dobbiamo fare che un solo cangiamento nella formula che contiene i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, ed è di sostituire questo secondo coefficiente differenziale in

$$\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}.$$

Per applicare queste considerazioni al raggio di curvatura che, (*Vedi* Curvatura raggio), è dato dall'equazione

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

se vogliamo avere il valore di γ, nel caso in cui t sarebbe la variabile indipendente, si cangerà quest'equazione in

$$\gamma = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dxd^2y - dyd^2x}{dx^3}}$$

osservando che il numeratore equivale a $\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx^3}$, si avrà

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y - dyd^2x} \quad \ldots\ldots (75).$$

105. Questo valore di γ suppone perciò che x e y siano funzioni di una terza variabile indipendente; ma se x doveva essere questa variabile, vale a dire se si aveva $t = x$, si avrebbe $d^2x = 0$, e questa formula ricaderebbe nel caso ordinario ritornando

$$\gamma = \frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y} = \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Digitized by Google

106. Ma se, in luogo di prendere x per la variabile indipendente, si volesse che l'ordinata fosse questa variabile indipendente, questa condizione sarebbe espressa dall'equazione $y=t$; e differenziando due volte di seguito quest'equazione, si avrebbe

$$\frac{dy}{dt}=1, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

La prima di quest'equazioni dice solamente che y è la variabile indipendente, il che non cangerà niente nella formula; ma la seconda mostra che d^2y dev'essere nullo, e allora l'equazione (75) si riduce a

$$\gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x}.$$

107. Conviene osservare che quando x è la variabile indipendente, e che si ha per conseguenza $d^2x=0$, quest'equazione dice che dx è costante, donde segue che in generale la variabile che si considera come indipendente, ha sempre una differenziale costante.

108. Finalmente se prendiamo l'arco per variabile indipendente, si avrà

$$dt=\sqrt{dx^2+dy^2};$$

elevando al quadrato e dividendo per dt^2, quest'equazione ci darà

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}=1;$$

differenziando quest'equazione, considereremo, n.° 107, dt come costante, poichè t è la variabile indipendente; e operando con la regola degli esponenti, troveremo

$$\frac{2dxd^2x}{dt^2}+\frac{2dyd^2y}{dt^2}=0;$$

donde si deduce

$$dxd^2x=-dyd^2y;$$

per conseguenza, se si sostituisce il valore di d^2x o quello di d^2y nell'equazione (75), avremo nel primo caso

$$\gamma=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2y}dx=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2y}dx;$$

e nel secondo caso,

$$\gamma=-\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(dx^2+dy^2)d^2x}dy=-\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}dy.$$

109. In quello che precede, non abbiamo considerato che i due coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$; ma se la formula dovesse contenere coefficienti differenziali d'ordini più elevati, bisognerebbe con mezzi analoghi a quelli che abbiamo impiegato, determinare i valori di $\frac{d^3y}{dx^3}$ di $\frac{d^4y}{dx^4}$, ec. i quali si riferirebbero al caso in cui x ed y sono funzioni di una terza variabile indipendente.

110. Esaminiamo il caso in cui la formula del Taylor è difettosa. In generale quando in una funzione di x si pone $x+h$ invece di x, la forma della funzione rimane la medesima, poichè $x+h$ entra per tutto dove esisteva x; così quando fx contiene un radicale, $f(x+h)$ deve ancora contenerlo: per esempio, se si ha

$$fx = bx^2 + \frac{a}{\sqrt{x}},$$

il medesimo radicale si troverà nell'espressione

$$f(x+h) = b(x+h)^2 + \frac{a}{\sqrt{(x+h)}}.$$

Non seguirebbe sempre il medesimo però, se si assegnasse il valore dell'ascissa x per uno dei punti della curva. Per esempio, nel caso in cui fx contenesse un termine come $\sqrt[3]{x-a}$, se diamo ad x il valore a, si vede che il radicale cubico $\sqrt[3]{x-a}$ sparisce in fx, nel mentre che il radicale cubico $\sqrt[3]{x+h-a}$, che dovrebbe entrare in $f(x+h)$, lungi dallo scomparire, si riduce allora a $\sqrt[3]{h}$. In una simile circostanza, $f(x+h)$ non può svilupparsi secondo le potenze di h, il che si manifesta per mezzo dei valori infiniti che prendono i coefficenti differenziali; ed è in questa guisa che l'equazione $y = \sqrt[3]{x-a}$ ci dà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}},$$

dalla quale si vede che $x=a$ rende questo coefficiente differenziale infinito.

111. Perchè si cada in questa guisa sopra quantità infinite, basta che la $f(a+h)$ essendo ordinata rapporto alle potenze di h, contenga fra queste potenze un esponente frazionario $n+\frac{1}{z}$ compreso fra i numeri interi n e $n+1$; infatti, in quest'ipotesi avremo

$$f(a+h) = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 \ldots + Mh^n + Nh^{n+\frac{1}{z}}$$
$$+ Ph^{n+1} + Qh^{n+2} + Rh^{n+3} + \text{ec.} \ldots\ldots\ldots (76).$$

sviluppo nel quale un termine che mancasse sarebbe considerato avere zero per coefficiente. Premesso ciò, considerando a come variabile troveremo, numeri 58 e 59.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{df(a+h)}{dh} = \dfrac{df(a+h)}{da}, \\[2ex] \dfrac{d^2f(a+h)}{dh^2} = \dfrac{d^2f(a+h)}{da^2} \\[2ex] \text{ec.} \qquad\qquad \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (77).$$

Differenziamo successivamente rapporto ad h, l'equazione (76), e rappresen-

tiamo per abbreviare, con M', N', P' Q' R' ec., con M'', N'', P'', Q'', R'', ec., ciò che diventano i coefficienti M, N, P, Q, R, ec., avremo

$$\frac{df(a+h)}{dh} = B+2Ch+3Dh^2 \ldots\ldots + M'h^{n-1} + N'h^{\frac{1}{z}+n-1}$$
$$+P'h^n+Q'h^{n+1}+R'h^{n+2}+ \text{ec.},$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{dh^2} = 2C+2.3Dh \ldots\ldots + M''h^{n-2} + N''h^{\frac{1}{z}+n-2}$$
$$+P''h^{n-1}+Q''h^n+R''h^{n+1}+ \text{ec.}$$
ec. ec. ec. ec.

Sostituendo ai primi membri di quest'equazioni, i valori ricavati dall' equazioni (77), otterremo

$$\frac{df(a+h)}{da} = B+2Ch+3Dh^2 \ldots + M'h^{n-1} + N'h^{\frac{1}{z}+n-1}$$
$$+P'h^n+Q'h^{n+1}+R'h^{n+2}+ \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots (78),$$

$$\frac{d^2f(a+h)}{da^2} = 2C+2.3Dh \ldots\ldots + M''h^{n-2} + N''h^{\frac{1}{z}+n-2}$$
$$+P''h^{n-1}+Q''h^n+R''h^{n+1}+ \text{ec.} \ldots\ldots\ldots\ldots (79)$$
ec. ec. ec. ec.

facendo $h=0$, nell'equazioni (76), (78) e (79), avremo per determinare i coefficienti A, B, C, ec. dell' equazione (76),

$$fa = A, \quad \frac{dfa}{da} = B, \quad \frac{d^2fa}{da^2} = 2C, \text{ ec.}$$

Premesso ciò, dall' ispezione dell' equazioni (78) e (79), si vede che a ciascuna differenziazione diminuendo n di un' unità, allorquando saremo giunti all' n^{sima}, gli asponenti dei termini in h^n, in $h^{n+\frac{1}{z}}$, in h^{n+1}, in h^{n+2}, avranno per valori $n-n$, $n-n+\frac{1}{z}$, $n-n+1$, $n-n+2$, ec.

Dimodochè rappresentando i coefficenti corrispondenti con $M_{,}$, con $N_{,}$, ec. otterremo

$$\frac{d^nf(a+h)}{da^n} = M_{,}+N_{,}h^{\frac{1}{z}}+P_{,}h+Q_{,}h^2+R_{,}h^3+ \text{ec.} \ldots (80),$$

e alla seguente differenziazione, troveremo

$$\frac{d^{n+1}f(a+h)}{da^{n+1}} = N_{,,}h^{\frac{1}{z}-1}+P_{,,}h^0+Q_{,,}h+R_{,,}h^2+ \text{ec.} \ldots (81);$$

e siccome $\frac{1}{z}$ è minore dell'unità, l' esponente $\frac{1}{z}-1$ del primo termine di questo sviluppo potrà scriversi così: $-\left(1-\frac{1}{z}\right)$. Allora, facendo passare h al denominatore nel primo termine del secondo membro, l' equazione (81) diventerà

$$\frac{d^{(n+1)}f(a+h)}{da^{n+1}}=\frac{N_{,,}}{h^{1-\frac{1}{z}}}+P_{,,}+Q_{,,}h+R_{,,}h^2+\text{ec.}\ldots(82).$$

Ora, se facciamo $h=0$, nell' equazione (80), si vede che tutti i termini in h spariscono ancora, il che permette di determinare $M_{,,}$, donde dipende il coefficiente M del termine Mh^n dall' equazione (76). Non segue il medesimo se si fa $h=0$ nell' equazione 82; poichè allora il primo riducendosi a $\frac{N_{,,}}{0}$ rende il valore di $\frac{d^{n+1}f(a)}{da^{n+1}}$ infinito.

Seguirebbe il medesimo se si prendessero i coefficienti differenziali degli ordini seguenti, perchè tutte le differenziali successive di un termine della forma $\frac{N}{h^n}$ contengono h al denominatore.

Risulta da questo teorema, che *allorquando si fa* $x=a$, *nello sviluppo di* $f(x+h)$, *se esiste una potenza frazionaria di* h *in questo sviluppo e che essa sia compresa fra i termini affetti da* h^n *e* h^{n+1}, *non potremo determinare i termini della serie del Taylor, che fino all' ordine* n *inclusivamente: tutti gli altri termini diventeranno infiniti.*

112. Una funzione di x rappresentata da fx essendo data, se vogliamo determinare lo sviluppo di $f(x+h)$, nell' ipotesi di $x=a$, bisognerà, come sappiamo, calcolare i termini della serie

$$fx+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\text{ec.};$$

ma se facendo questo calcolo si trova che uno dei coefficienti differenziali diventi infinito nell' ipotesi di $x=a$, non cercheremo più lo sviluppo di $f(x+h)$ per mezzo della serie del Taylor; ma invece ecco il processo che adopreremo. *Si metterà* x+h *invece di* x *in* fx; *allora il termine che contiene* x—a *al denominatore conterrà* x—a+h, *e non diventerà più infinito quando ci faremo* x=a, *ma darà luogo ad un termine affetto da una potenza frazionaria di* h.

113. Sia per esempio

$$fx=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2};$$

differenziando, si trova

$$\frac{dy}{dx}=2(n-x)+\frac{nx}{\sqrt{x^2-a^2}};$$

sostituendo questi valori e quelli di $\frac{d^2y}{dx^2}$, di $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec., nelle formule del Taylor (equazione 38 pagina 443), si ottiene.

$$f(x+h)=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2}+\left[2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}}\right]h+\text{ec.}$$

Ora, quando $x=a$ il termine moltiplicato da h diventa infinito; dunque questo sviluppo non è più possibile.

In questo caso, per la precedente regola, si metterà $x+h$ in luogo di x nell'equazione

$$fx=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2},$$

e si troverà

$$f(x+h)=2ax+2ah-x^2-2xh-h^2+a\sqrt{x^2+2xh+h^2-a^2},$$

equazione che nell'ipotesi di $x=a$, diventa

$$f(a+h)=a^2-h^2+a\sqrt{2ah+h^2},$$

ovvero

$$f(a+h)=a^2-h^2+a\sqrt{h}\sqrt{2a+h};$$

sviluppando per mezzo della formula del binomio, e rappresentando, per abbreviare, con A, B, C, ec., i coefficienti che dà questa formula, si ha

$$\sqrt{2a+h}=(2a+h)^{\frac{1}{2}}=\text{A}+\text{B}h+\text{C}h^2+\text{D}h^3+\text{ec.};$$

sostituendo, si trova

$$f(a+h)=a^2-h^2+a\text{A}\sqrt{h}+a\text{B}h\sqrt{h}+a\text{C}h^2\sqrt{h}+\text{ec.}$$

Da quest'esempio, si vede, che mettendo $x+h$ nella funzione, e facendo $x=a$, possiamo introdurre una o più potenze frazionarie di h; si sviluppa quindi separatamente i termini che sono capaci di esserlo, o con la formula del binomio, o con altro mezzo; e si sostituisce questi termini nel valore di $f(x+h)$, il che ne dà lo sviluppo.

114. Allorquando x rimane indeterminato, il Lagrange ha dimostrato che questo sviluppo di $f(x+h)$ non poteva contenere termini affetti da una potenza frazionaria di h. Infatti, supponiamo che si avesse

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2\ldots\ldots+\text{K}\sqrt[3]{h};$$

siccome, dalla teoria dell'equazioni si sa che $\text{K}\sqrt[3]{h}$ è capace di tre valori, M, N, P, avremo questi tre sviluppi di $f(x+h)$

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+\ldots\ldots+\text{M},$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+\ldots\ldots+\text{N},$$
$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+\ldots\ldots+\text{P}.$$

Ora, fx dovendo contenere i medesimi radicali di $f(x+h)$, (n.° 110, bisognerebbe che fx avesse ancora tre valori differenti, Q, R, S; sostituendo successivamente questi valori in luogo di fx, si troverebbe dunque

$$f(x+h)=\mathrm{Q}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{M},$$
$$f(x+h)=\mathrm{Q}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{N},$$
$$f(x+h)=\mathrm{Q}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{P},$$
$$f(x+h)=\mathrm{R}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{M},$$
$$f(x+h)=\mathrm{R}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{N},$$
$$f(x+h)=\mathrm{R}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{P},$$
$$f(x+h)=\mathrm{S}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{M},$$
$$f(x+h)=\mathrm{S}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{N},$$
$$f(x+h)=\mathrm{S}+ph+qh^2 \ldots\ldots+\mathrm{P};$$

dimodochè l'espressione $f(x+h)$, essendo sviluppata, avrebbe nove valori differenti, nel mentre che non sviluppata, essa non potrebbe averne che tanti quanti ne comporta fx, e per conseguenza tre nell'ipotesi attuale; così non si può supporre che lo sviluppo di $f(x+h)$ contenga una potenza frazionaria di h, senza cadere in una contradizione.

115. Infatti, è certo che $f(x+h)$ non può ammettere nel suo sviluppo, un termine affetto da una potenza negativa di h; mentre se esso contenesse un termine come $\mathrm{M}h^{-n}$, si avrebbe

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2 \ldots\ldots+\frac{\mathrm{M}}{h^n}.$$

Ora facendo $h=0$, il primo membro si cangerebbe in fx, e il secondo in luogo di ridursi a fx, diventerebbe infinito, a motivo del termine $\frac{\mathrm{M}}{h^n}$ che esso contiene.

Seguirebbe il medesimo se lo sviluppo contenesse un termine affetto dal logaritmo di h; mentre se si avesse, per esempio, un termine come $\mathrm{A}\log h$, questo termine, allorquando si farebbe $h=0$, diventerebbe $\mathrm{A}\log 0$; ora il logaritmo di zero essendo l'infinito negativo, il termine $\mathrm{A}\log h$ sarebbe allora infinito; donde segue che fx dovrebbe esserlo ancora; il che è contro l'ipotesi.

Date le regole principali che il calcolo differenziale comporta fino a questo punto, per mezzo dei limiti, esporremo ora le medesime regole, almeno le più essenziali, per mezzo degl' infinitesimi.

116. Tutto ciò che abbiamo detto sopra le differenze finite può applicarsi senza difficoltà alle differenziali. Per esempio la *differenza* di un prodotto di due variabili semplici x ed y essendo (*Vedi* Calcolo delle Differenze finite n.° 15)

$$\Delta(x.y)=x\Delta y+\Delta x.\Delta y+y\Delta x,$$

se prendiamo le differenze infinitamente piccole, quest' espressione diventa

$$d(x.y)=xdy+dx.dy+ydx,$$

ovvero semplicemente

$$d(x.y)=xdy+ydx,$$

sottraendo $dx.dy$ che è una quantità *infinitamente piccola* del secondo ordine e che non ha, per conseguenza, alcun valore paragonata con quelle del primo xdy e ydx.

117. La legge fondamentale (*Vedi* Calcolo delle Differenze finite n.° 15) quando si cangia l'accrescimento i in dx si riduce a

$$d^n(Fx.fx)=Fx.d^nfx+n.dFx.d^{n-1}fx$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}d^2Fx.d^{n-2}fx$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.d^3Fx.d^{n-3}fx$$

$$+\text{ ec.} \qquad \text{ec.} \ldots (A),$$

trascurando le quantità che si distruggono. Questa legge però, come il binomio del Newton, col quale essa ha una grande analogia, può trasformarsi nello sviluppo di tre o di un numero qualunque di fattori.

118. Esponiamo ora la deduzione delle differenziali delle funzioni elementari. Sia in primo luogo $(\varphi x)^m$ la funzione che si tratta di differenziare.

Se m è un numero intero qualunque, facciamo $m=p+q$, p e q essendo egualmente numeri interi, ed avremo

$$(\varphi x)^m=(\varphi x)^{p+q}=(\varphi x)^p(\varphi x)^q.$$

Ma per la legge precedente

$$d[(\varphi x)^p.(\varphi x)^q]=(\varphi x)^p d(\varphi x)^q+(\varphi x)^q.d(\varphi x)^p.$$

Così facendo $p=1$ e successivamente $q=1, 2, 3, 4$, ec. $m-1$, si ha

$$d(\varphi x)^2=2\varphi x.d\varphi x,$$
$$d(\varphi x)^3=3(\varphi x)^2.d\varphi x,$$
$$d(\varphi x)^4=4(\varphi x)^3.d\varphi x,$$
$$\text{ec.} \qquad \text{ec.},$$

e generalmente

$$d(\varphi x)^m=m(\varphi x)^{m-1}d\varphi x \ldots (B).$$

Se m è un numero frazionario, rappresentandolo con $\frac{p}{q}$ potremo considerare

$(\varphi x)^{\frac{p}{q}}$ come una funzione incognita ψx della variabile x, e fare

$$(\varphi x)^{\frac{p}{q}}=\psi x \ldots (1),$$

donde

$$(\varphi x)^p=(\psi x)^q \ldots (2)$$

e

$$d[(\varphi x)^p]=d[(\psi x)^q] \ldots (3).$$

Così, p e q essendo numeri interi, si ha

$$d[(\varphi x)^p]=p(\varphi x)^{p-1}.d\varphi x,$$
$$d[(\psi x)^q]=q(\psi x)^{q-1}.d\psi x$$

e per conseguenza

$$p(\varphi x)^{p-1}.d_1x=q(\psi x)^{q-1}.d\psi x,$$

si ricava da quest' eguaglianza

$$d\psi x = \frac{p}{q} \cdot \frac{(\varphi x)^{p-1}}{(\psi x)^{q-1}} d\varphi x \ldots\ldots (4).$$

Ma dall' eguaglianza (1)

$$d(\psi x) = d\left[(\varphi x)^{\frac{p}{q}}\right]$$

e

$$(\psi x)^{q-1} = \left\{(\psi x)^{\frac{p}{q}}\right\}^{q-1} = (\varphi x)^{\frac{pq-p}{q}},$$

sostituendo nella (4), si ha

$$d\left\{(\varphi x)^{\frac{q}{q}}\right\} = \frac{p}{q} \cdot \frac{(\varphi x)^{p-1}}{(\varphi x)^{\frac{pq-p}{q}}} d\varphi x$$

$$= \frac{p}{p} \cdot (\varphi x)^{\frac{p}{q}-1} \cdot d\varphi x.$$

Così l' espressione (B) ha luogo quando m è un numero positivo, intero o frazionario. Quando m è un numero negativo, intero o frazionario, possiamo fare

$$(\varphi x)^{-m} = fx$$

donde

$$\frac{1}{(\varphi x)^m} = fx$$

e quindi

$$1 = (\varphi x)^m . fx.$$

Avremo dunque ancora, a motivo di $d1 = 0$, poichè 1 è una quantità costante

$$0 = d[(\varphi x)^m . fx],$$

e per la legge (A)

$$0 = d(\varphi x)^m . fx + (\varphi x)^m . dfx,$$

vale a dire

$$m(\varphi x)^{m-1} . d(\varphi x) . fx = -\varphi x^m . dfx,$$

donde

$$dfx = -m \frac{(\varphi x)^{m-1}}{(\varphi x)^m} . d\varphi x . fx$$

$$= -m(\varphi x)^{-1} . d\varphi x . fx;$$

ma

$$dfx = d[(\varphi x)^{-m}] \quad e \quad fx = (\varphi x)^{-m},$$

dunque, sostituendo questi valori nell' ultima eguaglianza, si ottiene definitivamente

$$d(\varphi x)^{-m} = -m(\varphi x)^{-m-1} . d\varphi x,$$

l'espressione (B) si trova così dimostrata per tutti i valori interi e frazionari positivi e negativi dell'esponente m.

Sarebbe facile, adoprando un processo simile a quello del quale ci siamo serviti all'articolo Angolo, N.° 16, di estendere questa dimostrazione al caso dell'esponente irrazionale.

119. Con facilità presentemente si può trovare la differenziale di un'espressione frazionaria come $\frac{\varphi x}{fx}$, mentre si ha

$$\frac{\varphi x}{fx} = \varphi x . (fx)^{-1}$$

e per conseguenza

$$d\left\{\frac{\varphi x}{fx}\right\} = \varphi x . d(fx)^{-1} + (fx)^{-1} . d\varphi x$$

$$= -1 . \varphi x . d(fx)^{-2} . dfx + (fx)^{-1} d\varphi x$$

$$= -\frac{\varphi x . dfx}{(fx)^2} + \frac{d\varphi x}{fx}$$

$$= \frac{fx . d\varphi x - \varphi x . dfx}{(fx)^2}.$$

120. Sostituendo, in quest' espressioni generali, delle funzioni determinate di x, possiamo con facilità trovare le differenziali di queste funzioni. Questo è ciò che i seguenti esempi renderanno più chiaro.

Sia

$$\varphi x = (A + x^2)^m \quad e \quad m = \frac{1}{2},$$

si ha

$$d(A+x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}(A+x^2)^{\frac{1}{2}-1} . d(A+x^2),$$

ora

$$d(A+x^2) = dA + d . x^2 = 0 + 2xdx,$$

dunque

$$d(A+x^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} . (A+x^2)^{-\frac{1}{2}} 2xdx$$

$$= \frac{xdx}{\sqrt{(A+x^2)}}.$$

Si troverebbe nella medesima maniera

$$d\left\{\sqrt[m]{\left[a^n + x^p\right]}\right\} = \frac{px^{p-1} . dx}{m\sqrt[m]{\left[a^n + x^p\right]}^{m-1}},$$

a motivo di $1 - m = -(m-1)$.

Sia ora

$$(\varphi x)^m = (a + bx^n)^m,$$

si avrà

$$d(a+bx^n)^m = m(a+bx^n)^{m-1} \cdot d(a+bx^n)$$
$$= m(a+bx^n)^{m-1} \cdot nbx^{n-1}dx$$
$$= mnbx^{n-1} \cdot (a+bx^n)^{m-1} \cdot dx.$$

Prendiamo per ultimo esempio

$$(\varphi x)^m = \left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^m.$$

Avremo in primo luogo

$$d\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^m =$$
$$= m\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^{m-1} \cdot d\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right].$$

Ma

$$d\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right] = d\sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}$$
$$= \frac{1}{n}\left(b - \frac{c}{x^p}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\left(b - \frac{c}{x^p}\right)$$

e; di più

$$d\left(b - \frac{c}{x^p}\right) = -d\left(\frac{c}{x^p}\right) = -dcx^{-p}$$
$$= +pcx^{-p-1} \cdot dx = \frac{pcdx}{x^{p+1}},$$

dunque sostituendo

$$d\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^m = \frac{m\left[a + \sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^{m-1}}{n\left[\sqrt[n]{\left(b - \frac{c}{x^p}\right)}\right]^{n-1} \cdot x^{p+1}} \cdot pcdx.$$

121. L'espressione teorica del logaritmo di un numero x, dipendente dalla base a, essendo

$$\log x = \infty\left(x^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) \cdot \frac{1}{La},$$

nella quale ∞ rappresenta un numero infinitamente grande e La il logaritmo naturale della base a (*Vedi* Logaritmi), la differenziale per quello che precede, è

$$d\log x = d\left[\infty\left(x^{\frac{1}{\infty}} - 1\right) \cdot \frac{1}{La}\right]$$

ossia

$$d \log x = \frac{\infty}{La} . d\left(x^{\frac{1}{\infty}}\right) = \frac{\infty}{La} . \frac{1}{\infty} . x^{\frac{1}{\infty}-1} dx$$

$$= \frac{dx}{La . x},$$

a motivo di $x^{\frac{1}{\infty}-1} = x^{-1}$.

Se si trattasse di un logaritmo naturale, si avrebbe $La = 1$, e

$$dLx = \frac{dx}{x}.$$

Si avrebbe egualmente, in generale

$$d \log \varphi x = \frac{d\varphi x}{La . \varphi x}.$$

122. Quest' ultima differenziale ci dà il mezzo di ottenere facilmente quella della funzione esponenziale $a^{\varphi x}$. Infatti, facciamo

$$a^{\varphi x} = y,$$

avremo

$$d\left[a^{\varphi x}\right] = dy.$$

Ma prendendo i logaritmi naturali dai due membri della prima eguaglianza, abbiamo

$$\varphi x . La = Ly$$

il che ci dà differenziando

$$La . d\varphi x = dLy = \frac{dy}{y}.$$

Così

$$dy = y . La . d\varphi x,$$

e per conseguenza, sostituendo i valori di dy e di y qui sopra, verrà

$$d\left[a^{\varphi x}\right] = a^{\varphi x} La . d\varphi x.$$

123. Per ottenere le differenziali delle funzioni trigonometriche sen x e cos x, potremmo partire dall'espressioni teoriche di queste funzioni (*Vedi* Seno), ma si presenta un mezzo più semplice di ottenerle immediatamente. Abbiamo generalmente (*Vedi* Calcolo delle Differenze finita n.° 7)

$$d\varphi x = \varphi(x+dx) - \varphi x.$$

Così

$$d \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x+dx) - \operatorname{sen} x,$$

ora

$$\operatorname{sen}(x+dx) = \operatorname{sen} x . \cos dx + \cos x . \operatorname{sen} dx,$$

dunque

$$d \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x . \cos dx + \cos x . \operatorname{sen} dx - \operatorname{sen} x.$$

Digitized by Google

Ora, dx essendo una quantità infinitamente piccola

$$\operatorname{sen} dx = dx \text{ e } \cos dx = 1$$

(*Vedi* Seno), per conseguenza

$$d \operatorname{sen} x = \cos x \,.\, dx.$$

Si troverebbe egualmente

$$d \cos x = -\operatorname{sen} x \,.\, dx.$$

Con l'aiuto delle precedenti differenziali, si possono costruire senza alcuna difficoltà quelle di tutte le funzioni composte, perciò non ci arresteremo punto, e invece parleremo immediatamente delle più importanti applicazioni del calcolo differenziale.

124. Il grande scopo del calcolo delle differenze finite o indefinite, essendo di ottenere la generazione di una funzione qualunque, col mezzo dei suoi accrescimenti, indichiamo con Fx una tale funzione, ed esaminiamo ciò che essa diventa, quando si aumenta successivamente la variabile x di una medesima quantità z. Ora, z essendo considerata come l'accrescimento di x, abbiamo in generale

$$\Delta Fx = F(x+z) - Fx,$$

donde

$$F(x+z) = Fx + \Delta Fx,$$

facendo successivamente in questa relazione generale $x = x+z$, $x = x+2z$, $x = x+3z$, ec, e sostituendo gli uni negli altri i valori che dà questa medesima relazione, otterremo il seguito dell'espressioni

$$F(x+z) = Fx + \Delta Fx$$

$$F(x+2z) = F(x+2z) + \Delta F(x+2z) = Fx + 2\Delta Fx + \Delta^2 Fx$$

$$F(x+3z) = F(x+3z) - \Delta F(x+3z) + Fx + 3\Delta Fx + 3\Delta^2 Fx + \Delta^3 Fx$$

ec. ec. ec.

e in generale

$$F(x+mz) = Fx + m\Delta Fx + \frac{m(m-1)}{1.2}\Delta^2 Fx +$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\Delta^3 Fx + \text{ec.} \ldots\ldots (C),$$

il che può dimostrarsi seguendo il metodo adoprato per la legge del n.° 13. (*Vedi* Calcolo delle Differenze finite).

Ora, y essendo un multiplo esatto di z eguale a mz, si ha $m = \frac{y}{z}$, e sostituendo questo valore nell'equazione (C), si ottiene

$$F(x+y) = Fx + \frac{y}{1} \cdot \frac{\Delta Fx}{z} + \frac{y(y-z)}{1.2} \cdot \frac{\Delta^2 Fx}{z^2}$$

$$+ \frac{y(y-z)(y-z)}{1.2.3} \cdot \frac{\Delta^3 Fx}{z^3} + \text{ec.} \ldots\ldots (D).$$

Ma il numero dei termini di quest'espressione è tanto maggiore, quanto la

quantità z che è un summultiplo di y è minore, allorquando dunque questo accrescimento è infinitamente piccolo, e allora, può sempre considerarsi come un summultiplo esatto di y, il numero dei termini di (D) diventa infinitamente grande. In questo caso le differenze diventano differenziali, z è semplicemente dx, e l'espressione (D) diventa

$$F(x+y)=Fx+\frac{y}{1}\cdot\frac{dFx}{dx}+\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d^2Fx}{dx^2}+$$

$$+\frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3Fx}{dx^3}+\text{ec.}\ldots\ldots\text{(E).}$$

Tale è la generazione della funzione $F(x+y)$. Questo è ciò che si chiama il *teorema del Taylor.*

125. Per applicare questo teorema alla generazione di una funzione determinata si vede facilmente che basta saper trovare le successive differenziali di questa funzione, il che può sempre farsi con le regole date di sopra. Sia infatti $F(x+y)=(x+y)^m$, avremo $Fx=x^m$, e per conseguenza

$$\begin{aligned}
dFx&=d(x^m)=mx^{m-1}dx,\\
d^2Fx&=d^2(x^m)=d[mx^{m-1}dx]=m(m-1)x^{m-2}dx^2,\\
d^3Fx&=d^3(x^m)=d[m(m-1)x^{m-2}dx^2]=\\
&=m(m-1)(m-2)x^{m-3}dx^3\\
\text{ec.}&=\text{ec.}=\text{ec.}
\end{aligned}$$

la quantità dx essendo considerata come costante.

Sostituendo tutti questi valori nel teorema (E), si ottiene

$$(x+y)^m=x^m+mx^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}y^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}y^3+\text{ec.},$$

o la formula del Newton, che con ciò si trova dimostrata per un esponente qualunque m.

126. Se nel teorema (E), si fa $x=0$, si ha, indicando questa circostanza con un punto situato sopra lo x in Fx,

$$F(y)=F\dot{x}+\frac{y}{1}\frac{dF\dot{x}}{dx}+\frac{y^2}{1.2}\cdot\frac{d^2F\dot{x}}{dx^2}+$$

$$+\frac{y^3}{1.2.3}\cdot\frac{d^3F\dot{x}}{dx^3}+\text{ec.}\ldots\ldots$$

cangiando y in x, si ha definitivamente

$$F(x)=F\dot{x}+\frac{x}{1}\frac{dF\dot{x}}{dx}+\frac{x^2}{1.2}\cdot\frac{d^2F\dot{x}}{dx^2}+$$

$$+\frac{x^3}{1.2.3.}\cdot\frac{d^3F\dot{x}}{dx^3}+\text{ec.}\ldots\ldots\ldots\ldots\text{(F)}$$

formula conosciuta sotto il nome di *teorema del Maclaurin*, e della quale è stata rivendicata ultimamente la proprietà in favore dello Stirling.

Abbiamo digià dato deduzione di questa formula col metodo dei *coefficienti indeterminati*, e ancora col mezzo dei limiti n.° 34.

127. Cerchiamo di render chiaro l'uso di queste formule con alcuni esempi. Sia $Fx = L(1+x)$, la caratteristica L indicando il logaritmo naturale di $(1+x)$. Avremo le differenziali successive di $L(1+x)$ facendo subito, come pel n.° 121,

$$dL(1+x) = \frac{dx}{1+x}$$

e quindi

$$d^2L(1+x) = d\left[\frac{dx}{1+x}\right] = d[(1+x)^{-1}.dx]$$

$$= -1.(1+x)^{-2}.dx^2 = -\frac{dx^2}{(1+x)^2},$$

$$d^3L(1+x) = d\left[-\frac{dx^2}{(1+x)^2}\right] = +2(1+x)^{-3}.dx^3$$

$$= +2.\frac{dx^3}{(1+x)^3}$$

$$d^4L(1+x) = d\left[2.\frac{dx^3}{(1+x)^3}\right] = -2.3(1+x)^{-4}dx^4$$

$$= -2.3.\frac{dx^4}{(1+x)^4},$$

ec. . . . ec. . . . .

e in generale

$$d^mL(1+x) = 2.3.4 \ldots (m-1).\frac{dx^m}{(1+x)^m}.(-1)^{m-1}.$$

Facendo in tutte quest' espressioni $x = 0$, e quindi sostituendo nella formula (F) si ottiene

$$L(1+x) = L1 + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ec.} \ldots$$

o solamente

$$L(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{ec.} \ldots$$

a motivo di $L1 = 0$.

Sia ora $Fx = \text{sen}(a+x)$, troveremo per le differenziali successive

$$d\,\text{sen}(a+x) = \cos(a+x).dx,$$

$$d^2\,\text{sen}(a+x) = d[\cos(a+x).dx] = -\text{sen}(a+x).dx^2,$$

$$d^3\,\text{sen}(a+x) = d[-\text{sen}(a+x).dx^2] = -\cos(a+x).dx^3,$$

$$d^4\,\text{sen}(a+x) = d[-\cos(a+x).dx^3] = +\text{sen}(a+x).dx^4,$$

e così di seguito.

Facendo in questi valori $x=0$ e sostituendo nella formula (F) si ha

$$\operatorname{sen}(a+x)=\operatorname{sen}a+\cos a\,\frac{x}{1}-\operatorname{sen}a\,.\,\frac{x^2}{1.2}-$$

$$-\cos a\,.\,\frac{x^3}{1.2.3}+\text{ec.}\ldots,$$

se si fa $a=0$, si ha $\operatorname{sen}0=0$, $\cos 0=1$, e lo sviluppo diventa

$$\operatorname{sen}x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{ec.}\ldots$$

Si troverebbe nella medesima maniera per $\cos x$, l'espressione

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{ec}\ldots$$

128. Abbiamo fin qui considerato la variabile x della funzione generale φx come una variabile indipendente, vale a dire come una variabile che si può determinare a piacere; ma può presentarsi il caso in cui questa quantità sia essa medesima funzione di un'altra variabile, dagli accrescimenti della quale i suoi dipendano; per esempio, x può essere una funzione qualunque fz di z, e si può aver bisogno di conoscere l'accrescimento di φx corrispondente a quello di z, o la differenziale di φx in funzione immediata di dz. Per meglio far comprendere questa particolarità, supponiamo

$$\varphi x=ax^2 \quad \text{e} \quad x=bz.$$

eliminando x fra queste due equazioni, si ottiene

$$\varphi x=ab^2z^2,$$

la cui differenziale, facendo variare z, è.

$$d\varphi=2ab^2zdz.$$

Ora, quest' eliminazione può spesso diventare complicatissima, ed è sempre facile ottenere immediatamente la differenziale di φx in funzione della variabile indipendente z.

Per quest'effetto, osserviamo che la differenziale di una funzione qualunque φx è sempre della forma Mdx, vale a dire che si ha in generale

$$d\varphi x=Mdx;$$

x essendo considerata come variabile indipendente, e M essendo una quantità nella quale x può o non si può trovare, secondo che in φx, entrano o non entrano potenze di x. Ora, dividendo l'equazione precedente per dx, si ha

$$\frac{d\varphi x}{dx}=M$$

e M è ciò che si chiama la *derivata differenziale* di φx.

Così, nel caso in cui φx fosse $a+bx+cx^2$, avremmo

$$d\varphi x=bdx+2cxdx$$

$$=(b+2cx)dx$$

e, per conseguenza

$$\frac{d\varphi x}{dx} = b+2cx,$$

$b+2cx$ sarebbe la *derivata differenziale* di φx.

Egualmente $\frac{d^2\varphi x}{dx^2}$ è la *seconda derivata differenziale* di φx, e così di seguito.

Ora, quando la derivata differenziale di una funzione è conosciuta, si ottiene immediatamente la sua differenziale, poichè dall' equazione generale

$$\frac{d^m\varphi x}{dx^m} = X,$$

si ricava

$$d^m\varphi x = X.dx^m.$$

Avendo dunque la funzione φx nella quale $x=fz$ il che equivale a

$$\varphi x = \varphi(fz),$$

se si giunge a trovare la derivata

$$\frac{d\varphi(fz)}{dz} \text{ o } \frac{d\varphi x}{dz},$$

avremo nel medesimo tempo la differenziale di φx in funzione della differenziale dz della variabile indipendente z.

Ma se indichiamo con M la derivata di φx, e con N quella di fz, avremo

$$\frac{d\varphi x}{dx} = M, \text{ e } \frac{dfz}{dz} = N,$$

donde

$$\frac{d\varphi x}{dx} . \frac{dfz}{dz} = M.N.$$

Ora, a motivo di $x=fz$, si ha $dx=dfz$, sottraendo dunque il fattore comune ai due termini della frazione, rimane

$$\frac{d\varphi x}{dz} = M.N$$

e conseguentemente

$$d\varphi x = M.N.dz,$$

il che insegna che per ottenere la differenziale di φx, rapporto alla variabile indipendente z, bisogna prendere il prodotto delle derivate di φx e fz e moltiplicarlo per dz. Applichiamo subito questa regola all' esempio dato qui sopra nel quale

$$\varphi x = ax^2 \quad \text{e} \quad x = bz:$$

si ha

$$d\varphi x = 2axdx, \quad \text{e} \quad dx = bdz,$$

donde

$$\frac{d\varphi x}{dx} = 2ax \quad \text{e} \quad \frac{dx}{dz} = b,$$

così

$$\frac{d\varphi x}{dz} = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{dx}{dz} = 2abx,$$

e definitivamente

$$d\varphi x = 2abxdz,$$

differenziale che è identicamente la medesima di quella ottenuta con l'eliminazione, sostituendo invece di x il suo valore bz.

Si abbia per secondo esempio $\varphi x = a + bx^3$ e $x = mz + nz^2$, avremo

$$\frac{d\varphi x}{dx} = 3bx^2, \quad \frac{dx}{dz} = m + 2nz$$

e

$$\frac{d\varphi x}{dz} = 3bx^2(m \quad 2nz),$$

ovvero

$$d\varphi x = 3bx^2(m + 2nz)dz.$$

129. Se la variabile x di φx, dipendesse da un'altra variabile y, dipendente alla sua volta da una terza z, vale a dire, se si avesse

$$x = fy, \quad e \quad y = \theta z,$$

fy e θz essendo funzioni qualunque di y e di z, si otterrebbe la differenziale di φx, in funzione del solo accrescimento dz, pel prodotto delle tre derivate

$$\frac{d\varphi x}{dx}, \quad \frac{dx}{dy}, \quad \frac{dy}{dz};$$

vale a dire che si avrebbe

$$d\varphi x = \frac{d\varphi x}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dz} \cdot dz,$$

il che è una conseguenza di ciò che precede e può estendersi ad un numero qualunque di equazioni ausiliari.

130. Queste formule possono essere adoprate con vantaggio nella differenziazione delle quantità complicate; un solo esempio basta per insegnarne il loro uso.

Sia

$$\varphi x = \left[a + \sqrt{\left(b - \frac{c}{x}\right)}\right]^3,$$

supponiamo

$$b - \frac{c}{x} = y \ldots\ldots (1),$$

ed avremo

$$\varphi x = (a + \sqrt{y})^3 \ldots\ldots (2),$$

l'equazione (1) ci darà

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{x^2},$$

e l'equazione (2)

$$\frac{d\varphi x}{dy} = \frac{3(a + \sqrt{y})^2}{2\sqrt{y}},$$

avremo dunque

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{d\varphi x}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{2c(a+\sqrt{y})}{x^2 \cdot \sqrt{y^2}},$$

donde mettendo per y il suo valore,

$$d\varphi x = \frac{3c\left[a+\sqrt{\left(b-\frac{c}{x}\right)}\right]^2}{2x^2 \cdot \sqrt{\left[b-\frac{c}{x^2}\right]}} \cdot dx.$$

131. Senza arrestarci alla deduzione delle successive differenziali di una funzione φx nella quale x è una variabile dependente, deduzione che non presenta veruna difficoltà, applichiamo le considerazioni precedenti alla generazione della funzione generale Fx, per mezzo degli accrescimenti dy di una variabile indipendente y con la quale x è legata dall'equazione $x = fy$.

La funzione Fx è allora propriamente $F(fy)$.

Ora, applicando a quest'ultima il teorema del Maclaurin (F) avremo

$$F(fy) = F(f\dot{y}) + \frac{y}{1}\frac{d(f\dot{y})}{dy} + \frac{y^2}{1.2}\frac{d^2(f\dot{y})}{dy^2} + \text{ec.} \ldots (G).$$

Il punto situato sopra y indicando sempre che bisogna fare $y = 0$ dopo aver preso le differenziali.

Ma, dalla formula del n.° 129, abbiamo

$$\frac{dFx}{dy} = \frac{dFx}{dx} \cdot \frac{dx}{dy},$$

così indicando con A_1, questa derivata, o ponendo

$$\frac{dFx}{dy} = A_1,$$

avremo evidentemente

$$\frac{dA_1}{dy} = \frac{dA_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dy},$$

e per conseguenza

$$\frac{dA_1}{dy} = \frac{d^2Fx}{dy}.$$

Indichiamo di nuovo questa seconda derivata con A_2, e proseguendo nella medesima maniera, troveremo, riunendo i risultamenti

$$\frac{dF(fy)}{dy} = \frac{dFx}{dy} = \frac{dFx}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dFx}{dy} = A_1,$$

$$\frac{d^2F(fy)}{dy^2} = \frac{d^2Fx}{dy^2} = \frac{dA_1}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dA_1}{dy} = A_2,$$

$$\frac{d^3F(fy)}{dy^3} = \frac{d^3Fx}{dy^3} = \frac{dA_2}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dA_2}{dy} = A_3,$$

$$\frac{d^4F(fy)}{dy^4} = \frac{d^4Fx}{dy^4} = \frac{dA_3}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{dA_3}{dy} = A_4,$$

ec. ec.

Sostituendo questi valori nell' espressione (G), essa diventerà

$$Fx = F\dot{x} + \dot{A}_1 \frac{y}{1} + \dot{A}_2 \frac{y^2}{1.2} + \dot{A}_3 \frac{y^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots$$

Il punto indicando che dopo le differenziazioni bisogna dare alla variabile x il valore, che resulta per questa quantità della relazione $y = o$ nell'equazione $x = fy$. Ma se indichiamo con φx la funzione inversa che dà $y = \varphi x$, avremo definitivamente

$$Fx = F\dot{x} + \dot{A}_1 \frac{\varphi x}{1} + \dot{A}_2 \frac{(\varphi x)^2}{1.2} + \dot{A}_3 \frac{(\varphi x)^3}{1.2.3} + \text{ec.} \ldots (H),$$

e allora il punto indica che bisogna dare ad x, dopo le differenziazioni, il valore che rende $\varphi x = o$.

Questa formula che dà la generazione in serie di una funzione qualunque della variabile x per mezzo delle potenze progressive φx, $(\varphi x)^2$, $(\varphi x)^3$ di un'altra funzione arbitraria della medesima variabile, si chiama il *teorema del Paoli*, dal nome del geometra che l'ha scoperto.

132. Esaminando la formazione dei coefficienti A_1, A_2, A_3, possiamo esprimerli come segue, rendendoli indipendenti gli uni dagli altri;

$$\dot{A}_1 = \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}$$

$$\dot{A}_2 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left\{ \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}} \right\}$$

$$\dot{A}_3 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left\{ \frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}} \right] \right\}$$

$$\dot{A}_4 = \frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left\{ \frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} . d\left(\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}} \right) \right] \right\}$$

ec. ec.

Se dividiamo questi valori per i coefficienti numerici che entrano nell'espressione (G) ovvero, se facciamo

$$\frac{\dot{A}_1}{1} = A_1, \quad \frac{\dot{A}_2}{1.2} = A_2, \quad \frac{\dot{A}_3}{1.2.3} = A_3, \quad \frac{\dot{A}_4}{1.2.3.4} = A_4, \text{ ec.}$$

potremo darli la forma più semplice

$$Fx = Fx + A_1 \varphi x + A_2 (\varphi x)^2 + A_3 (\varphi x)^3 + A_4 (\varphi x)^4 + \text{ec.} \ldots (K)$$

e allora questi nuovi coefficienti saranno

$$A_1 = \frac{1}{1} . \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}}, \quad A_2 = \frac{1}{2} \frac{dA_1}{d\dot{x}}, \quad A_3 = \frac{1}{3} \frac{dA_2}{d\varphi\dot{x}}, \text{ ec., ec.}$$

ovvero

$$A_1 = \frac{1}{1} \cdot \frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}},$$

$$A_2 = \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left\{ \frac{dF\dot{x}}{d\varphi x} \right\},$$

$$A_3 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left\{ \frac{1}{d\varphi\dot{x}} d\left[\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}} \right] \right\},$$

$$A_4 = \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left\{ \frac{1}{d\varphi\dot{x}} \left[\frac{1}{d\varphi\dot{x}} \cdot d\left(\frac{dF\dot{x}}{d\varphi\dot{x}} \right) \right] \right\},$$

ec. ec.

133. Possiamo ancora ottenere altre espressioni molto più semplici di questi medesimi coefficienti. A quest' effetto, rappresentiamo con A_0 il termine $F\dot{x}$ che è una quantità costante, e consideriamo come interamente indeterminati i coefficienti A_0, A_1, A_2, ec. della serie generale

$$Fx = A_0 + A_1\varphi x + A_2\varphi x^2 + A_3\varphi x^3 + A_4\varphi x^4 + \text{ec.}$$

indicando in generale con φx^m la potenza m, non di x ma di φx.

Prendendo le differenziali successive dai due membri di quest' equazione, avremo la serie di eguaglianze

$$d_1 Fx = A_1 d\,\varphi x + A_2 d\,\varphi x^2 + A_3 d\,\varphi x^3 + A_4 d\,\varphi x^4 + \text{ec},$$

$$d^2 Fx = A_1 d^2\varphi x + A_2 d^2\varphi x^2 + A_3 d^2\varphi x^3 + A_4 d^2\varphi x^4 + \text{ec.},$$

$$d^3 Fx = A_1 d^3\varphi x + A_2 d^3\varphi x^2 + A_3 d^3\varphi x^3 + A_4 d^3\varphi x^4 + \text{ec.},$$

$$d^4 Fx = A_1 d^4\varphi x + A_2 d^4\varphi x^2 + A_3 d^4\varphi x^3 + A_4 d^4\varphi x^4 + \text{ec.},$$

ec ec.

Ora, se si fa $\varphi x = n$, tutte le differenziali nelle quali l'esponente di φx è maggiore di quello della caratteristica diventano zero, poichè è facile vedere che nella differenziale generale

$$d^n \varphi x^m,$$

quando m è maggiore di n, φx entra come fattore. Indicando questa circostanza con un punto posto sopra l'x, e osservando di più che quando si fa $\varphi x = o$, si ha in generale

$$d^m \varphi x^m = (m-1)(m-2) \ldots\ldots 3 \,.\, 2 \,.\, (d\varphi\dot{x})^m$$

avremo l'equazioni

$$F\dot{x} = A^0,$$

$$d\,F\dot{x} = A_1 d\,\varphi\dot{x},$$

$$d^2 F\dot{x} = A_1 d^2\varphi\dot{x} + 2\,A_2 d(\varphi\dot{x})^2,$$

$$d^3 F\dot{x} = A_1 d^3\varphi\dot{x} + A_3 d^3\varphi\dot{x}^3 + 2 \,.\, 3 A_3 (d\varphi\dot{x})^3,$$

$$d^4 F\dot{x} = A_1 d^4\varphi\dot{x} + A_2 d^4\varphi\dot{x}^2 + A_3 d^4\varphi\dot{x}^3 + 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, A_4 (d\varphi\dot{x})^4$$

ec. ec.,

donde dedurremo

$$\left.\begin{aligned}
A_0 &= F\dot{x} \\
1 . A_1 &= \frac{1}{d\varphi\dot{x}} dF\dot{x} \\
1 . 2 . A_2 &= \frac{1}{(d\varphi\dot{x})^2} \left\{ d^2F\dot{x} - A_1 d^2\varphi\dot{x} \right\} \\
1 . 2 . 3 . A_3 &= \frac{1}{d(\varphi\dot{x})^3} \left\{ d^3F\dot{x} - A_1 d^3\varphi\dot{x} - A_2 d^3\varphi\dot{x}^2 \right\} \\
1 . 2 . 3 . 4 A_4 &= \frac{1}{d(\varphi\dot{x})^4} \left\{ d^4F\dot{x} - A_1 d^4\varphi\dot{x} - A_2 d^4\varphi\dot{x}^2 - A_3 d^4\varphi\dot{x}^3 \right\} \\
&\text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.}
\end{aligned}\right\} \ldots (1).$$

Espressioni con l'aiuto delle quali diventa facilissimo di calcolare questi coefficienti gli uni per mezzo degli altri.

134. Facciamo di φx una funzione determinata per far conoscere l'uso di queste formule. Sia per esempio,

$$\varphi x = \frac{x-n}{x+n},$$

il che ci dà $x = n$, nel caso di $\varphi x = 0$.

Prendendo le successive differenziali di φx ovvero di $\frac{x-n}{x+n}$, otterremo

$$d\varphi x = \frac{2n}{(x+n)^2} . dx,$$

$$d^2\varphi x = -2 . \frac{2n}{(x+n)^3} . dx^2,$$

$$d^3\varphi x = 2 . 3 \frac{2n}{(x+n)^4} . dx^3,$$

$$d^4\varphi x = -2 . 3 . 4 \frac{2n}{(x+n)^5} . dx^4,$$

$$d^5\varphi x = 2 . 3 . 4 . 5 . \frac{2n}{(x+n)^6} . dx^5,$$

$$d^6\varphi x = -2 . 3 . 4 . 5 . 6 \frac{2n}{(x+n)^7} . dx^6,$$

ec. ec.

dando ad x, in quest' espressioni, il valore n, che rende $\varphi x = 0$, avremo

$$d\varphi\dot{x} = \frac{dx}{2n},$$

$$d^2\varphi\dot{x} = -2.\frac{dx^2}{(2n)^2},$$

$$d^3\varphi\dot{x} = 2.3\frac{dx^3}{(2n)^3},$$

$$d^4\varphi\dot{x} = -2.3.4.\frac{dx^4}{(2n)^4},$$

$$d^5\varphi\dot{x} = 2.3.4.5.\frac{dx^5}{(2n)^5},$$

ec. ec.,

$$d^\mu\varphi\dot{x} = (-1)^{\mu+1}\,{}_1\,\mu|_1\,\frac{dx^\mu}{(2n)^\mu},$$

con quest' espressioni sarà facile di costruire le differenziali delle potenze di φx che entrano nei coefficienti (I). Infatti, dalla legge (A), abbiamo

$$d^\mu(\varphi x)^2 = d^\mu\left\{\varphi x.\varphi x\right\} = \varphi x d^\mu\varphi x + \mu d\varphi x d^{\mu-1}\varphi x +$$

$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}d^2\varphi x d^{\mu-2}\varphi x + \text{ec.}$$

così

$$d^2(\varphi x)^2 = \varphi x.d^2\varphi x + 2d\varphi x.d\varphi x + d^2\varphi x.\varphi x$$

e conseguentemente facendo $\varphi x = 0$,

$$d^2(\varphi\dot{x})^2 = 2d\varphi\dot{x}.d\varphi\dot{x}$$

il che ci dà, sostituendo il valore qui sopra di $d\varphi\dot{x}$

$$d^2(\varphi\dot{x})^2 = \frac{2dx^2}{(2n)^2},$$

troveremo nella medesima maniera

$$d^3(\varphi\dot{x})^2 = -\frac{12dx^3}{(2n)^3},$$

$$d^4(\varphi\dot{x})^2 = \frac{72.dx^4}{(2n)^4},$$

$$d^5(\varphi\dot{x})^2 = \frac{12.dx^5}{(2n)^5},$$

$$d^6(\varphi\dot{x})^2 = -\frac{72.dx^6}{(2n)^6},$$

ec. ec.

Sostituendo questi valori nei coefficienti (I) essi diventano

$$\left.\begin{aligned}
A^0 &= F\dot{x} \\
A_1 &= (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} \\
A_2 &= (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + (2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2\,dx^2} \\
A_3 &= (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + 2(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2\,dx^2} + (2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3} \\
A_4 &= (2n).\frac{dF\dot{x}}{dx} + 3(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2} + 3(2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3} + (2n)^4\frac{d^4F\dot{x}}{1.2.3.4.dx^4} \\
&\text{ec. ec. ec.} \\
A\mu &= (2n)\frac{dF\dot{x}}{dx} + (\mu-1)(2n)^2\frac{d^2F\dot{x}}{1.2.dx^2} \\
&+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{1.2}(2n)^3\frac{d^3F\dot{x}}{1.2.3.dx^3} \\
&+ \frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3}(2n)^4\frac{d^4F\dot{x}}{1.2.3.4.dx^4} \\
&+ \text{ec.}
\end{aligned}\right\}\ldots(L),$$

e la serie generale (K) prende la forma

$$Fx = F\dot{x} + A_1\left(\frac{x-n}{x+n}\right) + A_2\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^2 + A_3\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3 + \text{ec.}\ldots(M)$$

nella quale n è una quantità arbitraria.

135. Applichiamo questa legge particolare di generazione ad alcune funzioni elementari. Cominciamo da $Fx = \log x$, log indicando il logaritmo naturale.

Si costruiscano le differenziali successive di $\log x$, e troveremo

$$d\,Fx = d\log x = \frac{dx}{x},$$

$$d^2Fx = d^2\log x = -\frac{dx^2}{x^2},$$

$$d^3Fx = d^3\log x = 2.\frac{dx^3}{x^3},$$

$$d^4Fx = d^4\log x = -2.3.\frac{dx^4}{x^4},$$

ec. ec. ec.

Sostituendo questi valori nell' espressioni (L), dopo aver fatto $x = n$, otterremo

$$A_1 = 2,\ A_2 = 0,\ A_3 = \frac{2}{3},\ A_4 = 0,\ A_5 = \frac{2}{5},\ A_6 = 0,\ A_7 = \frac{2}{7},\ \text{ec.}$$

e, per conseguenza,

$$\text{Log}\, x = \log n + 2\left(\frac{x-n}{x+n}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3 + \frac{2}{5}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^5 + \text{ec.}$$

il che diventa facendo $n = 1$, donde $\log n = \log 1 = 0$, lo sviluppo conosciuto

$$\text{Log}\, x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \text{ec.}\ldots\right\}$$

il quale è convergente per tutti i valori di x.

Prendiamo per secondo esempio $Fx = (1+x)^{-1}$. Le differenziali successive di Fx sono, in questo caso

$$\begin{aligned} dFx &= -(1+x)^{-2}dx, \\ d^2Fx &= 1.2(1+x)^{-3}dx^2, \\ d^3Fx &= -1.2.3\ (1-x)^{-4}dx^3, \\ d^4Fx &= 1.2.3.4\ (1+x)^{-5}dx^4, \\ &\text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{aligned}$$

Facendo $x = n$, e sostituendo in (L), avremo

$$A_0 = \frac{1}{1+n}$$

$$A_1 = -\frac{2n}{(1+n)^3}$$

$$A_2 = \frac{2n(n-1)}{(1+n)^5}$$

$$A_3 = -\frac{2n(n-1)^2}{(1+n)^4}$$

$$A_4 = \frac{2n(n-1)^3}{(1+n)^5}$$

ec. ec.

e per conseguenza

$$(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+n} - \frac{2n}{(1+n)^3}\left(\frac{x-n}{x+n}\right) + \frac{2n(n-1)}{(1+n)^5}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^2$$

$$-\frac{2n(n-1)^2}{(1+n)^4}\left(\frac{x-n}{x+n}\right)^3 + \text{ec.}$$

Serie convergente per tutti i valori della quantità arbitraria n. Per esempio nel caso di $x = 1$, in cui lo sviluppo di $(1+x)^{-1}$ dà, per mezzo della formula del Newton, l'espressione singolare

$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+1-1+1 \text{ ec.}$$

questa serie diventa

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+n} - \frac{2n}{(1+n)^2}\left(\frac{1-n}{1+n}\right) + \frac{2n(n-1)}{(1+n)^3}\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 - \text{ec.}$$

che per qualunque valore di n è una serie convergente dando $\frac{1}{2}$.

Facendo $n=1$, si ha immediatamente

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

La legge (M) può ancora, con determinazioni adattate della quantità arbitraria n, dare generazioni in serie sempre convergenti di una funzione qualunque Fx, il che non può fare il teorema del Taylor. Ma lo sviluppo delle funzioni in serie è l'oggetto di un altro articolo, nel quale vedremo che il teorema del Paoli, dal quale abbiamo dedotto la legge (M), non è esso medesimo che un caso particolare di un teorema generale del quale daremo l'esposizione. (*Vedi* Serie e Tecnia).

136. Vedremo in altra parte come gli sviluppi, che abbiamo ottenuti per funzioni di una sola variabile, si estendano alle funzioni che ne contengono più. Quanto all'applicazioni del calcolo differenziale esse si estendono a tutte le parti delle matematiche, e potranno consultarsi in questo dizionario gli articoli ne' quali è stato adoprato questo calcolo. *Vedi* in particolare: Accelerato, Asintoto, Uato, Curatura, Sviluppata, Massima, Normale e Sunnormale, Osculatrice, Punto singolare, Quadratura, Radici eguali, Rettificazione, Tangente e Suttangente, Serie; Ritorno delle Serie, ec. ec.

137. Abbiamo veduto di quale utilità era il teorema del Taylor quando si voleva sviluppare delle funzioni in serie. Il Lagrange, considerando la gran facilità con la quale i principii della differenziazione potevano dedursi da questo teorema, arrivò a dimostrarlo senza far uso del calcolo differenziale, per mezzo di un processo che modificheremo nella seguente maniera.

Sia $y=f(x+h)$; dalla natura di questa funzione, bisogna che quando si fa $h=0$, $f(x+h)$ si riduca a fx; questo è ciò che avrà luogo se la parte che contiene h in quest'equazione è un multiplo di h. Rappresentiamolo con Ph; avremo dunque

$$f(x+h)=fx+Ph,$$

P potendo essere una funzione di h, se si chiama p ciò che diventa P quando $h=0$, e Qh la parte che dipende da h, avremo ancora $P=p+Qh$; continuando questo ragionamento avremo questa serie di equazioni:

$$y=fx+Ph,$$
$$P=p+Qh,$$
$$Q=q+Rh,$$
$$\text{ec. ec. ec.}$$

Mettendo il valore di P, dato dalla seconda equazione, nella prima, verrà

$$y=fx+ph+Qh^2;$$

mettendo in questo risultamento il valore di Q, dato dalla terza equazione, si avrà

$$y=fx+ph+qh^2+Rh^3;$$

continuando così, e mettendo $f(x+h)$ invece di y, avremo, in generale

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+sh^4+\text{ec.}\ldots\ldots(a).$$

138. L'espressione $f(x+h)$ rappresenta in generale, la funzione che non è ancora ridotta in serie; se in questa funzione si cangia x in $x+i$, si avrà il me-

desimo risultamento, che se si fosse cangiato h in $h+i$. Infatti, questa funzione non potendo contenere x senza che questa variabile non sia seguita immediatamente da h, un termine come $A(x+h)^m$, per esempio, quando avremo cangiato x in $x+i$, diventerà $A(x+i+h)^m$; quantità che è la medesima di $A(x+h+i)^m$ che risulterebbe dalla sostituzione di $h+i$ invece di h, nella funzione $A(x+h)^m$. Quello che si dice di questo termine dovendo applicarsi a tutti gli altri, ne segue che, nelle due Ipotesi, il primo membro dell'equazione (a) darà luogo a risultamenti identici; donde segue che lo sviluppo $fx+ph+qh^2+$ ec. condurrà al medesimo risultamento sostituendo x con $x+i$, o h con $h+i$.

139. Cominciando dal sostituire $h+i$ invece di h in $fx+ph+qh^2+$ ec.; avremo

$$fx+p(h+i)+q(h+i)^2+r(h+i)^3+\text{ec.}\ldots(b);$$

sviluppando i termini in h di questi binomi, verrà

$$fx+ph\ldots+qh^2+2qhi\ldots+rh^3+3rh^2i+3rhi^2,\ \text{ec.}\ldots\ldots(c).$$

Per ottenere quindi il risultamento della sostituzione di $x+i$ invece di x, nell'espressione $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ec., osserviamo che in questa serie, h essendo in evidenza, quest'accrescimento non entra in fx e nei coefficianti p, q, r, s, ec., quantità che non potendo perciò contenere h, debbono considerarsi come funzioni; e poichè l'equazione (a) ha luogo per qualunque funzione di x, la sostituzione di $x+i$ in luogo di x cangerà

$$\begin{array}{lll}
fx & \text{in} & fx+pi+qi^2+ri^3+si^4+\text{ec.},\\
p & \text{in} & p+p'i+p''i^2+p'''i^3+p^{iv}i^4+\text{ec.},\\
q & \text{in} & q+q'i+q''i^2+q'''i^3+q^{iv}i^4+\text{ec.};\\
r & \text{in} & r+r'i+r''i^2+r'''i^3+r^{iv}i^4+\text{ec.},\\
s & \text{in} & s+s'i+s''i^2+s'''i^3+s^{iv}i^4+\text{ec.},\\
\text{ec.} & & \text{ec.}\qquad\text{ec.}\qquad\text{ec.}
\end{array}$$

Non è necessario prevenire che con le lettere accentate, rappresentiamo i coefficienti delle differenti potenze di i in questi sviluppi.

Sostituendo questi valori di fx, di p, di q, di r, di s, ec., nella serie $fx+ph+qh^2+rh^3+$ ec., otterremo

$$fx+pi+qi^2+ri^3+\text{ec.}+(p+p'i+p''i^2+\text{ec.})h+(q+q'i+q''i^2+\text{ec.})h^2$$
$$+(r+r'i+r''i^2+\text{ec.})h^3+\text{ec.}\ldots\ldots(d).$$

140. Questo sviluppo dovendo essere identico (n.° 138) con quello dato dall'equazione (c) bisogna che i termini che contengono le medesime potenze di h siano eguali; avremo dunque

$$p+p'i+p''i^2+\text{ec.}=p+2qi+\text{ec.};$$
$$q+q'i+q''i^2+\text{ec.}=q+3ri+\text{ec.};$$
$$r+r'i+r''i^2+\text{ec.}=r+4si+\text{ec.}$$

Quello che si dice di h potendo applicarsi ad i, eguagliando i termini affetti dalle medesime potenze di i, si troverà

$$p'=2q,\ q'=3r,\ r'=4s,\ \text{ec.}\ldots\ldots(e).$$

Ciò equivale ad eguagliare i termini affetti da hi, da h^2i, da h^3i, ec., dell'equazioni (c) e (d).

141. Abbiamo veduto (n.° 139), che p era in generale una funzione di x;

rappresentando dunque p con $f'x$, chiamando $f''x$ il termine che moltiplicherà h nello sviluppo della funzione $f'(x+h)$; chiamando egualmente $f'''x$ il coefficiente di h nello sviluppo di $f''(x+h)$, e così di seguito, avremo quest'equazioni

$$\left.\begin{array}{l} f(x+h)=fx+hf'x+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.} \\ f'(x+h)=f'x+hf''x+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.} \\ f''(x+h)=f''x+hf'''x+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.} \\ \quad\text{ec.} \qquad\quad \text{ec.} \qquad\quad \text{ec.} \end{array}\right\} \ldots\ldots (f).$$

142. Per ipotesi, abbiamo, (n.° 141), $p=f'x$; dunque se in quest'equazione si fa $x=x+h$, si avrà

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+\text{ec.}=f'(x+h) \ldots\ldots (g);$$

mettendo in quest'equazione il valore di $f'(x+h)$, dato dalla seconda dell'equazioni (f), otterremo

$$p+p'h+p''h^2+\text{ec.}=f'x+hf''x+\textit{termini in } h^2, \textit{ in } h^3, \text{ ec.}$$

Quest'equazione avendo luogo, qualunque sia h, bisogna che i termini delle medesime potenze di h siano eguali; dunque

$$p'=f''x;$$

questo valore di p' cangerà la prima dell'equazioni (e) in $f''x=2q$; donde ricaveremo

$$q=\frac{1}{2}f''x.$$

Se in quest'equazione si cangia x in $x+h$, verrà

$$q+q'h+q''h^2+\text{ec.}=\frac{1}{2}f''(x+h);$$

mettendo invece di $f''(x+h)$ il suo sviluppo dato dalla terza dell'equazioni (f), avremo

$$q+q'h+q''h^2+\text{ec.}=\frac{1}{2}(f''x+hf'''x+\textit{termini in } h^2, \text{ in } h^3, \text{ec.});$$

paragonando i termini che moltiplicano la prima potenza di h, avremo $q'=\frac{1}{2}f'''x$, valore che essendo messo nella seconda dell'equazioni (e), la cangerà in $\frac{1}{2}f'''x=3r$, donde dedurremo

$$r=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}f'''x;$$

continuando così, troveremo successivamente tutti gli altri coefficenti dell'equazione (a); sostituendo in quest'equazione i valori di p, di q, di r, ec. . . . . avremo

$$f(x+h)=fx+hf'x+\frac{h^2}{1.2}f''x+\frac{h^3}{2.3}f'''x+\text{ec.} \ldots (h)$$

143 Ora se si considera la prima dell' equazioni (f), si vedrà che $f'x$ essendo il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$, questo è ciò che s' indica con $\frac{d.fx}{dx}$ o con $\frac{dy}{dx}$; egualmente, considerando la seconda dell'equazioni (f), si riconoscerà che il coefficiente $f''x$ della prima potenza di h, nello sviluppo di $f'(x+h)$, dev' essere rappresentato da $\frac{df'x}{dx}$, vale a dire da $\frac{d.\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$ e così di seguito; per conseguenza mettendo questi valori di fx, di $f'x$, di $f''x$, ec. nell' equazione (h), si troverà

$$f(x+h)=fx+\frac{dy}{dx}h+\frac{d^2y}{dx^2}\frac{h^2}{1.2}+\frac{d^3y}{dx^3}\frac{h^3}{2.3}+\text{ec.}\ldots\ldots(m).$$

144. Ed è in questa guisa che si giunge alla formula del Taylor, senza far uso del calcolo differenziale. L' espressione $\frac{dy}{dx}$, che entra in questa formula, è il segno dell operazione con la quale si ottiene il coefficiente di h nello sviluppo di $f(x+h)$; quando abbiamo trovato questo coefficiente, l' espressioni $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, indicano che la medesima operazione ripetuta ci farà conoscere i coefficienti dell' altre potenze di h; dimodochè non abbiamo bisogno che di conoscere, con mezzi ricavati dall' Algebra, ciò che dev' essere $\frac{dy}{dx}$ in ciascuna funzione. Per esempio, se si domandasse qual è $\frac{dy}{dx}$ per la funzione x^m, si svilupperebbe $(x+h)^m$ con la formula del binomio, la quale darebbe $x^m+mx^{m-1}h+$ ec.; e siccome $\frac{dy}{dx}$ dovrebbe indicare il coefficiente della prima potenza di h, in questo sviluppo, si avrebbe $\frac{dy}{dx}=mx^{m-1}$. Così, tutto si riduce a poter trovare, con processi analitici lo sviluppo delle differenti sorti di funzioni che l' algebra può presentare: questi processi non sono differenti da quelli che abbiamo fatto conoscere per sviluppare le diverse funzioni che, con la loro combinazione danno tutte le altre; ed è in questo modo che abbiamo dato gli sviluppi di a^{x+h}, di $\log(x+h)$, di $\cos(x+h)$, ec.

145. Ecco dunque un terzo metodo, col quale i principii del calcolo differenziale si trovano dimostrati in una maniera indipendente da qualunque considerazione di limiti, d'infinitamente piccoli, o di quantità che si distruggano; ma questo metodo non può però escludere quello dei limiti, o degl' infinitesimi, perchè allorquando si giunge all' applicazione, e che si vuole, per esempio, determinare i volumi o le superficie, rettificare le curve, ovvero ottenere l' espressioni delle sottangenti, sunnormali, ec., siamo sempre obbligati di ricorrere ai limiti, ovvero agl' infinitesimi.

146. Considerando gli sviluppi delle diverse funzioni $(x+h)^m$, a^{x+h}, $\log(x+h)$, $\operatorname{sen}(x+h)$, ec., che l' Algebra ci offre, siccome queste funzioni sono in numero

limitatissimo, con facilità si riconosce che, nei loro sviluppi, il coefficiente della prima potenza di h non è nè nullo nè infinito, almeno fintanto che x conserva il suo valore indeterminato; questo è d'altra parte ciò che risulta dalla precedente dimostrazione. Infatti, supponiamo che si avesse $p=0$ nell'equazione

$$f(x+h)=fx+ph+qh^2+rh^3+ec.,$$

succederebbero due casi: o il valore di x, che contiene p, dovrebbe esser dato da un'equazione identica, o da un'equazione che non lo sarebbe. In quest'ultimo caso, $p=0$ rappresenterebbe un'equazione di un dato grado, e quest'equazione non darebbe che un numero limitato di valori di x, il che sarebbe contro l'ipotesi, che ammette per x un valore qualunque; ma se $p=0$, vale a dire se $f'x=0$ fosse un'equazione identica in x, facendo $x=x+h$, si avrebbe ancora $f'(x+h)=0$; e siccome h, entrerebbe per tutto ove entra x, quest'equazione considerata rapporto ad h, sarebbe ancora identicamente nulla, ovvero, in altri termini, quest'equazione avrebbe luogo qualunque sia h; seguirebbe perciò il medesimo del suo sviluppo, che, per l'equazione (g), è

$$p+p'h+p''h^2+p'''h^3+ec.=0;$$

ma quando un'equazione di questo genere è nulla, indipendentemente da h, bisogna che i coefficienti delle differenti potenze di h siano nulli separatamente, e che, per conseguenza, si abbia

$$p'=0,\ p''=0,\ p'''=0,\ ec.$$

Sostituendo questi valori nell'equazioni

$$p'=2q,\ p''=3r,\ p'''=4s,\ ec.,$$

che resultano dall'identità dei termini affetti dalle medesime potenze di ih di i^2h, di i^3h, ec., nelle serie (c) e (d), si otterrebbe

$$q=0,\ r=0,\ s=0,\ ec.;$$

e, siccome inoltre $p=0$, l'equazione (a) si ridurrebbe a

$$f(x+h)=fx.$$

Bisognerebbe dunque che $x+h$, messo in luogo di x, non cangiasse la funzione, il che esigerebbe che questa funzione fosse ideotica o costante; poichè si sa che se fx fosse, per esempio, di questa forma, x^2-a^2, o di questa, $c+x^2-a^2$, la sostituzione di $x+h$ in luogo di x darebbe sempre il medesimo risultamento; e si vede che, nel primo caso, la funzione sarebbe identica, e, nel secondo, si ridurrebbe ad una costante c. Segue da ciò che precede, che il coefficiente della prima potenza di h non può esser nullo nello sviluppo generale di $f(x+h)$.

Non sarebbe meno assurdo di supporre questo coefficiente infinito, poichè il secondo membro dell'equazione (a) divenendo infinito, il primo membro lo sarebbe ancora, vale a dire che si avrebbe

$$f(x+h)=\infty;$$

e siccome $f(x+h$, si compone in $x+h$, come fx si compone in x, il termine che, in $f(x+h)$ renderebbe quest'espressione infinita, dovrebbe rendere ancora infinita fx. Per esempio, se $f(x+h)$ contenesse un termine qualunque della forma $\frac{A}{(x+h)-(x+h)}$, che è infinito, è evidente che si dovrebbe avere in fx,

il termine $\frac{A}{x-x}$ il quale sarebbe ancora infinito. Segue da ciò che la funzione proposta sarebbe infinita, il che non supponiamo.

147. L'espressioni $f'x$, $f''x$, $f'''x$, ec., sono ciò che il Lagrange chiama *funzione primn*, *funzione seconda*, *funzione terza*, ec., di x, e in generale ne sono le funzioni derivate. Il Legrange indica ancora le funzioni derivate in in un altro modo, vale a dire sostituendo $\frac{dy}{dx}$ con y', $\frac{d^2y}{dx^2}$ con y'', $\frac{d^3y}{dx^3}$ con y''' e così di seguito.

Stabilito il teorema del Taylor nel modo che abbiamo indicato, il Lagrange passa a dedurre dal medesimo tutte le altre regole del calcolo differenziale, siccome però i limiti di quest'opera e'impediscono di poter esporre ancora queste regole secondo questo sistema, così quei lettori che vorranno esaminarle nel suo completo potranno valersi delle seguenti opere.

Lagrange, *Leçons sur le Calcul des Fonctions*, Parigi, 1808; Idem, *Théorie des Fonctions analytiques*, Paris, 1813 in-4; Brunacci *Matematica sublime*, vol. 4, Firenze, 1805 *e segg.* Antonio Bordoni, *Lezioni di calcolo sublime*, vol. 2 in-8, Milano 1831, ec., ec.

148. In tutto ciò che precede, abbiamo considerato le differenze successive nell'ordine diretto, vale a dire passando dalla prima alla seconda, dalla seconda alla terza e così di seguito, ed abbiamo formato così una serie di funzioni derivate

$$\begin{array}{ccc} \varphi x & \text{o} & \varphi x \\ \Delta\varphi x & & d\varphi x \\ \Delta^2\varphi x & & d^2\varphi x \\ \Delta^3\varphi x & & d^3\varphi x \\ \text{ec.} & & \text{ec.} \end{array}$$

questa formazione successiva delle differenze nell'ordine diretto, conduce come l'abbiamo di già detto, alla considerazione opposta dalla loro formazione nell'ordine inverso; ora, il problema di costruire la differenza $\Delta^2\varphi x$, per esempio, per mezzo della differenza superiore $\Delta^3\varphi x$ è l'oggetto generale del *calcolo integrale*.

Si chiama *integrale* o *somma* la differenza presa nell'ordine inverso. Così, Σ essendo la caratteristica dell'integrale per le differenze finite, e $\int$ quella dell'integrale per le differenziali, si scrive

$$\Sigma\left[\Delta^3\varphi x\right]=\Delta^2\varphi x \qquad \int\left[d^3\varphi x\right]=d^2\varphi x,$$

$$\Sigma\left[\Delta^2\varphi x\right]=\Delta\varphi x \qquad \int\left[d^2\varphi x\right]=d\varphi x,$$

$$\Sigma\left[\Delta\varphi x\right]=\varphi x \qquad \int\left[d\varphi x\right]=\varphi x$$

e continuando con indici negativi,

$$\Sigma\left[\ \varphi x\right]=\Delta^{-1}\varphi x \qquad \int\left[\ \varphi x\right]=d^{-1}\varphi x,$$

$$\Sigma\left[\Delta^{-1}\varphi x\right]=\Delta^{-2}\varphi x \qquad \int\left[d^{-1}\varphi x\right]=d^{-2}\varphi x,$$

$$\Sigma\left[\Delta^{-2}\varphi x\right]=\Delta^{-3}\varphi x \qquad \int\left[d^{-2}\varphi x\right]=d^{-3}\varphi x,$$

si ha egualmente

$$\Sigma\left\{\Sigma\left[\Delta^2\varphi x\right]\right\}=\Sigma\left[\Delta^2\varphi x\right]=\Delta\varphi x$$

$$\int\left\{\int\left[d^2\varphi x\right]\right\}=\int\left[d^2\varphi x\right]=d\varphi x$$

ovvero

$$\Sigma^2\Delta^2\varphi x=\Delta\varphi x \qquad \int^2 d^2\varphi x=d\varphi x$$

in generale

$$\Sigma^m\left[\Delta^n\varphi x\right]=\Delta^{n-m}\varphi x,\ \int^m\left[d^n\varphi x\right]=d^{n-m}\varphi x.$$

Come ancora l'espressioni

$$\Sigma^m\left(\varphi x\right) \text{ e } \Delta^{-m}\varphi x,\quad \int^m\left(\varphi x\right) \text{ e } d^{-m}\varphi x$$

sono equivalenti.

149. Applicando queste considerazioni alla legge fondamentale (A) (n.° 117) essa diventa per il caso delle differenziali inverse o degl'integrali

$$\int\left(Fx.fx\right)=Fx.\int^m fx-\frac{m}{1}dFx.\int^{m-1}fx$$

$$+\frac{m(m-1)}{1.2}d^2Fx.\int^{m-2}fx$$

$$-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}.d^3Fx.\int^{m-3}fx$$

$$+\text{ ec. . . .}$$

moltiplicando i due membri per dx^m.

Le applicazioni di questa legge, come pure tutto ciò che si riferisce al calcolo delle *differenze inverse*, si troveranno all'articolo Calcolo integrale.

150. Ci rimarrebbe da esaminare col calcolo infinitesimale il caso in cui le funzioni che si vuole differenziare, contenessero più variabili, ma questo caso non presenta veruna difficoltà, e si può concludere dai principii precedenti che la differenza di una funzione $F(x, y, z, \text{ec.})$ di un numero qualunque di variabili riceve per l'accrescimento particolare di ciascuna variabile un accrescimento distinto; così indicando come è l'uso con $\left(\frac{dF}{dx}\right)dx$, l'accrescimento o la differenza della funzione F corrispondente all'accrescimento dx della variabile x, con $\left(\frac{dF}{dy}\right)dy$ l'accrescimento o la differenza della funzione F corrispondente all'accrescimento dy della variabile y, la differenza generale sarà la somma di queste differenze particolari, ed avremo

$$dF(x, y, z, \text{ec.})=\left(\frac{dF}{dx}\right).dx+\left(\frac{dF}{dy}\right).dy$$

$$+\left(\frac{dF}{dz}\right).dz+\text{ ec. . . . .}$$

Digitized by Google

Vale a dire, che la differenza totale si trova prendendo la somma delle differenze prese per ciascuna variabile in particolare, come se tutte le altre fossero costanti.

Sia per esempio

$$F(x,y)=x^3+3x^2y+2xy^2$$

cominciando dal differenziare come se y fosse costante, avremo da una parte

$$\left(\frac{dF(x,y)}{dx}\right).dx=3x^2dx+6xydx+2y^2dx$$

e dall'altra, differenziando come se x fosse costante

$$\left(\frac{dF(x,y)}{dy}\right).dy=3x^2dy+4xydy$$

donde, avremo per la differenziale generale

$$dF(x,y)=(3x^2+6xy+2y^2)\,dx+(3x^2+4xy)\,dy \;\ldots\ldots (z).$$

Infatti, dalla costruzione medesima delle differenze, si ha

$$dF(x,y)=F(x+dx,\,y+dy)-F(x,y)$$

vale a dire, nell'esempio che ci occupa

$$(x+dx)^3+3(x+dx)^2(y+dy)+2(x+dx(y+dy)^2-$$
$$-x^3-3x^2y-3xy^2$$

ovvero sviluppando i prodotti

$$\begin{array}{lll}
x^3+3x^2dx+3x\,.\,dx^2 & +dx^3 & \\
+3x^2y\;+6xy\,.\,dx & +3ydx^2 & \\
+3x^2dy+6xdxdy & +3dy\,.\,dx^2 & \\
+2xy^2 & +2y^2dx & \\
+4xydy & +4ydxdy & \\
+2xdy^2 & +2dxdy^2 & \\
-x^3-3x^2y & -2xy^2 &
\end{array}$$

operando le sottrazioni e togliendo tutte le quantità indefinitamente piccole degli ordini superiori al primo, rimane

$$3x^2dx+6xydx+2y^2dx+3x^2dy+4xydy$$

il che è identico con l'espressione (z).

Vedremo all'articolo Serie come si possano estendere alle funzioni di più variabili i teoremi del Taylor, del Maclaurin, del Paoli, ed altri ancora più generali.

151. La scoperta del calcolo differenziale è stata l'oggetto di una lunga contestazione che in altra parte di questo dizionario avremo occasione di riportare (*Vedi* Leibnizio e Newton), e quantunque sia al giorno d'oggi dimostrato all'ultima evidenza che l'accusa di plagio di cui gl'Inglesi hanno voluto colpire Leibnizio, non riposa sopra alcun fondamento, noi non ci serviremo degli argomenti che gli storici francesi e tedeschi delle matematiche hanno accumulato per vendicare la sua memoria. Secondo noi la gloria del Leibnizio resta pura e inattaccabile poichè non solamente quest'grande uomo ha il primo, prodotto il

calcolo differenziale, ma esso è ancora il primo che abbia compreso la natura astratta di questo calcolo; e i suoi infinitamente piccoli dei diversi ordini, sono una concezione filosofica di un ordine ben superiore a quella delle *flussioni* del Newton. Ammettendo dunque il che pare assai probabile che ciascuno di questi geometri sia giunto con la sola forza del suo genio alla scoperta di un medesimo metodo di calcolo, al Leibnizio però appartiene l'onore di essersi elevato fino ai veri principii metafisici di questo metodo, e di averlo così costituito uno dei rami fondamentali della scienza dei numeri.

Non crediamo far cosa discara al pubblico col chiudere quest'articolo dando un'idea dei diversi metodi usati dagli antichi e dai moderni per supplire all'analisi infinitesimale estraendo tali idee dall'opera dell'illustre Carnot sopra la metafisica del calcolo infinitesimale.

152. Il primo metodo che si presenta è il così detto metodo di esaustione, questo era quello del quale si servivano gli antichi nelle loro ricerche difficili, e particolarmente nella teoria delle linee e superficie curve, e nella valutazione dell'aree e dei volumi che esse contengono. Siccome essi non ammettevano che dimostrazioni perfettamente rigorose, essi non credevano di poter considerare le curve come poligoni di un grandissimo numero di lati; ma allorquando volevano scoprire le proprietà di una fra di loro, la riguardavano come il termine fisso al quale i poligoni inscritti e circoscritti, si avvicinano continuamente, e tanto quanto si vuole, a misura che si aumenta il numero dei loro lati. Con ciò essi annientavano in qualche modo lo spazio compreso fra questi poligoni e la curva, il che, senza dubbio, fece dare a questo sistema il nome di *metodo di esaustione*.

Siccome questi poligoni terminati da linee rette erano figure conosciute, il loro avvicinarsi continuamente alla curva dava di questa un'idea di più in più precisa e la legge di continuità servendo di guida, si poteva finalmente giungere alla conoscenza esatta della sua proprietà.

Ma non bastava ai geometri di aver riconosciuto e come indovinato queste proprietà; bisognava verificarle in un modo incontestabile, e questo lo facevano provando che qualunque supposizione contraria all'esistenza di queste medesime proprietà conduceva necessariamente ad una qualche contradizione; questo è il motivo perchè essi davano a questo genere di dimostrazione il nome di, *riduzione all'assurdo*.

153. Fu in questa guisa che avendo cominciato da stabilire che l'aree dei poligoni simili, stanno fra loro come i quadrati delle loro linee omologhe, essi hanno concluso che i circoli di raggi differenti stanno fra loro come i quadrati di questi raggi: che è la seconda proposizione del secondo libro di Euclide. L'analogia gli ha condotti a questa conclusione, immaginando in questi circoli, dei poligoni regolari inscritti di un medesimo numero di lati. Mentre, siccome aumentando quanto si vuole il numero di questi lati, le loro aree rimangono sempre fra loro come i quadrati dei raggi de'circoli circoscritti, essi hanno con facilità riconosciuto che la medesima cosa doveva necessariamente aver luogo, per i circoli medesimi a cui questi poligoni si avvicinano continuamente, e fino a differirne tanto poco quanto si vuole; ma ciò non bastava, bisognava dimostrare rigorosamente che la cosa era realmente così; e questo è ciò che fecero provando che qualunque supposizione contraria faceva necessariamente cadere in un'assurdità.

Gli antichi hanno dimostrato nella medesima maniera, che i volumi delle sfere stanno fra loro come i cubi dei loro diametri; che le piramidi della medesima altezza stanno come le loro basi, che il cono è il terzo di un cilindro della medesima base e della medesima altezza.

Spesso, per meglio discutere il loro oggetto, gli antichi introducevano nel medesimo tempo come ausiliari, i poligoni inscritti e i poligoni circoscritti, che paragonavano gli uni agli altri. Con ciò essi riserravano sempre più la curva compresa fra queste figure rettilinee, e si rendevano con maggior facilità padroni delle proprietà di questa grandezza media.

154. Essi usavano egualmente riguardo alle superficie curve e ai volumi dei corpi. Essi gl'immaginavano nel medesimo tempo inscritti e circoscritti ad altre superficie, delle quali essi aumentavano gradatamente il numero dei lati e delle zone, in modo, da riserrare sempre più fra gli uni e le altre, la superficie proposta. La legge di continuità loro indicava ancora le proprietà di questa figura media, ed essi le verificavano per mezzo della riduzione all'assurdo, assicurandosi con una dimostrazione rigorosa, che qualunque supposizione contraria conduceva infallibilmente a qualche contradizione.

È in questa guisa che Archimede ha dimostrato che la superficie convessa di un cono retto, è eguale all'area del circolo che ha per raggio la media proporzionale, fra il lato del cono e il raggio del circolo della base; che l'area totale della sfera è quadrupla di uno dei suoi circoli grandi, e che quella di una qualunque delle sue zone, è eguale alla circonferenza del gran circolo, moltiplicata per l'altezza di questa zona.

Per mezzo ancora della riduzione all'assurdo gli antichi estendevano alle quantità incommensurabili i rapporti che essi avevano scoperti fra le quantità commensurabili. Questa dottrina è certamente bellissima e molto preziosa; essa porta in se il carattere della più perfetta evidenza, e non permette che si perda di vista il suo oggetto: questo era il metodo d'invenzione degli antichi, esso è ancora utilissimo al giorno d'oggi, perchè esercita il giudizio, accostuma al rigore delle dimostrazioni, e contiene il germe dell'analisi infinitesimale.

155. Osservando con attenzione i processi del metodo di esaustione, vediamo che essi si riducono sempre ad introdurre quantità ausiliari nella ricerca delle proprietà o delle relazioni di quelle che sono proposte: queste sono considerate come i termini estremi di cui i primi si suppongono avvicinarsi continuamente, e la legge di continuità che essi seguono in questo avvicinamento, indica le modificazioni con le quali possiamo passare dalle proprietà conosciute di queste ausiliari, alle proprietà fino allora incognite delle quantità proposte.

Il metodo d'esaustione ha perciò essenzialmente il medesimo scopo, e segue nel suo cammino i medesimi principii dell'analisi infinitesimale. Ed è sempre il medesimo sistema ausiliare di quantità conosciute, legato da una parte a quello che si cerca di conoscere, nel mentre che da un'altra parte, rimane a questo sistema assai d'arbitrario perchè si possa a piacere avvicinarlo per gradi al sistema proposto, il che fa conoscere per induzione le relazioni cercate. Non rimane più allora, che constatare la certezza di queste relazioni, e questo è ciò che si ottiene per mezzo della riduzione all'assurdo.

156. Il Newton fece fare un gran passo a questa dottrina, per mezzo della sua teoria delle prime e dell'ultime ragioni, che sono esattamente ciò che fa conoscere la legge di continuità nel ravvicinamento graduale del sistema ausiliare col sistema indicato. Con questa nuova teoria, egli estese i principii del metodo di esaustione e ne rese più semplici i suoi processi, sbarazzandolo dalla necessità che si era imposto, di constatare sempre per mezzo della riduzione all'assurdo, l'esattezza delle relazioni che esso giunge a scoprire, e provando che queste relazioni sono sufficientemente stabilite, dal modo medesimo impiegato per ottenerle. Questo è ciò che infatti annunzia il Newton, nel terminare di esporre questa teoria. » Ho cominciato, dice egli, da questi lemmi, per evitare » di dedurre delle lunghe dimostrazioni per mezzo dell'assurdo, secondo il me- » todo degli antichi geometri. »

Questo grand' uomo fece fare in seguito, un secondo passo molto più considerabile ancora a questa dottrina, riducendo il suo metodo delle prime ed ultime ragioni, in un algoritmo regolare, col suo calcolo delle flussioni. Per mezzo di questo calcolo, esso introdusse nell'analisi algebrica, non solamente questa prime ed ultime ragioni, ma ancora i loro termini separatamente presi, vale a dire, isolatamente il numeratore a il denominatore della frazione che rappresenta ciascuna di loro, modificazione della più alta importanza, a motivo dei nuovi mezzi di trasformazione che essa somministra. Sopra a ciò ritorneremo in seguito. Il Newton non ebbe però solo questa gloria, esso la divise col Leibnizio, il quale ebbe di più il vantaggio di pubblicare il suo algoritmo il primo, e che essendo stato potentemente secondato da altri geometri celebri che abbracciarono subito il suo metodo, gli fecero fare progressi molto più rapidi, che non potette farne nel medesimo tempo il calcolo delle flussioni.

157. Il Cavalieri fu il precursore dei sapienti ai quali dobbiamo l'analisi infinitesimale; egli ne aprì loro la carriera con la sua *Geometria degl' indivisibili.*

Nel metodo degli indivisibili, si considerano le linee come composte di punti, le superficie come composte di linee, i volumi come composti di superficie.

Queste ipotesi sono assurde certamente, e non dobbiamo impiegarle che con circospezione, ma bisogna considerarle come mezzi di abbreviazione, per mezzo dei quali si ottiene prontamente e facilmente, in molti casi, ciò che non si potrebbe scoprire che con processi lunghi e spinosi, seguendo strettamente il metodo di esaustione. Se per esempio si tratta, di provare che due piramidi della medesima base e della medesima altezza hanno ancora i medesimi volumi. Si considerano come composta l' una e l' altra di un' infinità di superficie piane egualmente distanti, che ne sono gli elementi; ora, siccome questi elementi sono eguali ciascuno a ciascuno, e che il loro numero è il medesimo da una parte e dall' altra, se ne conclude che i volumi delle piramidi che sono la somme rerespettive di questi elementi, sono eguali fra loro.

158. Sia AB (*Tav.* CV, *fig.* 1) il diametro di un semicircolo ACB; sia ABFD il rettangolo circoscritto, CG il raggio perpendicolare a DF; siano di più condotte le due diagonali CD, CF, e finalmente da un punto qualunque *m* della retta AD, si conduca la retta *mnpg* perpendicolare a CG, la quale taglierà la circonferenza al punto *n*, a la diagonale CD al punto *p*.

Concepiamo che tutta la figura giri intorno di CG come asse, il quarto di circolo ACG genererà il volume della sfera di cui il diametro e AB, il rettangolo ADCG genererà il cilindro retto circoscritto, vale a dire avente il medesimo diametro; il triangolo isoscele rettangolo CGD genererà un cono retto avente le linee eguali CG, DG, per altezza e per raggio della sua base; e finalmente le tre rette o segmenti di retta *mg*, *ng*, *pg*, genereranno ciascuna un circolo il di cui centro sarà al punto *g*.

Ora il primo di questi tre circoli è l' elemento del cilindro, il secondo è l'elemento della semisfera e il terzo del cono.

Di più l' aree di questi circoli essendo come i quadrati dei loro raggi, e questi tre raggi potendo visibilmente formare l' ipotenusa e i due piccoli lati di un triangolo rettangolo, è evidente che il primo di questi circoli è eguale alla somma degli altri due: vale a dire, che l' elemento del cilindro è eguale alla somma degli elementi corrispondenti della semisfera e del cono, e siccome segue lo stesso di tutti gli altri elementi, ne viene che il volume totale del cilindro, è eguale alla somma del volume totale della semisfera, e del volume totale del cono.

Ma si sa d' altra parte che il volume del cono è il terzo di quello del cilindro; dunque quello della sfera ne è i due terzi: dunque il volume della sfera

intero è i due terzi del volume del cilindro circoscritto, come fu scoperto ancora da Archimede.

159. Il Cavalieri avvertì ben positivamente che il suo metodo non è che un corollario del metodo di esaustione; ma egli confessa che non saprebbe darne una dimostrazione rigorosa. I gran geometri che lo seguirono ne compresero ben tosto lo spirito; esso fu in gran voga fra loro, fino alla scoperta dei nuovi calcoli, e questi non tennero conto dell'obiezioni che si elevarono contro di esso allora, come i Bernoulli non lo tennero di quelle che si elevarono dopo contro l'analisi infinitesimale. A questo metodo degl' indivisibili sono debitori Pascal e il Roberval dei successi delle loro profonde ricerche sopra la cicloide, ed ecco come il primo di questi autori famosi, si espresse relativamente a ciò:

» Ho voluto fare questo avvertimento, per provare che tutto ciò che è dimostrato » dalle vere regole degl' indivisibili, si dimostrerà ancora a rigore e alla maniera » degli antichi; e che uno di questi metodi non differisce dall'altro che per la » maniera di parlarne, il che non può offendere le persone ragioneveli, quando » una volta sono avvertite di quello che con ciò s'intende. Ed è per questo che » in seguito non farò alcuna difficoltà di usare di questo linguaggio degl' indivi- » sibili, *la somma delle linee* o *la somma dei piani*; non farò alcuna diffi- » coltà di usare di quest' espressione, *la somma dell'ordinate*, il che sembra » non essere geometrico, a quelli che non intendono la dottrina degl'indivisi- » bili, e che s'immaginano che sia peccare contro la geometria, di esprimere un » piano per un numero indefinito di linee; il che non dipende che dalla loro » mancanza d' intelligenza, poichè con ciò non s' intende altra cosa, se non che » la somma di un numero indefinito di rettangoli, fatti da ciascuna ordinata » con ciascuna delle piccole porzioni eguali del diametro, di cui la somma è » certamente un piano. Di modo che quando si parla *della somma di una mol-* » *titudine indefinita di linee*, si ha sempre riguardo ad una data retta, per le » porzioni eguali e indefinite della quale esse siano moltiplicate.

» Ecco certamente più di quello che era necessario, per fare intendere che il » senso di queste sorti di espressioni, *la somma delle linee*, *la somma dei* » *piani*, ec., non è che rigorosamente conforme alla pura geometria. »

160. Questo periodo merita osservazione, non solamente perchè prova che i geometri sapevano benissimo apprezzare il merito del metodo degli indivisibili, ma ancora perchè prova che la nozione dell' infinito matematico nel senso medesimo che gli si attribuisce al giorno d'oggi, non era estraneo a questi geometri; poichè è evidente per quello abbiamo citato del Pascal, che esso attaccava alla parola *indefinito* l'istessa significazione che noi attacchiamo alla parola *infinito*, che egli chiamava semplicemente *piccolo* ciò che per noi si chiama *infinitamente piccolo*, e che trascurava senza scrupolo queste piccole quantità a fronte delle quantità finite: mentre si vede che il Pascal riguardava come semplici rettangoli i trapezii o piccole porzioni dell' area della curva comprese fra due ordinate consecutive, trascurando per conseguenza i piccoli triangoli mistilinei che hanno per basi le differenze di queste ordinate. Però veruno ha tentato di rimproverare al Pascal il suo difetto di severità.

Il Roberval impiega continuamente l'espressioni egualmente di *infinito* e d'*infinitamente piccolo*, nel senso che gli diamo al giorno d'oggi, e dice formalmente che si deve trascurare le quantità infinitamente piccole a fronte delle quantità finite, e queste a fronte delle quantità infinite.

Si sapeva dunque fin da quel tempo che il metodo degl' indivisibili, e tutti quelli del medesimo genere che si potrebbero immaginare, non erano altro che formule di abbreviazione, utilissime per eludere le lunghezze del metodo di esaustione, senza nuocere in alcun modo all' esattezza dei suoi risultamenti.

I geometri che sono venuti in seguito se ne servivano egualmente da lungo tempo, quando i calcoli differenziale e integrale furono immaginati. Non deve dunque fare stupore che il Leibnizio non si sia dato pena di dimostrare rigorosamente un principio che era considerato come assioma. Le obiezioni non si sono elevate contro questo principio che quando esso è stato ridotto in algoritmo, come se si fosse avuto dispiacere che le strade scientifiche tanto difficili a percorrersi, fossero diventate tutto ad un tratto piane e accessibili a tutto il mondo. Termineremo queste osservazioni con uno o due esempii.

161. L'algebra ordinaria insegna a trovare la somma di un seguito qualunque di termini presi nella serie dei numeri naturali; la somma dei loro quadrati, quella dei loro cubi, ec., e questa conoscenza dà alla geometria degl'indivisibili il mezzo di valutare l'area di un gran numero di figure rettilinee e curvilinee, e i valori di un gran numero di corpi.

Sia per esempio un triangolo: abbassiamo dal suo vertice sopra la base una perpendicolare, dividiamo questa perpendicolare in un'infinità di parti eguali, e conduciamo da ciascun punto di divisione una retta paralella alla base, e che sia terminata ai due altri lati del triangolo.

Seguendo i principii della geometria degl'indivisibili, possiamo considerare l'area del triangolo come la somma di tutte le paralelle che si considerano come gli elementi; ora, per la proprietà del triangolo queste rette sono proporzionali alle loro distanze dal vertice, dunque l'altezza essendo supposta divisa in parti eguali, queste paralelle crescono in progressione aritmetica o per differenza, di cui il primo termine è zero.

Ma in qualunque progressione per differenza di cui il primo termine sia zero, la somma di tutti i termini è eguale all'ultimo moltiplicata per la metà del numero di questi termini. Ora, qui la somma dei termini è rappresentata dall'area del triangolo, l'ultimo termine per la base e il numero dei termini per l'altezza. Dunque l'area di qualunque triangolo è eguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

162. Si abbia una piramide: abbassiamo una perpendicolare dal suo vertice sopra la base, dividiamo questa perpendicolare in un'infinità di parti eguali, e per ciascun punto di divisione facciamo passare un piano paralello alla base di questa piramide.

Seguendo i principii della geometria degl'indivisibili, l'intersezione di ciascuno di questi piani col volume della piramide sarà uno degli elementi di questo volume, e questo non sarà altra cosa che la somma di tutti questi elementi.

Ma per le proprietà della piramide, questi elementi stanno fra loro come i quadrati delle loro distanze al vertice. Chiamando dunque B la base della piramide, H la sua altezza, b uno qualunque degli elementi dei quali abbiamo parlato, h la sua distanza al vertice, e V il volume della piramide, si avrà

$$B : b :: H^2 : h^2,$$

dunque

$$b = \frac{B}{H^2} \cdot h^2.$$

Dunque V che è la somma di tutti questi elementi, è eguale alla costante $\frac{B}{H^2}$ moltiplicata per la somma dei quadrati h^2; e poiche le distanze h crescono in progressione per differenza di cui il primo termine è zero e l'ultimo H,

vale a dire come i numeri naturali da o fino ad H, le quantità h^2 rappresenteranno i loro quadrati da o fino ad H^2.

Ora l'algebra ordinaria insegna che la somma dei quadrati dei numeri naturali da o fino ad H^2 inclusivamente è

$$\frac{2H^3+3H^2+H}{6}.$$

Ma qui il numero H essendo infinito, tutti i termini che seguono il primo nel numeratore spariscono a fronte di questo primo termine: dunque questa somma dei quadrati si riduce a $\frac{1}{3}H^3$.

Moltiplicando perciò questo valore per la costante $\frac{B}{H^2}$ trovata di sopra, si avrà per il volume cercato

$$V=\frac{1}{3}BH;$$

vale a dire, che il volume della piramide è il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Si prova con un metodo simile, che in generale, l'area di qualunque curva che ha per equazione

$$ay^m=x^n,$$

è

$$\frac{m}{m+n}.XY;$$

Y rappresentando l'ultima ordinata, X l'ascissa che gli corrisponde, m, ed n degli esponenti qualunque, interi, frazionari, positivi o negativi.

Così il metodo degl'indivisibili supplisce in certo modo al calcolo integrale; possiamo considerarlo come corrispondente all'integrazione dei monomii, il che era certamente una gran scoperta al tempo del Cavalieri.

163. Esaminando il metodo degl'indeterminati del Descartes, sembra che esso toccasse ben da vicino l'analisi infinitesimale, o piuttosto pare che l'analisi infinitesimale non sia altra cosa che una felice applicazione del metodo degl'indeterminati.

Il principio fondamentale del metodo degl'indeterminati, ossia dei coefficienti indeterminati, consiste in ciò che se si ha un'equazione di questa forma

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ec.}=o.$$

nella quale i coefficienti A, B, C, ec. siano costanti, e x una quantità variabile che possa supporsi tanto piccola quanto si vuole; bisogna necessariamente che ciascuno di questi coefficienti preso separatamente sia eguale a zero; vale a dire, che si abbia sempre

$$A=o,\quad B=o,\quad C=o,\quad \text{ec.},$$

qualunque sia d'altronde il numero dei termini di quest'equazione.

Infatti, poichè si può supporre x tanto piccolo quanto si vuole, potremo ancora rendere tanto piccola quanto vorremo la somma di tutti i termini che hanno x per fattore, vale a dire la somma di tutti i termini che seguono il primo.

Dunque questo primo termine A differisca tanto poco quanto si vuole da zero; ma A essendo una costante, non può differire tanto poco quanto si vuole da o, poichè allora essa sarebbe variabile: dunque essa non può essere che o: dunque si ha di già $A=o$, rimane dunque

$$Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ ec.}=o$$

si divida tutto per x, viene

$$B+Cx+Dx^2+\text{ ec.}=o,$$

donde si deduce $B=o$, col medesimo ragionamento che abbiamo fatto per provare che si aveva $A=o$; il medesimo ragionamento proverà ancora che si ha similmente

$$C=o,\quad D=o,\text{ ec.}$$

164. Ciò premesso, si abbia un'equazione a due termini solamente

$$A+Bx=o,$$

nella quale il primo termine sia costante, e il secondo capace di esser reso tanto piccolo quanto si vuole: quest'equazione non potrà sussistere per quello che abbiamo detto, se non che nel caso in cui i termini A e Bx non siano ciascuno in particolare eguali a zero. Dunque possiamo stabilire come principio generale, e come corollario immediato del metodo degl' indeterminati che, *se la somma o la differenza delle due pretese quantità è eguale a zero, e che una delle due possa supporsi tanto piccola quanto si vuole, nel mentre che l'altra non contenga alcuna arbitraria, queste due pretese quantità saranno ciascuna in particolare eguali a zero.*

165. Questo principio basta solo per risolvere per mezzo dell'algebra ordinaria tutte le questioni che spettano all'analisi infinitesimale. I processi respettivi di ambedue i metodi, portati alla semplicità che debbono essere, sono assolutamente i medesimi: tutta la differenza è nella maniera di considerare la questione: le quantità che si *trascurano* nell'uno come infinitamente piccole, si sottintendono nell'altro, quantunque considerate come finite, perchè è dimostrato che esse debbono eliminarsi da se medesime, vale a dire, distruggersi le une per mezzo dell'altre nel risultamento del calcolo.

Infatti, è facile di vedere che questo risultamento non può essere che un'equazione a due termini di cui ciascuno in particolare è eguale a zero: possiamo dunque sottintendere anticipatamente nel corso del calcolo tutti i termini, che si riportano a quella di queste due equazioni delle quali non vogliamo fare uso.

Applichiamo questa teoria degl' indeterminati ad alcuni esempi, prendendo per primo esempio quello di risolvere il problema di condurre una tangente al circolo, e cominciando dal risolverlo per mezzo delle considerazioni che possono aver luogo a stabilire i principii del calcolo infinitesimale, e quindi risolvendolo per mezzo del calcolo degl' indeterminati che ci occupa.

166. Proponiamoci di condurre una tangente al punto dato M della circonferenza MBD (*Tav.* CV, *fig.* 2).

Sia C il centro del circolo, DCB l'asse; supponiamo l'ascissa $DP=x$, l'ordinata corrispondente $MP=y$, e sia TP la suttangente cercata.

Per trovarla, consideriamo il circolo come un poligono di un grandissimo numero di lati; sia MN uno di questi lati, prolunghiamolo fino all'asse, questa sarà evidentemente la tangente in questione, poichè questa linea non penetrerà nell'interno del poligono; si abbassi di più la perpendicolare MO sopra NQ,

paralella ad MP, e si chiami a il raggio del circolo: premesso ciò avremo evidentemente

$$MO : NO :: TP : MP,$$

ovvero

$$\frac{MO}{NO} = \frac{TP}{y}.$$

Da un'altra parte, l'equazione della curva essendo per il punto M, $y^2 = 2ax - x^2$, essa sarà per il punto N

$$(y+NO)^2 = 2a(x+MO)-(x+MO)^2,$$

togliendo da quest'equazione la prima, trovata per il punto M e riducendo, si ha

$$\frac{MO}{NO} = \frac{2y+NO}{2a-2x-MO};$$

eguagliando perciò questo valore di $\frac{MO}{NO}$ a quello che è stato trovato di sopra, e moltiplicando per y, viene

$$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}.$$

Se dunque MO e NO fossero conosciute, si avrebbe il valore cercato di TP; ora queste quantità MO, NO sono piccolissime, poichè ciascuna è minore del lato MN, che per ipotesi, è piccolissimo. Dunque possiamo trascurare senza errore sensibile queste quantità a fronte delle quantità $2y$ e $2x-2a$ alle quali esse sono aggiunte. Dunque l'equazione si riduce a

$$TP = \frac{y^2}{a-x},$$

ciò che bisognava trovare.

167. Se questo risultamento non è assolutamente esatto, è almeno evidente che nella pratica può passare per tale, poichè le quantità MO, NO sono estremamente piccole; ma qualche persona che non avesse alcun'idea della dottrina degl'infiniti, rimarrebbe forse attonita, se le fosse detto che l'equazione

$$TP = \frac{y^2}{a-x},$$

non solamente si avvicina molto alla verità, ma è realmente della più perfetta esattezza; e questa è però una cosa della quale è facile assicurarsi cercando TP, per mezzo del principio che la tangente è perpendicolare all'estremità del raggio; poichè è evidente che i triangoli simili CPM, MPT danno

$$CP : MP :: MP : TP;$$

donde si deduce

$$TP = \frac{\overline{MP}^2}{CP} = \frac{y^2}{a-x}$$

come abbiamo trovato di sopra.

168. Cominciamo ora dal vedere come nell' equazione

$$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$$

trovata (n.° 166), è potuto succedere che trascurando MO ed NO, non sia punto alterato il risultamento, o piuttosto come questo risultamento è divenuto esatto con la soppressione di queste quantità, e perchè non lo era avanti.

Ora, possiamo con molta semplicità render ragione di ciò che è succeduto nella soluzione del problema che abbiamo trattato sopra, osservando che l'ipotesi donde siamo partiti essendo falsa, poichè è assolutamente impossibile che un circolo possa esser giammai considerato come un vero poligono, qualunque possa essere il numero di questi lati, ha dovuto resultare da quest' ipotesi un errore qualunque nell' equazione

$$TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO},$$

e che il risultamento $TP = \frac{y^2}{a-x}$, essendo nientedimeno certamente esatto, come si prova paragonando i due triangoli CPM, MPT, si è potuto trascurare MO ed NO nella prima equazione, ed anzi abbiamo dovuto farlo per rettificare il calcolo, e distruggere l'errore al quale aveva dato luogo la falsa ipotesi donde eravamo partiti. Trascurare le quantità di questa natura è dunque non solamente permesso in simili casi; ma bisogna farlo e questa è la sola maniera di esprimere esattamente le condizioni del problema.

169. Il risultamento esatto $TP = \frac{y^2}{a-x}$ non è perciò stato ottenuto che per mezzo di una compensazione di errori, e questa compensazione può esser resa più sensibile ancora, trattando l'esempio riportato di sopra in una maniera un poco differente, vale a dire considerando il circolo come una vera curva, e non come un poligono.

Per eseguir ciò, da un punto R, preso arbitrariamente ad una distanza qualunque dal punto M, si conduca la linea RS paralella ad MP, e per i punti R, ed M si tiri la secante RT'; avremo evidentemente

$$T'P : MP :: MZ : RZ,$$

e quindi T'P ovvero

$$TP + T'T = MP\,\frac{MZ}{RZ}.$$

Premesso ciò, se immaginiamo che RS si muova paralellamente a se medesima avvicinandosi continuamente ad MP, è evidente che il punto T' si avvicinerà nel medesimo tempo sempre più al punto T, e che potremo per conseguenza rendere la linea T'T tanto piccola quanto vorremo, senza che la proporzione stabilita di sopra cessi di aver luogo. Se dunque si trascura questa quantità T'T nell' equazione che abbiamo trovato, ne resulterà per verità un errore nell' equazione $TP = MP\,\frac{MZ}{RZ}$ alla quale la prima sarà allora ridotta; ma quest' errore potrà essere diminuito tanto quanto vorremo, facendo avvicinare tanto quanto sarà necessario RS a MP: vale a dire che il rapporto dei due membri di que-

st' equazione differirà tanto poco quanto vorremo dal rapporto di eguaglianza.

Similmente abbiamo

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ},$$

e quest' equazione è perfettamente esatta, qualunque sia la posizione del punto R, vale a dire qualunque siano i valori di MZ e di RZ. Ma più RS avvicinerà ad MP, più queste linee MZ e RZ saranno piccole; e pertanto, se si trascurano nel secondo membro di quest' equazione, l' errore che ne risulterà nell' equazione $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$ alla quale essa sarà ridotta allora, potrà come nella prima esser reso tanto piccolo quanto lo giudicheremo a proposito

Ciò essendo, senza aver riguardo a degli errori che saremo sempre padroni di diminuire quanto vorremo, trattiamo le due equazioni

$$TP = MP\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

che abbiamo trovato, come se l' una e l' altra fossero perfettamente esatte; sostituendo perciò nell' ultima il valore di $\frac{MZ}{RZ}$ ricavato dall' altra, si ha per risultamento

$$TP = \frac{y^2}{a-x}$$

come di sopra.

Questo risultamento è perfettamente giusto, poichè è conforme a quello che abbiamo ottenuto dal paragone dei triangoli CPM, MPT; e tuttavia l' equazioni

$$TP = y\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

donde l' abbiamo dedotto, sono certamente false tutte due, poichè la distanza da RS a MP non è stata supposta nulla, nè piccolissima, ma bensì eguale ad una linea qualunque arbitraria. Bisogna dunque per conseguenza necessariamente che gli errori si siano compensati scambievolmente, nel paragonare le due equazioni erronee.

170. Ecco dunque il fatto degli errori compensati ben compreso e ben provato; si tratta ora di spiegarlo, di ricercare il segno al quale si riconosce che la compensazione ha luogo nei calcoli simili al precedente, e i mezzi di produrla in ciascuno caso particolare.

Ora, basta a ciò l' osservare che gli errori commessi nell' equazioni

$$TP = y\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$$

potendo rendersi tanto piccoli quanto si vuole, quello che avrebbe luogo quando se ne trovasse uno nell' equazione resultante

$$TP = \frac{y^2}{a-x},$$

potrebbe egualmente esser reso tanto piccolo quanto si volesse, ed esso dipenderebbe dalla distanza arbitraria delle linee MP, RS. Ora ciò non segue, poichè il punto M di dove deve passare la tangente essendo dato, non si trova alcuna delle quantità a, x, y, TP di quest'equazione che sia arbitraria; dunque effettivamente non può esservi alcun errore in quest'equazione.

Segue da ciò che la compensazione degli errori che si trovavano nell'equazioni

$$TP = y\frac{MZ}{RZ}, \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

si manifesta nel risultamento, con l'assenza delle quantità MZ, RZ che cagionavano questi errori; e che per conseguenza dopo avere introdotto queste quantità nel calcolo per facilitare l'espressione delle condizioni del problema, e averle trattate nell'equazioni che esprimevano queste condizioni come nulle in paragone alle quantità proposte, per render più semplici quest'equazioni, non vi è che da eliminare queste medesime quantità dall'equazioni ove possano trovarsi ancora, per fare sparire gli errori che avevano cagionati, e ottenere un risultamento che sia perfettamente esatto.

171. L'inventore ha perciò potuto essere condotto alla sua scoperta con un ragionamento ben semplice: egli avrà potuto dire, se in luogo di una quantità proposta, impiego nel calcolo un'altra quantità che non le sia eguale, ne resulterà un errore qualunque; ma se la differenza delle quantità impiegate l'una per l'altra è arbitraria, e che sia padrone di renderla tanto piccola quanto vorrò, quest'errore non sarà pericoloso; potrò ancora nel medesimo tempo commettere più errori simili senza che ne segua alcun inconveniente, poichè rimarrei sempre padrone del grado di esattezza che vorrei dare ai miei risultamenti.

Vi è di più ancora, ed è che potrebbe succedere che questi errori si compensassero scambievolmente, e che così i miei risultamenti diventassero perfettamente esatti. Ma come operare questa compensazione, e in tutti i casi? Questo è ciò che un poco di riflessione avrà potuto fare scoprire; infatti, l'inventore avrà potuto dire, supponiamo per un istante che la compensazione desiderata abbia luogo, e vediamo da qual segno essa deve manifestarsi nel risultamento del calcolo. Ora, ciò che deve naturalmente esser succeduto, è che le quantità che cagionarono questi errori essendo scomparse, gli errori sono scomparsi egualmente; mentre queste quantità come MZ, RZ avendo per ipotesi valori arbitrari, esse non debbono più entrare in queste formule o risultamenti che non lo sono, e che essendo divenuti esatti per supposizione, dipendono unicamente, non dalla volontà del calcolatore, ma dalla natura delle cose delle quali ci si era proposti di trovare la relazione espressa da questi risultamenti. Dunque il segno che annunzia che la compensazione desiderata ha luogo, è l'assenza delle quantità arbitrarie che producevano questi errori; e pertanto, non si tratta, per operare questa compensazione, che di eliminare queste quantità arbitrarie.

172. Risolviamo ora il medesimo problema di condurre una tangente al circolo per mezzo del calcolo degl'indeterminati, e riprendiamo l'equazione che abbiamo trovata (n.° 169)

$$TP + T'T = y\frac{MZ}{RZ} \text{ e } \frac{MZ}{RZ} = \frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ},$$

equazioni perfettamente esatte l'una e l'altra, qualunque siano i valori di MZ e di RZ; ricavando dunque il valore di $\frac{MZ}{RZ}$ dalla prima di queste equazioni e

sostituendolo nella seconda si ha

$$\frac{TP+TT'}{y}=\frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ},$$

equazione esatta e che deve aver luogo, qualunque sia la distanza che vorremo mettere fra le linee RS ed MP.

Ora, con facilità si vede che quest'equazione si può mettere sotto la forma seguente:

$$\left(\frac{TP}{y}-\frac{y}{a-x}\right)+\left[\frac{T'T}{y}-\frac{yMZ+aRZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}\right]=0,$$

nella quale il primo termine non contiene che quantità date o determinate dalle condizioni del problema, e di cui il secondo contiene dell'arbitrarie, e può supporsi tanto piccolo quanto si vuole, senza niente cangiare alle quantità che sono contenute nel primo termine, poichè siamo padroni di supporre RS tanto prossima quanto si vuole a MP. Dunque seguendo la teoria degl'indeterminati, ciascuno dei termini di quest'equazione, preso separatamente, dev'essere eguale a zero; vale a dire, che quest'equazione può decomporsi nelle due altre

$$\frac{TP}{y}-\frac{y}{a-x}=0 \quad e \quad \frac{T'T}{y}-\frac{yMZ+aRZ-xRZ}{(a-x)(2a-2x-MZ)}=0,$$

delle quali la prima non contiene che quantità indicate, e la seconda contiene dell'arbitrarie. Ma noi non abbiamo bisogno che della prima, poichè è quella che ci dà il valore cercato di TP, tale come l'abbiamo di già trovato avanti. Dunque quando ancora si fossero commessi degli errori nel corso del calcolo, purchè quest'errori non cadessero che sull'ultima equazione, l'esattezza del risultamento cercato non ne avrebbe punto sofferto; ed è effettivamente ciò che sarebbe succeduto se si fossero trattate MZ, RZ, e T'T come nulle in paragone alle quantità proposta a, x, y, nell'equazioni primitive; per verità avremmo, commesso degli errori nell'espressione delle condizioni del problema, ma questi errori si sarebbero distrutti da se medesimi per compensazione, e il risultamento del quale abbiamo bisogno non sarebbe stato in alcun modo alterato.

173. L'analisi infinitesimale, riguardata sotto questo rapporto, non è dunque altra cosa che un'applicazione, o, se vogliamo, un'estensione del metodo degl'indeterminati; poichè, seguendo questo metodo, si dice, che quando si trascura una quantità infinitamente piccola, non si fa, a parlar propriamente, che, *sottintenderla*, e non supporla nulla, per esempio, quando invece delle due equazioni esatte

$$TP+T'T=MP\times\frac{MZ}{RZ}$$

e

$$\frac{MZ}{RZ}=\frac{2y+RZ}{2a-2x-MZ}$$

trovate (n.° 169), s'impiegano le due equazioni imperfette

$$TP=MP\times\frac{MZ}{RZ} \quad e \quad \frac{MZ}{RZ}=\frac{y}{a-x}$$

si sa molto bene che si commette un errore, e si mettano, per così dire, mentalmente sotto questa forma

$$\frac{MZ}{RZ} \times MP = TP + \varphi \quad e \quad \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x} + \varphi';$$

φ e φ' essendo quantità necessarie perchè queste equazioni abbiano luogo esattamente: egualmente nell'equazione

$$\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x},$$

resultante dalle due equazioni imperfette di sopra, ci si sottintende la quantità φ'', tale che

$$\left(\frac{TP}{MP} - \frac{y}{a-x}\right) + \varphi'' = 0$$

sia un'equazione esatta; ma si riconosce ben tosto che quest'ultima quantità φ'' è eguale a zero, perchè se essa non fosse nulla, essa non potrebbe essere che infinitamente piccola, nel mentre che nel primo termine non vi entra alcuna quantità infinitesimale; ora ciò è impossibile, a meno che ciascuno di questi termini, preso separatamente, non sia eguale a zero; donde si conclude che si ha esattamente

$$\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x};$$

e pertanto, le quantità φ, φ', φ'', sono state, non soppresse come nulle, ma semplicemente sottintese per rendere più semplice il calcolo.

174. Proponiamoci per secondo esempio di provare che l'area di un circolo è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio; vale a dire, che chiamando R questo raggio, p il rapporto della circonferenza a questo medesimo raggio, e per conseguenza pR questa circonferenza, S la superficie del circolo, si deve avere

$$S = \frac{1}{2} pR^2.$$

Perciò, s'inscriva al circolo un poligono regolare, poi si raddoppi successivamente il numero di questi lati fino a tanto che l'area di questo poligono differisca tanto poco quanto vorremo dall'area del circolo. Nel medesimo tempo il perimetro del poligono differirà tanto poco quanto vorremo dalla circonferenza pR, e l'apotema tanto poco quanto vorremo dal raggio R. Dunque l'area S differirà ancora tanto poco quanto vorremo da $\frac{1}{2} pR^2$; dunque se facciamo

$$S = \frac{1}{2} pR^2 + \varphi,$$

la quantità φ, se non è zero, potrà almeno supporsi tanto piccola quanto vorremo. Premesso ciò, metto quest'equazione sotto la forma

$$\left(S - \frac{1}{2} pR^2\right) - \varphi = 0,$$

equazione a due termini, di cui il primo non contiene alcun'arbitraria, e di cui il secondo, al contrario, può supporsi tanto piccolo quanto si vuole; dunque, per la teoria degl' indeterminati, ciascuno di questi termini in particolare è eguale a zero: dunque abbiamo

$$S-\frac{1}{2}pR^2=0, \quad \text{ovvero} \quad S=\frac{1}{2}pR^2;$$

ciò che bisognava dimostrare.

175. Sia proposto ora di trovare qual è il valore che bisogna dare ad x, perchè la sua funzione $ax-x^2$ sia un *maximum*.

Il caso del *maximum* deve aver luogo evidentemente, quando aggiungendo all' indeterminata x un valore arbitrario x', l'aumentazione corrispondente alla funzione proposta $ax-x^2$ potrà rendersi tanto piccola quanto si vorrà, rapporto a x', diminuendo questa sempre più.

Ora se si aggiunge a x la quantità x', si avrà per l'aumentazione della funzione proposta

$$a(x+x')-(x+x')^2-(ax-x^2)$$

ovvero riducendo

$$(a-2x)x'-x'^2;$$

e questo è il rapporto di questa quantità a x', ovvero

$$a-2x-x'$$

ciò che si deve poter supporre tanto piccolo quanto si vuole. Sia questa quantità eguale φ, avremo dunque

$$a-2x-x'=\varphi,$$

ovvero

$$(a-2x)-(x'+\varphi)=0;$$

equazione a due termini, di cui il primo non contiene alcun' arbitraria e di cui il secondo può supporsi tanto piccolo quanto si vuole: dunque per la teoria degl' indeterminati, ciascuno di questi termini preso separatamente è eguale a zero. Dunque abbiamo

$$a-2x=0, \quad \text{ovvero} \quad x=\frac{1}{2}a,$$

ciò che bisognava trovare

176. Sia proposto di provare che due piramidi delle medesime basi e delle medesime altezze, sono eguali fra loro.

Concepiamo queste piramidi divise in un medesimo numero di strati tutti della medesima altezza. Ciascuno di questi strati potrà evidentemente esser considerato come composto di due parti, di cui l'una sarà un prisma avente per base la più piccola delle due che terminano lo strato, e l'altra sarà la specie d'unghia che circonda questo prisma.

Se dunque si chiamano V, V', i volumi delle due piramidi, P, P', le somme respettive dei prismi dei quali abbiamo parlato, q, q' le somme respettive dell'unghie, avremo

$$V=P+q, \quad V'=P'+q';$$

ma è evidente che $P=P'$, dunque

$$V-q=V'-q', \quad \text{ossia} \quad (V-V')-(q-q')=0.$$

Ma il primo termine di quest' equazione non contiene alcun' arbitraria, e il secondo può evidentemente supporsi tanto piccolo quanto si vuole. Dunque per la teoria degl' indeterminati, ciascuno di questi termini in particolare è eguale a zero. Dunque si ha $V - V' = o$, ovvero $V = V'$; ciò che bisognava dimostrare.

177. Sia proposto finalmente di trovare il volume di una piramide la di cui base è B e l'altezza H.

Concepiamo questa piramide divisa in un' infinità di strati della medesima grossezza, sia x la distanza di uno qualunque di questi strati al vertice della piramide, e x' la grossezza di questo strato. Nella piramide, le aree delle sezioni fatte paralellamente alla base stanno come i quadrati delle loro distanze al vertice; dunque la base superiore o piccola base dello strato lontano dal vertice della distanza x, è $\frac{B}{H^2}x^2$. Dunque il volume di questo strato, astrazione fatta dall' unghia è $\frac{B}{H^2}x^2x'$; dunque il volume totale della piramide astrazione fatta dall' unghie, è la somma di tutti questi elementi. E poichè x' può supporsi tanto piccola quanto si vuole, ciascun' unghia può egualmente supporsi tanto piccola quanto si vuole, relativamente al volume dello strato, la somma di tutti gli elementi $\frac{B}{H^2}x^2x'$ differisce perciò tanto poco quanto si vuole dal volume cercato della piramide. Chiamiamo dunque V questo volume, avremo esattamente

$$V = \text{som}\,\frac{B}{H^2}x^2x' + \varphi,$$

φ indicando una quantità che può supporsi tanto piccola quanto si vuole.

Ma poichè B, H e x' sono quantità costanti, vale a dire, le medesime per tutti gli strati, è chiaro che

$$\text{som}\,\frac{B}{H^2}x^2x'$$

è la medesima cosa di

$$\frac{Bx'^3}{H^2}\,\text{som}\left(\frac{x}{x'}\right)^2.$$

Ora $\frac{x}{x'}$ è evidentemente il numero degli strati compresi dal vertice fino ad x, dunque $\text{som}\left(\frac{x}{x'}\right)^2$ per la piramide intera, è la somma dei quadrati dei numeri naturali da o fino ad $\frac{H}{x'}$.

Ma si sa che questa serie dei quadrati dei numeri naturali è

$$\frac{1}{6}\left(\frac{2H^3}{x'^3} + \frac{3H^2}{x'^2} + \frac{H}{x'}\right),$$

sostituendo questa somma nell'equazione trovata di sopra avremo

$$V = \frac{Bx'^3}{6H^2}\left(\frac{2H^3}{x'^3} + \frac{3H^2}{x'^2} + \frac{H}{x'}\right) + \varphi$$

ovvero, trasformando per separare i termini arbitrari da quelli che non lo sono,

$$\left(V-\frac{1}{3}BH\right)-\left[\frac{Bx'^3}{6H^2}\left(\frac{3H^2}{x'^2}+\frac{H}{x'}\right)+\varphi\right]=0,$$

equazione rigorosamente esatta a due termini, di cui il primo non contiene che quantità designate o non arbitrarie, e di cui il secondo può rendersi tanto piccolo quanto si vuole. Dunque ciascuno di questi termini preso separatamente è eguale a zero: dunque abbiamo per il primo

$$V-\frac{1}{3}BH=0 \quad \text{ossia} \quad V=\frac{1}{3}BH,$$

ciò che bisognava dimostrare.

La soluzione data è analoga al metodo degl' indivisibili, o piuttosto è il metodo medesimo degl' indivisibili reso rigoroso da alcune leggere modificazioni, per mezzo del metodo degl' indeterminati: andiamo ora ad applicare questo alla medesima questione, impiegando la notazione dell'analisi infinitesimale, per far vedere come tutti questi metodi sono collegati insieme, o piuttosto come tutti non sono che un solo e medesimo metodo osservato sotto differenti aspetti.

Conservando le denominazioni di sopra, abbiamo dV per l'elemento della piramide. Di più, abbiamo per valore del medesimo elemento, trascurando l' unghia,

$$\frac{B}{H^2}x^2dx;$$

dunque abbiamo esattamente

$$dV=\frac{B}{H^2}x^2dx+\varphi,$$

φ esprimendo una quantità che può supporsi tanto piccola quanto si vuole relativamente a ciascuno degli altri termini.

Prendendo da una parte e dall'altra la somma esatta degli elementi, avremo l' equazione rigorosa

$$V=\text{som}\,\frac{B}{H^2}x^2dx+\text{som}\,\varphi \;\ldots\ldots\; (1).$$

Ora l' integrale ordinario

$$\int\frac{B}{H^2}x^2dx$$

del primo termine del secondo membro è (*Vedi* Integrale),

$$\frac{B}{3H^2}x^3+C,$$

C esprimendo una costante; ma la differenziale esatta di quest' integrale non è

$$\frac{B}{H^2}x^2dx,$$

essa è

$$\frac{B}{3H^2}(x+dx)^3-\frac{B}{3H^2}x^3=\frac{B}{H^2}x^2dx+\frac{B}{3H^2}(3xdx^2+dx^3),$$

vale a dire che abbiamo esattamente

$$d\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)=\frac{B}{H^2}x^2dx+\frac{B}{3H^2}(3xdx^2+dx^3)$$

dunque prendendo da una parte e dall' altra la somma esatta, avremo

$$\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)=\text{som}\,\frac{B}{H^2}x^2dx+\text{som}\,\frac{B}{3H^2}(3xdx^2+dx^3),$$

ovvero trasponendo

$$\text{Som}\,\frac{B}{H^2}x^2dx=\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)-\text{som}\,\frac{B}{3H^2}(3xdx^2+dx^3).$$

Sostituendo nell' equazione (1), avremo esattamente

$$V=\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)-\left[\text{som}\,\frac{B}{3H^2}(3xdx^2+dx^3)-\text{som}\,\varphi\right],$$

equazione nella quale l' ultimo termine solo contiene quantità arbitrarie, e può supporsi tanto piccolo quanto si vuole. Facciamo dunque per abbreviare questo termine eguale φ'; l' equazione diventerà trasportando

$$\left[V-\left(\frac{B}{3H^2}x^3+C\right)\right]-\varphi'=0,$$

equazione di cui per i principii del metodo degl' indeterminati ciascun termine preso separatamente è eguale a zero, il che dà

$$V=\frac{B}{3H^2}x^3+C.$$

Per determinare C, non dobbiamo fare che $x=0$, allora si ha $V=0$, dunque $C=0$, dunque l' equazione si riduce a

$$V=\frac{B}{3H^2}x^3,$$

vale a dire, che il volume della piramide dal vertice fino all' altezza x è $\frac{Bx^3}{3H^2}$;

dunque per avere il volume totale della piramide, non rimane che da supporre $x=H$, il che darà finalmente

$$V=\frac{1}{3}BH.$$

178. Questa soluzione, come l' abbiamo veduto, non è altra cosa che quella che si otterrebbe con i processi dell' analisi infinitesimale, non trascurando niente, e l' analisi infinitesimale ordinaria non è che un' abbreviazione di questi processi, poichè essa non trascura che le quantità φ, φ' le quali non cadono nel risultamento del calcolo, che sopra quella dell' equazioni della quale non abbiamo bisogno, fra le due in cui essa si decompone. Ora ciò che l' analisi infinitesimale trascura così per semplice finzione sotto il nome di quantità infinitamente piccole, si può semplicemente sottintenderlo per conservare il rigore geometrico

in tutto il corso del calcolo: si vede dunque che il calcolo degl' indeterminati dà una dimostrazione rigorosa del calcolo infinitesimale, e che esso dà nel medesimo tempo i mezzi di supplirvi, se vogliamo, con l'analisi ordinaria. Sarebbe stato desiderabile, che si fosse giunti per questa via ai calcoli differenziale e integrale; il che era ancora naturale quanto il cammino che abbiamo preso, e ciò avrebbe prevenuto tutte le difficoltà.

179. Il metodo delle prime ed ultime ragioni o dei limiti, prende ancora la sua origine dal metodo d'esaustione; e a parlar propriamente non è, che uno sviluppo e un metodo reso più semplice di questo. Al Newton dobbiamo quest' utile perfezionamento, e per istruirsi sopra di ciò convien leggere il suo libro dei *Principii*: per il nostro oggetto sarà sufficiente di darne soltanto una succinta idea.

Allorquando due quantità qualunque si suppongano avvicinarsi continuamente l'una all'altra, in modo che il rapporto o quoziente differisca continuamente meno e tanto poco quanto si vuole dall'unità; queste due quantità si dice che hanno per *ultima ragione una ragione d' eguaglianza*.

In generale, allorquando supponiamo che diverse quantità si avvicinino respettivamente ad altre quantità che si considerano come fisse, fino a differirne tutte nel medesimo tempo di tanto poco quanto si vuole; i rapporti che hanno fra loro queste quantità fisse, sono le *ultime ragioni* di quelle che si suppongono avvicinarsi respettivamente e simultaneamente; e queste quantità fisse esse medesime si chiamano *limiti* o *ultimi valori* di quelle che si avvicinano così.

Questi ultimi valori e ultime ragioni si chiamano ancora *primi valori* e *prime ragioni* delle quantità alle quali esse si riferiscono, secondo che le variabili si considerano come avvicinandosi o allontanandosi dalle quantità considerate come fisse le quali servono loro di limite.

180. Questi limiti o quantità, considerate come fisse, possono però essere variabili come sarebbero per esempio, le coordinate di una curva; vale a dire che possono essere non date dalle condizioni della questione, ma solamente determinate dall' ipotesi susseguenti sopra delle quali il calcolo è stabilito. Così, per esempio, quantunque le coordinate di una curva siano comprese fra le quantità che si chiamano variabili, perchè esse non sono del numero delle quantità date; se ci proponiamo una questione da risolvere sopra la curva di cui si tratta, come quella di condurle una tangente, bisognerà per stabilire i nostri ragionamenti ed il nostro calcolo, cominciare dall' attribuire valori determinati a queste coordinate, e continuare a considerarle come fisse fino alla fine del nostro calcolo. Ora queste quantità considerate come fisse, sono comprese come i dati medesimi del problema, fra quelle che si chiamano limiti.

181. Questi limiti sono esattamente le quantità di cui si cerca il rapporto; quelle che si suppongono avvicinarsene gradatamente non sono che quantità ausiliari, che s' introducono per facilitare l' espressione delle condizioni del problema, ma che non possono restare nel calcolo, e che necessariamente bisogna eliminare per ottenere i risultamenti cercati; esse sono per conseguenza quelle che abbiamo chiamato *quantità non designate*, nel mentre che i loro limiti o ultimi valori, sono le quantità delle quali vogliamo ottenere il rapporto, e che si chiamano *quantità designate*.

Si vede così l'analogia che deve esistere fra la teoria delle prime o ultime ragioni, e il metodo infinitesimale. Poichè quelle che in questo si chiamano quantità infinitamente piccole, non sono evidentemente altra cosa, per la definizione che se ne dà in questo calcolo, che la differenza di una quantità qualunque al suo limite, ovvero, se vogliamo, una quantità il di cui limite è zero; e le quantità che hanno per ultima ragione una ragione di eguaglianza, non sono

altra cosa che quelle che, nell'analisi infinitesimale, si chiamano quantità infinitamente poco differenti l'una dall'altra.

182. Da ciò si vede ancora che la nozione di quantità infinitamente piccola non è meno chiara di quella di limite, poichè essa non è altra cosa che la differenza di questo medesimo limite alla quantità di cui essa esprime l'ultimo valore. Ma la differenza che vi è in ciò che propriamente si chiama metodo dei limiti e quello che si chiama metodo infinitesimale, consiste in ciò, che nel primo, non si ammette di fatto nel calcolo, che i limiti essi medesimi che sono sempre quantità designate; invece che nel metodo infinitesimale, si ammettono ancora le quantità non designate, che si suppongono avvicinarsi continuamente, e le differenze di queste quantità non designate ai loro limiti: il che dà al metodo infinitesimale, più mezzi per variare le sue espressioni e le sue trasformazioni algebriche, senza che possa esservi la minima differenza nel rigore dei processi.

183. La facoltà che si procura così il metodo infinitesimale, lo rende capace ancora di un nuovo grado di perfezione molto più importante, e questo è di poter esser ridotto in un algoritmo particolare Poichè queste differenze fra la quantità non designate e i loro limiti, sono ciò che abbiamo distinto sotto il nome di *differenziali* di questi medesimi limiti, e le semplicità alle quali dà luogo l'ammissione di queste quantità nel calcolo, sono esattamente quelle che danno all'analisi infinitesimale dei mezzi tanto potenti.

Tuttavia il metodo dei limiti, quantunque ristretto dalla facoltà di cui esso si priva d'introdurre nel calcolo le quantità ausiliari di cui questi limiti non sono che gli ultimi valori; questo metodo supera non ostante molto per la facilità dei calcoli il semplice metodo di esaustione; perchè esso si affranca almeno della riduzione all'assurdo per ciascun caso particolare; operazione la più penosa fra quelle che costituiscono il metodo d'esaustione; nel mentre che nell'altro metodo, per stabilire l'eguaglianza di due quantità qualunque, basta provare che esse sono tutte due limiti di una terza quantità.

184. Non vi è veruna distinzione da fare fra il metodo dei limiti e quello delle prime ed ultime ragioni; il Newton non ne fa veruna, esso impiega indifferentemente il nome di limite di una quantità o ultimo valore di questa quantità; limite del rapporto di due quantità o ultima ragione di queste due quantità. Si fa quest'osservazione, perchè vi sono persone che credono vagamente che esista qualche differenza fra il metodo dei limiti, come il D'Alembert lo ha spiegato all'articolo Differenziale dell'Encielopedia, e il metodo delle prime e ultime ragioni, come il Newton lo ha spiegato nel libro dei *Principii*. Ed è assolutamente la medesima cosa, e il D'Alembert dichiara positivamente in quest'articolo, che esso non è che l'interprete del Newton. Questo metodo essendo conosciutissimo servirà darne un'esempio.

È evidente per quello che abbiamo detto (n.° 169), che quantunque $\frac{MZ}{RZ}$ non sia punto eguale a $\frac{TP}{MP}$; tuttavia la prima di queste quantità differisce tanto meno dalla seconda, quanto RS è più vicina ad MP, vale a dire che

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$$

è un'equazione imperfetta; ma (indicando con L l'espressione del limite o dell'ultimo valore)

$$L\,\frac{MZ}{RZ} = \frac{TP}{MP}$$

è un'equazione perfetta, o rigorosamente esatta.

Egualmente si proverà che

$$L\,\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$$

è ancora un'equazione perfetta, o rigorosamente esatta; eguagliando dunque questi due valori di $L\,\frac{MZ}{RZ}$, viene

$$\frac{TP}{MP} = \frac{y}{a-x}$$

ovvero

$$TP = \frac{y^2}{a-x}$$

come sopra. Così in questo nuovo calcolo non sono più le quantità infinitamente piccole MZ ed RZ che ci entrano separatamente, neppure il loro rapporto $\frac{MZ}{RZ}$, ma solamente il suo limite o ultimo valore $L\,\frac{MZ}{RZ}$, che è una quantità finita.

185. Se questo metodo fosse sempre tanto facile a mettersi in uso quanto l'analisi infinitesimale ordinaria, esso potrebbe comparire preferibile; poichè avrebbe il vantaggio di condurre ai medesimi risultamenti per una strada diretta e sempre luminosa.

Ma bisogna convenire, come l'abbiamo di già osservato di sopra, che il metodo dei limiti è soggetto ad una difficoltà considerabile che non ha luogo nell'analisi infinitesimale ordinaria, ed è che non potendo separare, come in questo, le quantità infinitamente piccole l'una dall'altra, e queste quantità trovandosi sempre legate due a due non possiamo far entrare nelle combinazioni le proprietà che appartengono a ciascuna di loro in particolare, nè far subire all'equazioni ove esse s'incontrano, tutte le trasformazioni che potrebbero aiutare ad eliminarle.

Esaminiamo ora in ciò che consiste il metodo delle flussioni.

186. Il Newton considera una curva come generata dal moto uniforme di un punto; egli decompone a ciascuno istante la velocità costante di questo punto in due altre, l'una paralella all'asse delle ascisse e l'altra paralella all'asse dell'ordinate. Queste velocità sono ciò che esso chiama flussioni di queste coordinate, nel mentre che la velocità arbitraria del punto che descrive la curva è la flussione dell'arco descritto.

Viceversa quest'arco descritto si chiama la fluente, ossia l'integrale, della velocità con la quale esso è descritto dal punto mobile, l'ascissa corrispondente si chiama fluente della velocità di questo punto valutata nel senso di queste ascisse, e l'ordinata si chiama fluente della velocità di questo medesimo punto valutata nel senso di quest'ordinata.

Poichè la flussione dell'arco si suppone costante, è evidente che nel solo caso che il cammino del punto descriventi non si faccia in linea retta le flussioni dell'ascissa e dell'ordinata saranno variabili, e che il loro rapporto a ciascun istante dipenderà dalla natura della curva, vale a dire dal rapporto medesimo di queste coordinate.

Viceversa il rapporto delle coordinate dipende necessariamente da quello che esiste a ciascun istante fra le flussioni di queste coordinate. Possiamo dunque domandare qual'è il mezzo di scoprire il rapporto che esiste fra le flussioni, quando si conosce quello che esiste fra le coordinate; e viceversa qual'è quello di scoprire il rapporto che esiste fra le coordinate, quando si conosce quello che esiste fra le flussioni sole, o combinate con le coordinate esse medesime. La prima parte di questo problema è ciò che si chiama metodo diretto delle flussioni, e la seconda metodo inverso delle flussioni.

187. Ma queste prime nozioni possono rendersi più generali; poichè a misura che il punto descrivente percorre la curva, non solamente l'ascissa e l'ordinata cangiano, ma ancora la sottangente, la normale, il raggio di curvatura, ec. vale a dire che queste quantità crescono o diminuiscono più o meno rapidamente come le coordinate esse medesime. Tutte queste quantità hanno dunque delle flussioni i di cui rapporti sono egualmente determinati dal moto del punto che uniformemente descrive la curva; così queste quantità son esse medesime delle fluenti. Ora consiste nell'arte di determinare le relazioni di tutte queste fluenti mediante l'interposizione delle loro flussioni impiegate come ausiliari, ciò che si chiama metodo diretto e inverso delle flussioni, o metodo delle flussioni e fluenti.

Questo metodo applicasi non solamente alle linee curve, ma per analogia si estende all'aree che contengono queste curve, alle superficie curve e ai volumi che esse terminano, alle forze che mettono i corpi in moto, e agli effetti che producono; In una parola la teoria delle flussioni si applica a tutto ciò che fa l'oggetto delle matematiche e delle scienze fisico-matematiche, come il metodo di esaustioni esso medesimo e tutti i modi di calcolo che ne derivano.

188. Il metodo delle flussioni non ammette, come vediamo nel calcolo, che quantità finite: poichè queste flussioni non sono altra cosa che velocità le quali sono quantità finite. Possiamo ancora prendere queste velocità respettive con le quali le coordinate crescono, per coordinate di una nuova curva, le quali avranno ancora le loro flussioni, che saranno similmente quantità finite; e queste ancora potranno esser prese per coordinate di una terza curva, e così di seguito, senza che giammai entri nel calcolo altra cosa che quantità finite.

189. Si sceglie una flussione principale a piacere, ma una volta adottata essa regola tutte le altre: possiamo scegliere quella che si vuole; abbiamo supposto che fosse la velocità assoluta del punto descrivente, che abbiamo considerata come uniforme: ma possiamo supporre egualmente che questa sia la velocità nel senso dell'ascissa, o qualunque altra che sia uniforme e che serva di termine di paragone.

190. Il metodo delle flussioni e fluenti deriva naturalmente da quello delle prime e ultime ragioni; poichè la velocità variabile di un punto, non è il cammino descritto da questo punto in un tempo dato, diviso per questo tempo; ma la prima o l'ultima ragione di questo rapporto, vale a dire la quantità alla quale questo rapporto si avvicina continuamente, a misura che questo tempo si suppone più corto.

191. Quest'osservazione è stata il pretesto di un'obiezione elevata contro il metodo delle flussioni; poichè, è stato detto, che questo è introdurre nella geometria che appartiene alle matematiche pure, la nozione delle velocità che non

appartengono che alle matematiche miste, e definire un' idea che dev' esser semplice, per mezzo di un'altra che è complessa.

Ma quest' obiezione è assai frivola; poichè la vera cosa da considerare, è di sapere se la teoria è più facile ad apprendersi in questo modo piuttosto che in un altro. La classazione che facciamo delle scienze è assai arbitraria. Si mette la geometria avanti la meccanica nell' ordine della semplicità, ma le parti trascendenti della prima son molto più astratte di quelle della seconda; e come lo ha detto il Lagrange. » Ciascuno ha o crede avere un' idea esatta della velocità, » non è dunque prendere un cammino contrario allo spirito delle matematiche, di definire le flussioni per mezzo delle velocità.

192. Abbiamo veduto che le velocità che si chiamano *flussioni*, sono le ultime ragioni degli spazj percorsi e dei tempi impiegati a percorrerli; ma se si paragonano insieme due di queste velocità o flussioni, per esempio la flussione dell' ascissa con quella dell' ordinata, queste flussioni avranno esse medesime fra loro una ragione, che non è altra cosa che il limite del rapporto delle differenziali di queste coordinate. Così il metodo delle flussioni non è ancora, come si vede, che il metodo infinitesimale, e per conseguenza il metodo di esaustione considerato sotto un nuovo punto di vista, e con facilità si vede il legame che unisce tutti questi metodi gli uni agli altri.

193. I processi del metodo delle flussioni non differiscono da quelli dell' analisi infinitesimale, che per la notazione. Invece della caratteristica d, della quale ci si serve in questa, si punteggia le lettere nel metodo delle flussioni; vale a dire che la flussione della variabile o fluente x, per esempio, è rappresentata da $\dot{x}$, ma con questa distinzione, che $\dot{x}$ rappresenta una quantità finita che è la velocità del punto descriventa nel senso dell' ascisse, nel mentre che dx, nel calcolo differenziale, rappresenta una quantità infinitamente piccola, che è l' accrescimento istantaneo di questa medesima ascissa.

Egualmente se si conoscesse una nuova curva, le di cui coordinate siano flussioni respettive di x e y, le flussioni di queste nuove coordinate saranno flussioni di flussioni, e dovranno, per la notazione indicata, essere espresse nel calcolo con $\ddot{x}$, $\ddot{y}$; e queste $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, saranno ancora quantità finite, nel mentre che le differenziali seconde ddx, ddy, che gli corrispondono nel metodo infinitesimale sono quantità infinitamente piccole del second' ordine: così di seguito.

194. Non appartiene a noi di pronunziare fra il Newton e il Leibnizio sopra la priorità dell' invenzione. Ci sembra però che la metafisica di uno di questi metodi sia tanto differente da quella dell' altro che è più che probabile che ciascuno abbia inventato il suo. L' istoria delle scienze matematiche è ripiena di simili incontri; perchè la verità essendo una, bisogna sempre che si giunga ad essa; e tosto che ne abbiamo sentore, ciascuno ci si precipita per quel cammino che gli è stato tracciato. Bisogna fare attenzione che all' epoca del Newton e del Leibnizio una folla d' idee analoghe a quelle di questi due grand' uomini circolavano da tutte le parti negli scritti dei sapienti. Ed era realmente un frutto maturo. Il Cavalieri, il Fermat, il Pascal, avevano sottoposto al calcolo le quantità infinitamente piccole; il Descartes aveva trovato il metodo degl' indeterminati, il Roberval aveva immaginato di decomporre la velocità del punto che descrive una curva, in due altre respettivamente paralelle alle due coordinate; il Barrow aveva considerato le curve come poligoni di un' infinità di lati; l' Wallis aveva insegnato a calcolare le serie. Non mancava altro che di assoggettare tutte le scoperte del medesimo genere ad un modo uniforme per mezzo di un algoritmo; non è perciò più naturale di pensare che il Newton e il Leibnizio abbiano cia-

scuno trovato il suo per strade opportissime, piuttosto che supporre che uno di questi due uomini di già giustamente celebri per tanti titoli, sia stato plagiario dell' altro?

195. La maggior parte dei sapienti, per conciliare la semplicità della notazione Leibniziana col rigore geometrico, prendono il partito di considerare le quantità infinitamente piccole, come assolutamente nulle. La metafisica del calcolo infinitesimale è sviluppata sotto questo punto di vista con molta chiarezza nella prefazione del *Calcolo differenziale* dell' Eulero. » il calcolo differenziale, » dice questo gran geometra, è l' arte di trovare il rapporto degli accrescimenti evanescenti, che prendono funzioni qualunque, quando si attribuisce » alla quantità variabile di cui essi sono funzioni, un accrescimento evanescente. »

Il Newton aveva di già ammesso, nel suo libro dei Principii, la nozione delle quantità evanescenti. » Bisogna, dice egli, intendere per l' ultima ragione delle » quantità evanescenti, la ragione che hanno fra loro quantità che diminuiscono, non avanti di annullarsi, nè dopo che esse sono annullate, ma al momento medesimo che esse si annullano. »

Il D' Alambert rigetta questa spiegazione, quantunque d'altra parte egli adotti completamente, la dottrina del Newton sopra i limiti o prime e ultime ragioni delle quantità.

» Questo metodo, dice il Lagrange, ha il grande inconveniente di considerare » le quantità, nello stato in cui esse cessano per così dire di essere quantità: » poichè quantunque si concepisca sempre bene il rapporto di due quantità, » fintanto che esse rimangono finite, questo rapporto non offre più allo spirito » un' idea chiara ed esatta, subito che i suoi termini diventano l' uno e l' altro » nulli nel medesimo tempo. »

Pare tuttavia che le quantità infinitamente piccole essendo variabili, niente impedisca che si possa attribuir loro il valore zero, come qualunque altro valore. È vero che allora il loro rapporto è $\frac{0}{0}$, che può egualmente supporsi a o b, come qualunque altra quantità.

196. La considerazione di queste quantità evanescenti sarebbe quasi inutile, se ci si limitasse a trattarle nel calcolo come quantità semplicemente nulle, poichè esse non offrirebbero più che il rapporto di o a o, il quale tanto è eguale a 2 a 3 quanto a qualunque altra quantità; ma non bisogna perdere di vista, che queste quantità nulle hanno qui delle proprietà particolari, come ultimi valori delle quantità indefinitamente decrescenti di cui esse sono limiti, e che non gli si dà la denominazione particolare di evanescenti, che col fine di avvertire che di tutti i rapporti o relazioni delle quali esse sono capaci in qualità di quantità nulle, non vogliamo considerare nè far entrare nelle combinazioni, che quelli che sono assegnati loro dalla legge di continuità, quando s'immagina il sistema delle quantità ausiliari, che si avvicina per gradi insensibili al sistema delle quantità designate: ed è precisamente questo che intende il Newton, quando dice, che le quantità evanescenti sono quantità considerate, non avanti che esse si annullino, non dopo che esse sono annullate, ma nell' istante medesimo che esse si annullano.

Nel caso trattato (n.° 169), per esempio, fintanto che RS non coincide con MP, la frazione $\frac{MZ}{RZ}$ è maggiore di $\frac{TP}{y}$; queste frazioni non diventano eguali che nel momento in cui MZ e RZ si riducono a zero. È vero che allora $\frac{MZ}{RZ}$ è ancora eguale a qualunque altra quantità diversa da $\frac{TP}{y}$, poichè

$\frac{0}{0}$ è una quantità assolutamente arbitraria, ma fra i diversi valori che possiamo attribuire a $\frac{MZ}{RZ}$, $\frac{TP}{y}$ è il solo che sia sottoposto alla legge di continuità, è determinato da essa; poichè se si costruiva una curva la di cui ascissa fosse la quantità indefinitamente piccola MZ, e l'ordinata proporzionale a $\frac{MZ}{RZ}$, quella che risponderebbe all'ascissa nulla, sarebbe rappresentata da $\frac{TP}{y}$, e non da una quantità arbitraria: ora questo è ciò che distingue le quantità che si chiamano evanescenti da quelle che sono semplicemente nulle.

Così, quantunque in generale si abbia.

$$0 = 2 \times 0 = 3 \times 0 = 4 \times 0 = \text{ec.}$$

non possiamo dire di una quantità evanescente come MZ,

$$MZ = 2MZ = 3MZ = 4MZ = \text{ec.};$$

poichè la legge di continuità non può assegnare fra MZ ed MZ altro rapporto che quello di eguaglianza, ne altra relazione che quella d'identità.

197. Abbiamo veduto che introducendo nel calcolo delle quantità infinitamente piccole e trascurandole a fronte delle quantità finite, l'equazioni diventavano imperfette, e che gli errori ai quali si dava luogo non si compensavano che nel risultamento cercato. Ora possiamo evitare se vogliamo, questa specie d'inconveniente per mezzo delle quantità evanescenti, che non essendo altra cosa che gli ultimi valori delle quantità indefinitamente piccole corrispondenti, possono come tutti gli altri valori, essere attribuiti a queste quantità indefinitamente piccole; e che da un'altra parte, essendo assolutamente nulle, possono trascurarsi quando esse si trovano aggiunte ad alcune quantità effettive, senza che il calcolo cessi di essere perfettamente rigoroso.

198. Possiamo dunque considerare l'analisi infinitesimale sotto due punti di vista differenti, considerando le quantità infinitamente piccole o come quantità effettive, o come quantità assolutamente nulle. Nel primo caso l'analisi infinitesimale non è altra cosa che un calcolo di errori compensati; e nel secondo è l'arte di paragonare le quantità evanescenti fra loro e con altre, per dedurre da questi paragoni i rapporti e le relazioni qualunque che esistono fra delle quantità proposte.

Come eguali a zero, queste quantità evanescenti debbono trascurarsi nel calcolo, quando esse si trovano aggiunte a qualche quantità effettiva o che esse ne sono sottratte; ma nulladimeno esse hanno però, come l'abbiamo veduto, dei rapporti interessantissimi a conoscersi, rapporti che sono determinati dalla legge di continuità alla quale è sottoposto il sistema delle quantità ausiliari nel suo cangiamento. Ora, per comprendere facilmente questa legge di continuità, è facile di sentire che siamo obbligati di considerare le quantità in questione, a qualche distanza dal termine in cui esse si distruggono intieramente, se no esse non offrirebbero che il rapporto indefinito di zero a zero; ma questa distanza è arbitraria, e non ha altro oggetto che di fare giudicare più facilmente i rapporti che esistono fra queste quantità evanescenti: sono questi rapporti che abbiamo in vista considerando le quantità infinitamente piccole come assolutamente nulle, e non quelli che esi-

stono fra le quantità che non sono ancora giunte al termine del loro annientamento. Queste, che sono state chiamate indefinitamene piccole, non sono per nulla destinate ad entrare esse medesime nel calcolo considerato sotto il punto di vista di cui si tratta in questo momento, ma impiegate solamente per aiutare l'immaginazione, e indicare la legge di continuità che determina i rapporti e le relazioni qualunque delle quantità evanescenti alle quali esse rispondono.

Così, dopo quest' ipotesi, nella proporzione MZ : RZ :: TP : MP, le quantità rappresentate da MZ e RZ si suppongono assolutamente eguali a zero, ma siccome abbiamo bisogno del loro rapporto, è necessario per riconoscere la sua eguaglianza con $\frac{TP}{MP}$, considerare le quantità indefinitamente piccole che corrispondono a queste quantità nulle, non col fine d' introdurle esse medesime nel calcolo, ma per farci entrare sotto la denominazione di MZ e di RZ, le quantità evanescenti che ne sono gli ultimi valori.

199. Quest' espressioni MZ, RZ rappresentano dunque qui dalle quantità nulle, e non s' impiegano sotto le forme MZ, RZ, piuttosto che sotto la forma comuna zero, che per il motivo che se s' impiegassero infatti sotto quest'ultima forma, non si potrebbe più distinguare, nell' operazioni ov' esse si troverebbero mescolate, le loro diverse origini, vale a dire, quali sono le diverse quantità indefinitamente piccole che gli corrispondono. Ora, la considerazione, almeno mentale, di queste è necessaria per comprendere la legge di continuità che determina il rapporto cercato delle quantità evanescenti che esse hanno per limiti, e per conseguenza è essenziale di non perderle di vista, e di distinguerle per mezzo di espressioni che impediscano di confonderle.

200. Le quantità evanescenti che fanno il soggetto del calcolo infinitesimale considerato sotto questo nuovo punto di vista, sono per verità esseri della ragione; ma ciò non impedisce che esse non abbiano delle proprietà matematiche, a che non si possa paragonarle tanto bene quanto si paragonano le quantità immaginarie le quali non esistono di più delle quantità avanescenti. Ora persona non mette in dubbio l'esattezza dei risultamenti che si ottengono dal calcolo degli immaginari, quantunque essi non siano che forme algebriche e geroglifici di quantità assurda; a più forte ragione non possiamo dare l'esclusione alle quantità evanescenti, che sono almeno limiti delle quantità effettive, e toccano per così dire all'esistenza. Che importa infatti che queste quantità siano o non siano esseri chimerici, se i loro rapporti non lo sono, e che questi rapporti siano la sola cosa che c' interessa? Siamo dunque interamente padroni, sottoponendo al calcolo le quantità che abbiamo chiamate infinitesimali, di considerare queste quantità come effettive o come assolutamente nulle; e la differenza che si trova fra questi due modi di considerare la questione, consiste in ciò che considerando queste quantità come nulle le proposizioni, equazioni e risultamenti qualunque, rimangano esatti e rigorosi per tutto il calcolo, ma si rapportano a quantità che sono esseri della ragione, ed esprimono relazioni esistenti fra quantità che in sostanza non esistono da se medesime; invece che considerando le quantità infinitamente piccole come qualche cosa di effettivo, le proposizioni, equazioni e risultamenti qualunque hanno per soggetto delle vere quantità; ma queste proposizioni, equazioni e risultamenti sono falsi, o piuttosto essi sono imperfetti, e non diventano esatti alla fine che per la compensazione dei loro errori, compensazione però che è un seguito necessario ed infallibile delle operazioni del calcolo.

201. La metafisica che abbiamo esposto risponde facilmente a tutte le obiezioni che sono state fatte contro l' analisi infinitesimale, della quale alcuni geometri hanno creduto il principio difettivo e capace d' indurre in errore; ma essi sono

stati oppressi, se così possiamo esprimerci, dalla moltitudine dei prodigi e dallo splendore delle verità che uscivano in folla da questo principio.

Queste obiezioni possono ridursi a questa: o le quantità che si chiamano infinitamente piccole sono assolutamente nulle, o non lo sono; poichè è cosa ridicola di supporre che esistano esseri che tengano un posto medio fra la quantità e lo zero. Ora, se esse sono assolutamente nulle, il loro paragone non conduce a niente; e se esse sono quantità effettive, non possiamo senza errore trattarle come nulle, come lo prescrivono le regole dell'analisi infinitesimale.

La risposta è semplice: ben lungi infatti dal non potere considerare le quantità infinitamente piccole, nè come qualche cosa di reale, nè come niente, possiamo dire al contrario che possiamo a piacere considerarle come nulle o come vere quantità, poichè quelli che vorranno considerarle come nulle, possono rispondere che ciò che essi chiamano quantità infinitamente piccole non sono quantità nulla qualunque, ma quantità nulle assegnate da una legge di continuità che ne determina la relazione; che fra tutti i rapporti dei quali queste quantità sono capaci come zero, essi non considerano che quelli che sono determinati da questa legge di continuità; e che finalmente questi rapporti non sono vaghi e arbitrari, poichè questa legge di continuità non assegna, per esempio, più rapporti differenti alle differenziali dell'ascissa e dell'ordinata di una curva quando queste differenziali svaniscono, ma uno solo, che è quello della sottangente all'ordinata. Da un'altra parte, quelli che considerano le quantità infinitamente piccole come vere quantità, possono rispondere che ciò che essi chiamano infinitamente piccolo non è che una grandezza arbitraria e capace a sopporsi tanto piccola quanto si vuole, senza niente cangiare alle quantità proposte; poichè allora senza supporla nulla, possiamo però trattarla come tale, senza che ne segua alcun errore nel risultamento, poichè quest'errore, se avesse luogo, sarebbe arbitrario come la quantità che lo avrebbe cagionato. Ora è evidente che un simile errore non può esistere che fra quantità di cui qualcheduna almeno sia arbitraria. Dunque quando saremo giunti ad un risultamento che non ne contiene più, e che esprime una relazione qualunque fra le quantità date e quelle che sono determinate dalle condizioni del problema, possiamo assicurare che questo risultamento è esatto, e che per conseguenza gli errori che si sarebbero commessi esprimendo queste condizioni, hanno potuto compensarsi e sparire per mezzo di un seguito necessario e infallibile dell'operazioni del calcolo.

202. Altri geometri, imbarazzati apparentemente dall'obiezione che abbiamo discusso, si sono attaccati semplicemente a provare che il metodo dei limiti, i di cui processi sono rigorosamente esatti in tutti i punti, doveva necessariamente condurre ai medesimi risultamenti dall'analisi infinitesimale. Ma convenendo che il principio di questo metodo è assai luminoso, non possiamo dissimulare che essi non fanno che eludere la difficoltà senza risolverla; poichè il metodo dei limiti non conduce ai risultamenti dell'analisi infinitesimale che per mezzo di un cammino difficile e remoto; e che finalmente questo metodo, lungi dall'essere il medesimo di quello del calcolo dell'infinito, non è al contrario che l'arte di passarsene e di supplirci col calcolo algebrico ordinario: alla qual cosa si riuscirebbe in un modo più semplice, a quello che mi pare, col metodo degl'indeterminati.

203. Segue da quanto abbiamo detto, che possiamo a piacere considerare le quantità infinitamente piccole o come assolutamente nulle, o come vere quantità; un motivo però ci farebbe preferire quest'ultimo metodo di considerare l'analisi infinitesimale; e il motivo è che quelli che la considerano così, pare che trattino la questione in un modo più generale degli altri. Poichè quelli attribuendo alle quantità infinitamente piccole il valore zero, fanno un'operazione

inutile; essi sembrano considerare questa determinazione come necessaria, e pensare che senza di essa non potrebbero ottenere ciò che cercano; ora questo è ciò che non è, poichè queste quantità possono tutte eliminarsi senza condizione, vale a dire senza attribuir loro alcun valore determinato. La questione sembra dunque risoluta in un modo più generale, allorquando si lascia nell' indeterminazione le quantità che non siamo obbligati di determinare.

204. Alcuno dei metodi praticati o proposti fino a questo giorno, per supplire al metodo di esaustione degli antichi, e per ridurlo in algoritmo regolare non è sembrato al Lagrange che riunisca in un grado desiderabile e soddisfacente, l'esattezza e la semplicità richiesta nelle scienze matematiche. Egli ha pensato però che non era impossibile di giungere a questo scopo importante, e le sue ricerche a questo riguardo ci hanno dato la grand' opera che esso ha pubblicato sotto il titolo di *Teoria delle funzioni analitiche, contenente i principii del calcolo differenziale, scevri da qualunque considerazione d' infinitamente piccoli, di evanescenti, di limiti e di flussioni, e ridotti all'analisi algebrica delle quantità finite.* Il Lagrange ha di più dato, sul medesimo soggetto, un' altra opera considerabile, intitolata: *Lezioni sul calcolo delle funzioni*, la quale è un commentario e un supplemento della prima.

Questi scritti sono segnati col conio del genio originale e profondo al quale di già dobbiamo il calcolo delle variazioni e la meccanica analitica; ma siccome essi debbono trovarsi fra le mani di tutti quelli che vogliono approfondire la scienza del calcolo, qui non ne diremo che una parola.

Per conservare, in tutto il corso delle sue operazioni, l'esattezza rigorosa, della quale si è fatto una legge di giammai allontanarsi, il Lagrange, che fa ancora uso delle differenziali, sotto un' altra denominazione e sotto un' altra notazione, le considera come quantità finite, indeterminate. In conseguenza, esso non trascura alcun termine, e prende le sue differenziali, come si fa, nel calcolo alle differenze finite. Questo è a quello che giunge col teorema del Taylor, del quale fa la base della sua dottrina, e che dimostra direttamente per mezzo dell' analisi ordinaria, nel mentre che avanti di esso, non si era ancora dimostrato che col soccorso del medesimo calcolo differenziale.

L' autore giunge così ad esprimere, con equazioni rigorosamente esatte, le condizioni di qualunque questione proposta. Quest' equazioni sembrano certamente dover essere più difficili a stabilirsi e più complicate di quelle che si ottengano con i processi ordinari dell' analisi infinitesimale; vale a dire, quando ci permettiamo di trascurare le quantità infinitamente piccole a fronte delle quantità finite. Ma siccome le une e le altre di quest' equazioni non possono giammai condurre che ai medesimi risultamenti, così sentiamo che debbano necessariamente esistere per le prime, dei mezzi più semplici che le riportino all' altre. Questo è ciò che infatti ha luogo: l' autore con un seguito di trasformazioni ingegnose, giunge a spogliare il suo calcolo di tutto ciò che l'imbarazzava inutilmente. Ed è così che quest' equazioni ritornano da se medesime, e senza che siamo obbligati a niente trascurare nel corso dell' operazioni, alla semplicità di quelle che si sarebbero potute ottenere immediatamente con i processi ordinari dell' analisi infinitesimale.

205. Quantunque il Lagrange prenda le sue differenziali come se queste fossero differenze finite, esse hanno un carattere che le distingue essenzialmente da queste; ed è che esse rimangano sempre indeterminate, dimodochè si rimane padroni, in tutto il corso del calcolo, di renderle tanto piccole quanto si vuole, senza niente cangiare al valore delle quantità delle quali si cerca la relazione; ciò che somministra mezzi di eliminazione i quali non appartengono punto

Digitized by Google

al calcolo ordinario delle differenze finite, nel quale queste differenze sono fisse.

206. È facile di osservare l'analogia che esiste fra la teoria delle funzioni analitiche, quella del calcolo infinitesimale ordinario, e il metodo degli indeterminati del quale abbiamo parlato. Infatti, le differenze prese senza niente trascurare, come si fa nella teoria delle funzioni analitiche, con la formula del Taylor, sono delle serie. Ora, come l'osserva il Lagrange medesimo, tutti i problemi per la di cui soluzione si esige il calcolo differenziale, dipendono unicamente dal primo termine di ciascuna di queste serie, e tutti i metodi non hanno altro scopo, che di staccare e isolare, per così dire, questo primo termine dal resto della serie. Il calcolo differenziale ordinario adempie immediatamente a quest'oggetto, trascurando, fin dal primo momento tutti gli altri, come se fossero nulli; nel metodo degl'indeterminati, si sottintendono solamente, come dovendo necessariamente distruggersi gli uni con gli altri nel risultamento del calcolo; nella teoria delle funzioni finalmente, si fanno realmente entrare nell'espressione delle condizioni del problema, e si distaccano quindi con diverse trasformazioni, fondate sul principio che tutti questi termini hanno per fattor comune un accrescimento della variabile, che siamo padroni di supporlo tanto piccolo quanto si vuole; nel mentre che il primo termine della serie ne è indipendente: il che rientra evidentemente nel metodo degl'indeterminati, col quale siamo condotti a equazioni in cui ciascuno dei termini preso separatamente è eguale a zero.

207. Il vero ostacolo all'adozione di un metodo tanto luminoso, è la novità dell'algoritmo, per il quale bisognerebbe abbandonare quello che una lunga abitudine ha consacrato, e col quale sono redatte tutte le opere originali che sono comparse da più di un secolo; così, per esempio, bisognerebbe rifondere tutte le collezioni accademiche, tutti gli scritti dell'Eulero e quegli del Lagrange medesimo. Questo pensiero era il suo, quando pubblicò la nuova edizione della sua *Meccanica analitica*; esso non impiegò il suo algoritmo, ed ecco come si espresse a questo soggetto nell'avvertimento che mette al principio di quest'ultima opera:

» Abbiamo conservato la notazione ordinaria del calcolo differenziale, perchè » essa risponde al sistema degl'infinitamente piccoli adottato in questo trattato. » Quando abbiamo ben concepito lo spirito di questo sistema, e che ci siamo » convinti dell'esattezza dei suoi risultamenti col metodo geometrico delle prime » e ultime ragioni, o col metodo analitico delle funzioni derivate; possiamo » impiegare gl'infinitamente piccoli come un instrumento sicuro e comodo per » abbreviare e rendere più semplici le dimostrazioni.»

208. Dopo alcuni anni, Giovanni Landen sapiente geometra inglese, aveva tentato con successo, di riportare il calcolo infinitesimale all'algebra ordinaria. Il Lagrange che si compiaceva a far risaltare il merito altrui, perchè si sentiva abbastanza ricco delle sue proprie scoperte, cita onorevolmente Giovanni Landen.

209. I diversi metodi dei quali abbiamo dato l'idea, non sono a parlare propriamente che un solo e medesimo metodo, presentato sotto diversi punti di vista. Ed è sempre il metodo di esaustione degli antichi, reso più o meno semplice, appropriato più o meno felicemente ai bisogni del calcolo, e finalmente ridotto in un algoritmo regolare.

Ma quest'algoritmo è di un'alta importanza, esso è per il metodo di esaustione, ciò che l'algebra ordinaria è per la sintesi; gli antichi non conoscevano che la sintesi e il metodo di esaustione, che esso medesimo non è che un ramo della sintesi: i moderni immaginando l'algebra ordinaria e l'algoritmo infinitesimale, si sono procurati vantaggi immensi. Questo è un istrumento col quale abbreviano e facilitano il lavoro dello spirito, riducendolo per così dire a lavoro

meccanico. I simboli algebrici non sono solamente, ciò che è la scrittura al pensiero, un mezzo di dipingerlo e di stabilirlo; essi resistono al pensiero medesimo, essi lo dirigono fino ad un certo punto, e basta trasportargli sulla carta, seguendo certe regole assai semplici, per giungere infallibilmente a nuove verità.

210. I simboli algebrici fanno ancora più: essi introducono nelle combinazioni, forme puramente immaginarie, esseri fittizii che non possono esistere nè comprendersi, e che ciò non ostante sono utili. S'impiegano ausiliarmente come termini di paragone, per facilitare l'avvicinamento delle vere quantità delle quali vogliamo ottenere la relazione, e quindi si eliminano con trasformazioni che esse medesime, per così dire, non sono che l'opera della mano.

Quest'ammirabile istrumento delle scienze esatte non ha potuto essere che il prodotto di ricerche accumulate dai più profondi genii, e forse da alcuni felici azzardi. Ma non bisogna perdere di vista che questo non è che un istrumento fatto per secondare gli sforzi dell'immaginazione, e non per rallentarne il vigore, ed è sempre un mezzo indiretto inventato per supplire alla debolezza del nostro spirito; non dobbiamo perciò impiegarlo che con riserva, e per vincere le difficoltà o render generali le questioni, ed è un abuso il ricorrerci senza verun bisogno, come nei primi elementi delle scienze, ove cagiona più imbarazzo di quello che gettare vera luce.

211. Ben lungi dall'impiegare l'analisi a stabilire le verità elementari, dobbiamo distaccarle da tutto ciò che c'impedisce di conoscerle il più distintamente possibile, e di riconoscere il cammino che ci conduce a queste. Quelli che riescono a fare vedere quasi intuitivamente risultamenti ai quali non eravamo giunti avanti di loro, che col soccorso di un'analisi complicata, questi non ci procurano sempre tanto piacere quanto sorpresa? purchè ciò non sia giammai che in un modo semplice, e senza aumentare le difficoltà.

212. La regola da tenersi, mi sembra che debba essere di prendere sempre il cammino più semplice, e a difficoltà eguali prendere il più luminoso: alcun mezzo non deve essere esclusivo. Così per ritornare al nostro oggetto, fra i metodi dei quali abbiamo parlato, bisogna per l'uso abituale, scegliere quello che conduce in generale allo scopo, per il cammino il più corto ed il più facile, ma senza rigettarne alcuno degli altri, perchè questi sono in primo luogo in se medesimi belle speculazioni per lo spirito, e quindi perchè non ve ne è uno, forse che non possa condurre a qualche verità fin allora incognita, o procurare in certi casi un risultamento inatteso, o una soluzione più elegante di tutte le altre.

213. Ma fra tutti questi metodi che hanno la loro comun'origine nel metodo di esaustione degli antichi, qual è quello che offre maggior vantaggio per l'uso abituale? mi sembra che generalmente sia convenuto che questo sia quello dell'analisi leibniziana.

I lavori del Descartes, del Pascal, del Fermat, dell'Huyghens, del Barrow, del Roberval, dell'Wallis, del Newton, soprattutto, provano che da lungo tempo ci si avvicinava a questa grande scoperta, allorquando essa fu proclamata dal Leibnizio; e possiamo giudicare che non vi fosse alcuno di questi illustri geometri che non l'avesse fatta, se egli avesse sospettato che ci fosse a questo riguardo una grande scoperta da fare; vale a dire che non ve ne sarebbe stato uno fra di loro che non avesse trovato un mezzo per ridurre in algoritmo il metodo di esaustione, se l'idea gli fosse venuta di cercarlo, e che avesse previsto tutta la fecondità di cui potrebbe essere qualche giorno un simile mezzo. Forse ancora fra i diversi algoritmi creati da tanti genii originali, se ne sarebbe trovato qualcheduno che avrebbe ottenuto la preferenza sopra quello del Leibnizio, che l'abitudine ha consacrato fra di noi, non meno che i preziosi e immensi lavori che sono al giorno di oggi rivestiti delle forme di questo algoritmo.

214. » Possiamo, dice il Lagrange, considerare il Fermat come il primo in-
» ventore dei nuovi calcoli.

» Il Barrow immaginò di sostituire alle quantità che debbono supporsi nulle
» secondo il Fermat, quantità reali, ma infinitamente piccole, e diede, nel 1674,
» il suo metodo delle tangenti, ove considera la curva come un poligono, di
» un' infinità di lati; ma questo calcolo non era ancora che abbozzato, poiche
» non si applicava che all' espressioni razionali.

» Rimaneva dunque a trovare un algoritmo semplice e generale, applicabile
» a tutte le sorti di espressioni, col quale si potesse passare direttamenta e senza
» alcuna riduzione, dalle formule algebriche alle loro differenziali. Questo è ciò
» che il Leibnizio ha dato dieci anni dopo. Pareva che il Newton fosse giunto,
» nel medesimo tempo o un poco avanti, alle medesime abbreviazioni di calcolo
» per le differenziazioni. Ma il gran merito e la forza principale dei nuovi cal-
» coli consistono nella formazione dell' equazioni differenziali e nella loro inte-
» grazione; e sopra questo punto sembra che la gloria dell' invenzione si debba
» quasi unicamente al Leibnizio e soprattutto ai Bernoulli »

215. Sembrerebbe ben difficile ora di abbandonare il cammino che ci è stato aperto da questi illustri geometri; di darsi a una nuova maniera di vedere, a una nuova notazione, a nuove locuzioni. Il Lagrange medesimo riconosceva come l' abbiamo detto, che il metodo infinitesimale, come s' impiega al giorno d'oggi, è un mezzo sicuro di abbreviazione e di semplicità, ed ha creduto doverlo adottare nella sua *Meccanica analitica*, a preferenza di quelli che aveva proposti esso medesimo nella sua *Teoria delle funzioni analitiche*.

216. Questo profondo pensatore diceva, che il vero secreto dell' analisi consisteva nell' arte di comprendere i diversi gradi d' indeterminazione dei quali la quantità è capace; idea che porta a considerare il metodo degl' indeterminati del Descartes, come il più importante corollario del metodo di esaustione.

Infatti, in tutti i rami dell' analisi presa generalmente, vediamo che i suoi processi sono sempre fondati sopra i diversi gradi d' indeterminazione delle quantità che essa paragona. Un numero astratto è meno determinato di un numero concreto, perchè questo specifica non solamente il quanto del numero; ma ancora le qualità dell' oggetto sottoposto al calcolo: le quantità algebriche sono più indeterminate che i numeri astratti, poichè esse non specificano neppure il quanto: fra quest' ultime, le variabili sono più indeterminate delle costanti, perchè queste si considerano come fisse in un più lungo periodo di calcolo; le quantità infinitesimali sono più indeterminate delle semplici variabili, perchè esse rimangano ancora capaci di mutazione, ancora quando abbiamo di già convenuto di considerare le altre come fisse; finalmente le variazioni sono più indeterminate delle semplici differenziali, perchè queste son sottoposte a variare secondo una legge data, nel mentre che la legge secondo la quale si fa cambiare le altre è arbitraria. Nulla termina questa scala dei diversi gradi d'indeterminazione, ed è esattamente in questa riunione di quantità più o meno definite, più o meno arbitrarie, che consiste il principio fecondo del metodo generale degl' indeterminati, di cui il calcolo infinitesimale non è, parlando sinceramente, che una felice applicazione.

Queste quantità, che da una parte son legate allo stato della questione, nel mentre che dall' altra si rimane libero di attribuir loro valori più o meno grandi, queste quantità, dico, che sono in qualche maniera semi-arbitrarie, ci fanno sentire la necessità della distinzione che abbiamo stabilita fra le quantità indicate, e le quantità non indicate; distinzione che non è la medesima di quella che esiste fra le costanti e le variabili; poichè le quantità indicate comprendono le costanti e le variabili delle quali si cerca la relazione, o che ne sono funzioni

Digitized by Google

esclusive; vale a dire, tutte quelle che possano entrare nel risultamento del calcolo, nel mentre che le quantità non indicate ne sono necessariamente escluse. Queste non possono perciò entrare che come ausiliari, ese non servono che a render più facile l'espressione delle condizioni del problema; dopo di che tutte le cure del calcolatore debbono esser dirette verso la loro eliminazione, che è indispensabile in tutti i casi, e che quando essa è fatta, annunzia sempre, che questo calcolo perde fin d'allora il suo primo carattere di calcolo infinitesimale, per rientrare nel dominio dell'algebra ordinaria.

217 Il metodo dei limiti o delle prime e ultime ragioni, non dispensa dalla distinzione almeno tacita, di queste quantità indicate e non indicate; poichè il limite di una quantità non è altra cosa che il termine a cui quest'altra quantità si suppone avvicinarsi continuamente, fino a differirne tanto poco quanto si vuole. Questo limite è dunque considerato come fisso, e per conseguenza come una quantità designata, nel mentre che l'altro potendo avvicinarsi a questo limite tanto quanto si vuole, rimane sempre arbitrario o non indicato, e non può entrare nel risultamento del calcolo.

218. Vediamo da ciò che l'espressione del limite non è nè più nè meno difficile a definirsi esattamente, che quella di quantità infinitamente piccola, e che per conseguenza è un errore di credere che il metodo dei limiti sia più rigoroso di quello dell'analisi infinitesimale ordinaria; poichè per procedere a rigore col metodo dei limiti, bisogna prima di ogni altra cosa definire ciò che significa un limite: ora la differenza di una quantità qualunque al suo limite, è esattamente ciò che si chiama o ciò che si deve chiamare una quantità infinitamente piccola; l'una non è dunque più difficile a comprendersi dell'altra, e se il metodo dei limiti è esatto, come non si potrebbe dubitarne, non vi è alcuna ragione perchè l'analisi infinitesimale non lo sia.

219. Ma questa ha sopra la prima dei grandissimi vantaggi, ciò segue perchè nel metodo dei limiti non è permesso di fare entrare separatamente nel calcolo queste quantità semi-arbitrarie che si chiamano quantità non designate, nè è permesso neppure di ammetterci i loro rapporti, ma solamente i limiti di questi rapporti, i quali sono quantità designate. Mediante ciò siamo privati dei mezzi di combinazione e di trasformazione, che procurano all'analisi infinitesimale, la facoltà che si dà e che dimostra avere il diritto di darsi, di operare isolatamente sopra queste quantità ausiliari, facoltà che costituisce uno dei principali vantaggi del suo algoritmo. L'analisi infinitesimale è dunque un perfezionamento del metodo dei limiti, ed è un uso più esteso, più ardito, del primo, e il quale non è nè meno esatto nè meno luminoso.

220. Del rimanente, il vantaggio del metodo infinitesimale sopra tutti gli altri, non è neppure nell'espressione dei suoi principii che può farsi sentire. Tutti sono quasi egualmente chiari in ciò; ma non è egualmente facile di applicarli alle questioni particolari. La principale difficoltà è allora di mettere i problemi in equazione, il che, al contrario, è generalmente facilissimo nel metodo infinitesimale: perchè fin da quando ci si rifiuta di ammettere francamente nel calcolo, la specie delle quantità che abbiamo chiamate infinitamente piccole; i mezzi di paragone si trovano ristretti, e siamo obbligati a prendere delle strade non dirette per giungere al medesimo scopo.

221. Bisogna osservare che nelle ricerche matematiche, l'immaginazione, si fissa naturalmente sopra le quantità chiamate infinitamente piccole, e non sopra i limiti dei loro rapporti. Se vien dimandato il volume di un corpo terminato da una superficie curva, s'immagina realmente questo volume diviso in un gran numero di strati ovvero ancora di particelle. Questi strati o queste particelle esse medesime sono ciò che si considera, e non i diversi rapporti che esse pos-

sono avere fra loro, e molto meno i limiti di questi rapporti. La nostra immaginazione cerca un oggetto sensibile, delle forme puramente algebriche non le offrirebbero niente se non che vagamente. La divisione del volume in strati o particelle ci offre un quadro, illumina il nostro spirito, lo guida, e facilita la soluzione. Si considera una di queste particelle come l'elemento della quantità totale, che infatti si considera come la somma di tutti questi elementi: si cerca dunque l'espressione differenziale che deve rappresentare questa particella trascurando ciò che le regole del calcolo ci autorizzano ad omettere. Si applicano allora a quest'espressione differenziale, le formule conosciute dal calcolo integrale, e con ciò si giunge senza molta pena a risolvere quel problema che avrebbe forse resistito a tutti gli sforzi del metodo di esaustione, o di qualunque altro nel quale non si potesse far uso dei mezzi di abbreviazione e di semplicità, che somministra il metodo infinitesimale.

222. È permesso di considerare le quantità infinitamente piccole, o come vere quantità, o come assolutamente nulle; ma l'immaginazione si accomoda ancora meglio, al metodo che considera gl'oggetti come effettivi, che a quello che gli riguarda come ridotti a zero. La legge di continuità medesima, che sola può fissare in ciascuno caso il valore di ciascuna delle frazioni $\frac{0}{0}$, le quali senza ciò resterebbero indeterminate, obbliga a paragonarle avanti che esse si annullino interamente. D'altra parte tutte queste quantità debbono essere eliminate; e possono esserlo senza attribuir loro alcun valore determinato: ed è dunque almeno una cosa superflua di supporle eguali a zero; ed è rendere particolare la questione quando possiamo dispensarcene, e per conseguenza, è la stessa cosa che risolverla in un modo meno elegante.

223. Il merito essenziale, sublime, possiamo dirlo, del metodo infinitesimale, è di riunire la facilità dei processi ordinari di un semplice calcolo di approssimazione, all'esattezza dei risultamenti dell'analisi ordinaria. Questo vantaggio immenso sarebbe perduto, o almeno assai diminuito, se a questo metodo puro e semplice, tale come ce lo ha dato il Leibnizio, si volesse, sotto l'apparenza di un maggior rigore sostenuto in tutto il corso del calcolo, sostituirne altri meno naturali, meno comodi, meno conformi al cammino probabile degl'inventori. Se questo metodo è esatto nei risultamenti, come veruno, al giorno d'oggi, ne dubita, se è ad esso che sempre bisogna ritornare nelle questioni difficili, come pare che tutti ne convengano, perchè ricorrere a mezzi indiretti e complicati per supplirlo? Perchè contentarsi di appoggiarlo sopra induzioni e sopra la conformità dei suoi risultamenti con quelli che danno gli altri metodi, quando possiamo dimostrarlo direttamente e generalmente, più facilmente, forse, di ciascuno di questi metodi essi medesimi? L'obiezioni che sono state fatte contro di esso si aggirano tutte sopra questa falsa supposizione, che gli errori commessi nel corso del calcolo, trascurandoci le quantità infinitamente piccole, sono rimasti nel risultamento di questo calcolo, per quanto piccoli che si possano supporre: ora questo è ciò che non è vero: l'eliminazione se gli porta seco tutti necessariamente, ed è singolare che non si sia veduto fin da principio in questa condizione indispensabile dell'eliminazione, il vero carattere delle quantità infinitesimali, e la risposta diramante a tutte le obiezioni.

224. Termineremo quest'articolo con citare le seguenti opere, alle quali gli studiosi potranno ricorrere con successo per approfondire lo studio di questa parte delle matematiche, una delle più importanti, e quella che le facilita moltissimo tutte.

Eulero (Leonh.) *institutiones calculi differentialis*, 2 vol. Petrop 1755 et

Ticini 1787 in-4; Varignon (Pierre) *eclaircissemens sur l'analyse des infini mens petits, du Marquis de l'Hôpital*, Paris 1725 in-4; Bossut, *Calcul différential et intégral*, Parigi 1798, vol. 2 in-8; Cousin, (A.J), *traité du calcul différential et intégral*, Parigi 1796, 2 vol. in-4; Brunacci, *Matematica sublime*, vol. 4, Firenze 1803 e segg. Dubourguet, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, 3 vol. in-8, Parigi 1810-11; Lubbe, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, traduit de l'allemand par M. Kartscher* in-8, Paris 1832; Dubamel, *Cours d'analyse de l'école polytéchnique*, 2 vol. in-8, 1840-41, Boucharlat, *élémens de calcul différentiel et de calcul integral* in-8, Paris, 1838; Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, in-4, Paris, 1813; idem, *Leçons sur le calcul des fonctions* in-4, Paris, 1808; Garnier, *Leçons de calcul différentiel et intégral*, 2 vol. in-8; Paris, 1811-12; La Croix, *Traité complet de calcul différentiel et de calcul intégral*, 3 vol. in-4, Paris, 1810-19; Paoli (Pietro), *Elementi d'algebra con supplemento*, 3 vol. in-8, Pisa, 1803-4; Bordoni (Antonio), *Lezioni di calcolo sublime*, 2 vol. in-8, Milano, 1831; Moigno, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A. L. Cauchy*, 2 vol. in-8, Paris, 1840-42; Navier, *Résumé des leçons d'analyse suivi de notes, par M. J. Liouville*, 2 vol. in-8, Paris, 1840; ec. ec. ec.

FINE DEL VOLUME TERZO.

SBN 613289

Pag.	Vers.	ERRORI	CORREZIONI
10	27	$\frac{C}{B} = \frac{\alpha\gamma}{bcd + \varphi d + \gamma b}$	$\frac{C}{B} \frac{\gamma b}{bcd + \varphi d + \gamma b}$
392	ult.	Dopo finito la pagina si aggiunga	basterà osservare che allora le differenze $\Delta_x u = yz\Delta x$, $\Delta_x\Delta_y u = z\Delta x\Delta y$, $\Delta_x\Delta_y\Delta_z u = \Delta x\Delta y\Delta z$, ec. si ottengono ponendo come fattori, avanti la caratteristica Δ, le variabili che non ci figurano come indici. Il Laplace ha osservato che questa proprietà si estendeva a un ordine qualunque, il che sarà sulle sue tracce dimostrato all'articolo (Funzioni Generatrici).
408	25	$\Delta = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)$ dà $e^{\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta$,	$\Delta = \left(e^{h\frac{d}{dx}} - 1\right)$ dà $e^{h\frac{d}{dx}} = 1 + \Delta$
495	25	$Fx = Fx + A_1\varphi x +$ ec.	$Fx = F\dot{x} + A_1\varphi x +$ ec.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google